

Максим Максимов

основи на **ФИЗИКАТА**

част II.

Електричество и магнетизъм
Вълни и частици

БУЛВЕСТ 2000
София, 2008

Учебникът е одобрен от Факултетния съвет на Физическия факултет на СУ „Св. Климент Охридски“ с Протокол №4 от 14.11.2000 година

Рецензент: *доц. Лиляна Борисова*

© Максим Христов Максимов, автор, 2000
© Булвест 2000, издател, 2000

ISBN 978-954-18-0180-2 (ч.2)

Съдържание

ЕЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗЪМ

Глава 11. Електростатика

44. Електричен заряд и електрично поле	7
45. Закон на Гаус.....	14
46. Потенциал на електростатичното поле.....	19
47. Проводник в електростатично поле.....	23
48. Кондензатори.....	27
49. Енергия на електростатичното поле.....	31
50. Електричен дипол.....	35
51. Диелектрици.....	39

Глава 12. Електричен ток

52. Закон на Ом.....	43
53. Електричен ток в метали.....	47
54. Свърхпроводимост.....	52
55. Понятие за зонна теория на твърдото тяло.....	55
56. Електричен ток в полупроводници.....	58
57. P - n -преход.....	62
58. Работа и мощност на електричния ток.....	66
59. Електрически вериги.....	69
60. Правила на Кирхоф.....	73
61. RC -вериги.....	76

Глава 13. Електромагнитно взаимодействие

62. Магнитно поле.....	80
63. Движение на заредени частици в магнитно поле.....	83
64. Магнитни сили, действащи на проводник, по който тече ток.....	88
65. Магнитно поле на постоянен ток.....	91
66. Електромагнитна индукция.....	97
67. Индуктивност. Енергия на магнитното поле.....	101
68. Уравнения на Максвел.....	104
69. Магнитни свойства на веществата.....	109

ВЪЛНИ И ЧАСТИЦИ

Глава 14. Механични трептения и вълни

70. Хармонично трептене.....	117
71. Енергия на хармоничното трептене.....	122
72. Събиране на хармонични трептения.....	124
73. Затихващи трептения.....	128
74. Принудени трептения. Резонанс.....	131
75. Бягащи вълни.....	135
76. Пренасяне на енергия от вълни.....	140
77. Стоящи вълни.....	143
78. Звукови вълни.....	148
79. Източници и приемници на звук.....	152
80. Ултразвук и инфразвук.....	157
81. Ефект на Доплер. Ударни вълни.....	161

Глава 15. Електромагнитни трептения и вълни

82. Електромагнитни трептения в LC -кръг и в RLC -кръг.....	166
83. Променлив ток.....	170
84. Свойства на електромагнитните вълни.....	177
85. Енергия на електромагнитните вълни.....	180
86. Излъчване на електромагнитни вълни.....	182

Глава 16. Светлина

87. Отражение и пречупване на светлината.....	188
88. Дисперсия на светлината.....	194
89. Оптични уреди.....	196
90. Интерференция.....	201
91. Интерференция на светлината – класически опити.....	205
92. Френелова дифракция.....	210
93. Фраунхоферова дифракция.....	214
94. Поляризация на светлината.....	220
95. Поглъщане и разсейване на светлината.....	225

Глава 17. Относителност и кванти

96.	Принципи на теорията на относителността.....	228
97.	Лоренцови трансформации.....	232
98.	Релативистки ефекти.....	236
99.	Релативистки импулс и енергия...	240
100.	Топлинно излъчване.....	244
101.	Фотоелектричен ефект.....	248
102.	Рентгенови лъчи.....	252
103.	Други експериментални доказателства за квантовите свойства на лъчението.....	254

Глава 18. Ядра и частици

104.	Вълнови свойства на частиците...	259
105.	Принцип за неопределеност.....	262
106.	Атомно ядро.....	264
107.	Радиоактивност.....	268
108.	Процеси на радиоактивно разпадане на ядрата.....	272
109.	Ядрени реакции.....	276
110.	Елементарни частици.....	280
	Отговори на задачите.....	283
	Приложение.....	287

ЕЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗЪМ

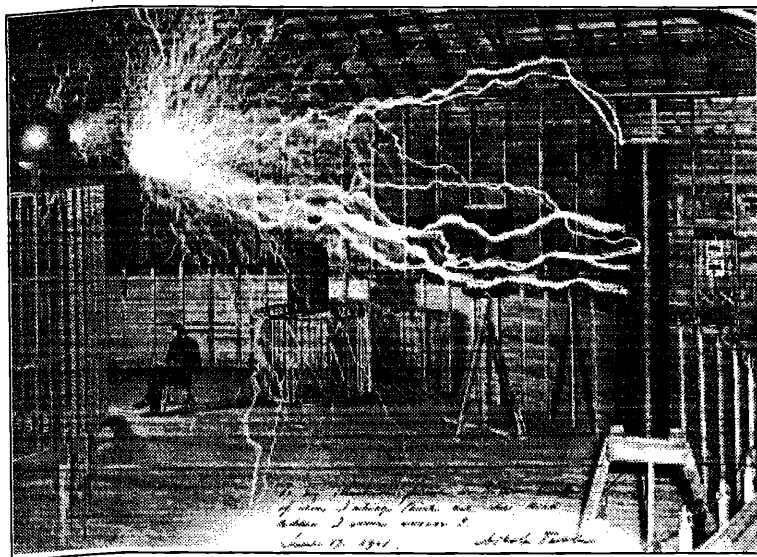
Въпреки огромното им разнообразие и външно различие всички силови взаимодействия (с изключение на гравитационните), които бяха разгледани в механиката, по своята същност се свеждат до електромагнитни взаимодействия между електрични заряди. Електромагнитни по своята природа са еластичните сили, силите на реакция, силите на сухо и вътрешно триене и други. Електромагнитно е също така взаимодействието на молекулите, както и на ядрото с електронната обвивка на атома.

На законите на електромагнетизма се основава принципът на действие на множество уреди, апарати, машини и технологии, определящи облика на съвременната цивилизация: електромотори и електрогенератори, битови електроруди, радио, телевизия, телекомуникации, компютри, копирни машини, електронни апарати за медицината и много други.

Според съвременните представи електромагнитното взаимодействие се осъществява посредством електромагнитно поле. Трябва да се подчертае, че електромагнитното поле не е просто спомагателно математично понятие, въведено за по-лесно описване на взаимодействието, а е реален физичен обект. Полето притежава енергия, импулс и други физични свойства. Веднъж създадено, при определени условия то може да съществува независимо от своите източници и да се разпространява в пространството във вид на електромагнитни вълни.

Класическата електродинамика, като завършена макроскопична теория за електромагнитните явления, се базира на системата от уравнения на Максвел, така както класическата механика – на законите на Нютон. Решаването на уравненията на Максвел обаче в повечето конкретни случаи е сложна математична задача, която излиза извън рамките на тази книга. Затова в следващите три глави, посветени на електромагнетизма, е предпочетен индуктивният метод на изложение. В тях ще се спрем на основните закони, установени експериментално за определени частни случаи, при които електричните и магнитните полета се разглеждат като независими едно от друго. След това ще разгледаме явленията електромагнитна индукция и ток на отместване, в които се проявява връзката между двете полета. Специално внимание ще отделим на редица важни практически приложения на електромагнетизма.

Електростатика



Изобретателят
Никола Тесла
изследва
електрични разряди

Електростатиката, на която е посветена тази глава, изучава електричните полета на неподвижни заряди. Най-напред ще разгледаме взаимодействието между неподвижни точкови заряди, което се осъществява посредством електростатичното поле и се описва със закона на Кулон. Ще въведем величините интензитет и потенциал, характеризиращи полето, и ще формулираме закона на Гаус, изразяващ връзката между електростатичното поле и неговите източници – неподвижните електрични заряди. След това ще се спрем на поведението на проводници и диелектрици, поставени в електростатично поле.

44. Електричен заряд и електрично поле

Електричен заряд

Още древногръцкият философ Талес (640–546 г. пр. н.е.) описва как къс от кехлибар след натриване придобива свойството да привлича леки предмети – сламки или перушинки. Терминът електричество произхожда от гръцката дума „електрон“, която означава кехлибар.

Ако при сух въздух натрием в косата си гребен, след това той започва да привлича леки късчета хартия (фиг.44-1). След като се натрие с парче от вълнен плат, надут празничен балон се привлича и прилепва към стената или тавана на стаята. Подобни прости опити демонстрират наличието на *електрични сили* и *електрични заряди*. Електричният заряд е фундаментална физична величина, която характеризира вътрешно присъщо свойство на електроните, протоните и други микрочастици. Единицата за електричен заряд се нарича кулон (С). Съществуват два вида електрични заряди, които условно са наречени *положителни* и *отрицателни*. Едноименните заряди се отблъскват, а разноименните се привличат.

Елементарният електричен заряд е

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ С.}$$

Носители на елементарен отрицателен заряд $-e$ са електроните, а протоните $+e$. За-

Фиг.44-1. След натриване в косата или в дрехите пластмасовият гребен привлича леки късчета хартия.



рядът на макроскопичните тела е алгебрична сума от зарядите на съдържащите се в тях протони (в атомните ядра) и електрони (в електронните обвивки на атомите). Тъй като този брой е еднакъв, при нормални условия повечето тела са електронеутрални.

Закон за запазване на електричния заряд

Да натрием стъклена пръчка с парче кожа. От пръчката се откъсват електрони и преминават в кожата. В резултат на това пръчката се наелектризира положително, което означава, че броят на протоните в нея е по-голям от броя на електроните. След като получи допълнителни електрони от пръчката, кожата се наелектризира отрицателно. Пръчката и кожата са пример за електрически изолирана система, т.е. система, която не обменя заредени частици с околната среда. Отначало двете тела са електронеутрални: общият заряд на всички протони е равен по големина на общия заряд на всички електрони. Следователно пълният заряд на системата, който е равен на алгебричната сума от положителните и отрицателните заряди, е нула. При наелектризирането не се създават нови заряди, а става само преразпределение на вече съществуващите заряди (електрони). Затова пълният заряд на системата пръчка – кожа не се променя и остава равен на нула.

Експериментално е установено, че в природата съществува закон за запазване на електричния заряд, който може да се формулира така:

Пълният заряд (алгебричната сума от положителните и отрицателните заряди) в електрически изолирана система не се изменя, независимо от това какви процеси се извършват вътре в системата.

Това е основен физичен закон, който е в сила както при наелектризирането на макроскопичните тела, така и в света на микрочастиците. Например неутрон, който не е свързан в ядро, е нестабилна частица, която се разпада на протон, елект-

рон и една електронеутрална частица, наречена антинеутрино. Не е трудно да съобразим, че при този процес също се изпълнява законът за запазване на заряда. Действително, зарядът на неутрона е нула. Алгебричната сума от зарядите на трите частици, получени след разпадането, също е нула: $e + (-e) = 0$. Следователно пълният заряд не се променя.

Закон на Кулон

Опитът показва, че електричните сили на взаимодействие между наелектризираните тела зависят от техните размери и форма, т.е. от това как са разпределени зарядите в обема и по повърхността на телата. Когато обаче размерите на едно тяло са много малки в сравнение с разстоянията до другите наелектризирани тела, електричната сила вече не зависи от големината и формата на тялото. В този случай можем да приемем, че целият електричен заряд на тялото е съсредоточен в една единствена геометрична точка, т.е. да разглеждаме тялото като *точков заряд*.

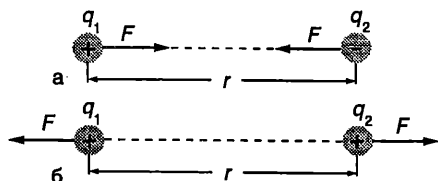
През 1785 г. френският физик Шарл Кулон (1736–1806) обобщава резултатите от проведените от него експериментални изследвания и формулира основния закон за електростатичното взаимодействие (закон на Кулон):

Два неподвижни точкови заряда си взаимодействат със сила, чиято големина е правопрпорционална на произведението от големините на зарядите и обратнопропорционална на квадрата на разстоянието между тях

$$(44.1) \quad F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

където q_1 и q_2 са големините на зарядите, а r е разстоянието между тях (фиг.44-2). Ко-

Фиг.44-2.



ефициентът на пропорционалност k зависи от избора на измерителните единици. В SI, където силата се измерва в нютони (N), разстоянието в метри (m), а зарядът – в кулони (C), константата k има стойност $k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2$.

Често вместо k се използва друга константа ϵ_0 , наречена *електрична константа*. Двете константи са свързани със съотношението

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Съгласно с препоръките на Международния комитет по константите за науката и технологиите (1986 г.) стойността на електричната константа се приема за равна точно на

$$\epsilon_0 = 8,854\,187\,817 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2 / (\text{N} \cdot \text{m}^2).$$

Чрез електричната константа законът на Кулон се записва във вида

$$(44.2) \quad F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

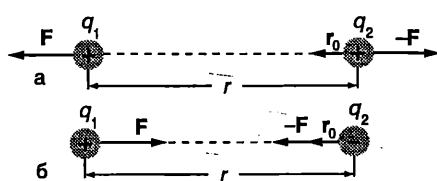
Електрична сила, която се изразява с формула (44.2), се нарича *кулонова сила*. Кулоновите сили са централни – те са насочени по правата, съединяваща двата заряда (фиг.44-2). Съгласно с третия принцип на механиката зарядите взаимодействат с равни по големина и противоположни по посока сили. Това са сили на привличане, когато зарядите са разноименни (фиг.44-2а), или на отблъскване за заряди с еднакъв знак (фиг.44-2б).

Кулоновата сила F , с която зарядът q_2 действа на заряда q_1 , може да се запише във векторен вид

$$(44.3) \quad F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0,$$

където $\mathbf{r}_0$ е единичен вектор, насочен от заряда q_2 към заряда q_1 (фиг.44-3). Ще

Фиг.44-3.



обърнем внимание, че формула (44.3) отчита знаците на зарядите. За едноименни заряди $q_1, q_2 > 0$ и векторите $\mathbf{F}$ и $\mathbf{r}_0$ са еднопосочни (фиг.44-3а), а при $q_1, q_2 < 0$ (разноименни заряди) посоките на $\mathbf{F}$ и $\mathbf{r}_0$ са противоположни (фиг.44-3б). Формули (44.1) и (44.2) за големината на кулоновата сила не отчитат знака на зарядите.

Пример 44.1. Средното разстояние между електрона и протона в атома на водорода е $r = 5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$. Пресметнете и сравнете силите на електрично и на гравитационно взаимодействие между двете частици.

Решение. Големината на електричната сила определяме от закона на Кулон

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2} = (9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}) \frac{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2}{(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} = 8,2 \cdot 10^{-8} \text{ N}.$$

Гравитационната сила определяме от закона на Нютон за гравитацията, като използваме данните от табл. С.1 (част I, стр.238):

$$F_g = \gamma \frac{m_e m_p}{r^2} = (6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{kg}^2}) \times \frac{(9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg})(1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})}{(5,3 \cdot 10^{-11} \text{ m})^2} = 3,6 \cdot 10^{-47} \text{ N}.$$

Отношението на големините на двете сили е $F_e/F_g \approx 2 \cdot 10^{39}$. Следователно електричното взаимодействие между електрона и протона е $2 \cdot 10^{39}$ пъти по-силно от гравитационното. Затова при изучаване на движението и взаимодействието на заредени микрочастици гравитационните сили не се отчитат.

Принцип на суперпозицията

Променя ли се силата на взаимодействие между два заряда, ако близо до тях се разположи трети заряд? Отговор на този въпрос се получава от опита:

Силата на взаимодействие между два точкови заряда не зависи от това дали те са подложени или не са подложени на въздействието на други заряди.

Това твърдение разкрива физичното съдържание на т.нар. принцип на суперпозицията. Електричната сила, с която взаимодействат два точкови заряда, винаги се определя по закона на Кулон – независимо дали зарядите са сами или са заобиколени от други заряди. Принципът на суперпозицията позволява да се замени едновременното действие на няколко електрични сили с тяхната равнодействаща и да се прилагат познатите от механиката правила за събиране на сили (суперпозицията означава наслагване, събиране по определени правила). Например, ако точков заряд е заобиколен от N на брой други точкови заряди, които му действат съответно със сили $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_N$ (всяка от тях се определя по закона на Кулон), резултантната сила, действаща на заряда, е

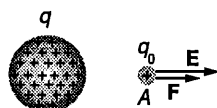
$$(44.4) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i.$$

Електрично поле

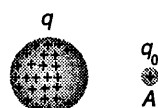
Английският физик Майкъл Фарадей (1791–1867) пръв стига до извода, че електричните заряди взаимодействат посредством създадените от тях полета. Всеки заряд е източник на електрично поле, което изпълва цялото пространство и му придава нови свойства. Тези нови свойства в частност се изразяват в това, че на всеки друг заряд, поставен в електрично поле, действа сила. Полето, създадено от неподвижни заряди, се нарича електростатично поле.

На фиг.44-4 е показано топче с малък положителен заряд q_0 , поставено в точка A на електричното поле, създадено от метална сфера с положителен заряд q . Полето действа на заряда q_0 с електрична сила $\mathbf{F}$. Отношението на силата $\mathbf{F}$ към големината на заряда q_0 се нарича интензитет на електричното поле в точка A :

Фиг.44-4.



Фиг.44-5.



$$E = \frac{F}{q_0} \quad F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{и т.н.}$$

(44.5)

Подобно на силата, интензитетът E на електричното поле е векторна физична величина. Посоката на интензитета E на електричното поле в дадена точка от пространството съвпада с посоката на силата F , с която полето действа на малък положителен точков заряд q_0 , поставен в тази точка.

Единицата за интензитет се получава от формула (44.5). В SI, където силата се измерва в нютони (N), а зарядът – в кулони (C), единицата за интензитет е *нютон на кулон* (N/C).

Малкият положителен точков заряд q_0 , с помощта на който се установява наличието на електрично поле, се нарича *пробен заряд*. Защо поставяме изискването пробният заряд да е малък? На *фиг.44-5* е показан един от случаите, когато това условие не е изпълнено. Наличието на голям заряд в точка A води до преразпределение на зарядите върху наелектризираната метална сфера и полето се променя. Затова пробният заряд q_0 трябва да е толкова малък в сравнение със заряда на сферата, че след поставянето му в точка A разпределението на зарядите върху сферата и полето, което те създават, да не се изменят.

Интензитетът е силова характеристика на електричното поле. Ако знаем интензитета на полето в дадена точка, можем да определим силата F , която ще действа на заряд q , поставен в тази точка, по формулата

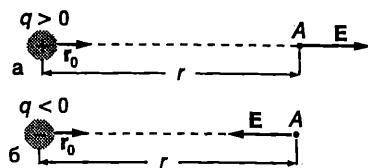
$$(44.6) \quad F = qE.$$

Посоката на силата зависи от знака на заряда q . За положителен заряд ($q > 0$) силата е насочена по посока на интензитета E . На отрицателен заряд ($q < 0$) полето действа със сила, която има противоположна посока на интензитета E .

Електрично поле на точков заряд

Заместваме силата F (за $q_1 = q_0$ и $q_2 = q$) от закона на Кулон (44.3) в уравнение (44.5) и определяме интензитета на полето, създадено от точков заряд q (*фиг.44-6*):

$$(44.7) \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}_0.$$



Фиг.44-6.

Следователно интензитетът на електричното поле на точков заряд намалява обратнопропорционално на квадрата на разстоянието r до заряда.

Интензитетът на електричното поле, което създава система от N на брой точкови заряди $q_1, q_2, \dots, q_N$ в произволна точка A от пространството, се определя с помощта на принципа на суперпозицията. Резултантната сила, действаща на пробния заряд, е векторна сума от силите, с които му действат отделните заряди, и се изразява с формула (44.4). Съгласно с уравнение (44.5) интензитетът на електричното поле в точка A е

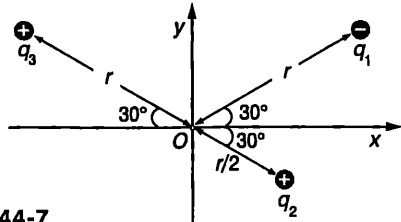
$$(44.8) \quad E = \frac{F}{q_0} = \frac{F_1}{q_0} + \frac{F_2}{q_0} + \dots + \frac{F_N}{q_0} = E_1 + E_2 + \dots + E_N = \sum_{i=1}^N E_i.$$

Следователно интензитетът на електричното поле на система от точкови заряди е векторна сума от интензитетите на полетата на отделните заряди.

Принципът на суперпозицията дава възможност да се пресметне интензитетът на електричното поле и в случая, когато зарядите не са точкови. Зареденото тяло се разделя мислено на много голям брой малки части, които се разглеждат като точкови заряди. Определят се интензитетите на техните полета и се сумират векторно. При непрекъснатото разпределение на заряда сумата (44.8) преминава в интеграл.

Пример 44.2. На *фиг. 44-7* са показани три точкови заряда: $q_1 = -2q$, $q_2 = q$ и $q_3 = 2q$ ($q > 0$). Определете интензитета на електричното поле в точка O.

Решение. Векторите на интензитетите E_1, E_2 и E_3 на електричните полета, които създават в

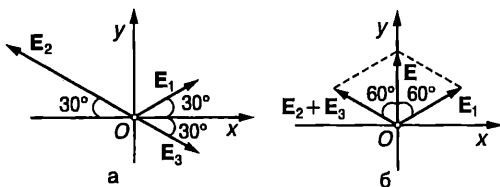


Фиг.44-7.

точка O съответно зарядите q_1 , q_2 и q_3 , са показани на фиг.44-8а. Техните модули са

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2}, \quad E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r/2)^2} = 2E_1;$$

$$E_3 = E_1.$$



Фиг.44-8.

Интензитетът на полето в точка O е

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3.$$

Геометричното събиране на трите вектора се илюстрира от фиг.44-8б. Векторът $\mathbf{E}$ е насочен по оста y . Неговият модул е

$$E = E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{r^2}.$$

Пример 44.3. Върху тънък пръстен с радиус R е разпределен равномерно положителен заряд q . Определете интензитета на електричното поле в точка A , разположена на разстояние h над центъра на пръстена.

Решение. Разделяме мислено окръжността на малки елементи с еднаква дължина $d\ell$. Всеки елемент се разглежда като точков заряд с големина $dq = \frac{q}{\ell_0} d\ell$, където ℓ_0 е дължината на окръжността. На фиг.44-9 е показан интензитетът $d\mathbf{E}$ на полето на един от точковите заряди. Неговата големина е

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d\ell}{\ell_0 (R^2 + h^2)},$$

където $r^2 = R^2 + h^2$ (фиг. 44-9). Разлагаме

вектора $d\mathbf{E}$ на две компоненти – едната успоредна, а другата – перпендикулярна на оста на симетрия на пръстена z (фиг.44-9):

$$d\mathbf{E} = d\mathbf{E}_{\parallel} + d\mathbf{E}_{\perp}.$$

От симетрията следва, че перпендикулярните на оста z компоненти $d\mathbf{E}_{\perp}$ за два елемента, които са разположени симетрично спрямо центъра O на пръстена, са равни по големина и противоположни по посока: тяхната векторна сума е нула. Тъй като всички малки елементи, на които сме разделили пръстена, могат да се групират в подобни двойки, стигаме до извода, че електричното поле на пръстена в точка A няма перпендикулярна на оста z компонента, т.е. интензитетът $\mathbf{E}$ на полето в точка A е насочен по оста z . Големината му е равна на сумата от големините

$$dE_{\parallel} = dE \cos \theta$$

на успоредните на оста z компоненти на полетата на всички малки елементи. От правоъгълния триъгълник на фиг.44-9 изразяваме

$$\cos \theta = \frac{h}{r} = \frac{h}{(R^2 + h^2)^{1/2}}.$$

Заместваме dE и $\cos \theta$ в уравнението за $dE_{\parallel}$ и получаваме

$$dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q h d\ell}{\ell_0 (R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

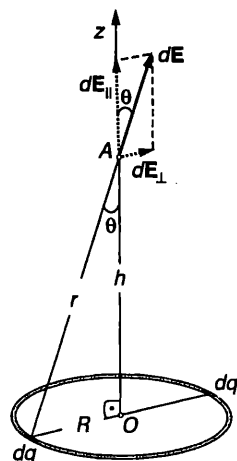
Интензитетът на полето на целия пръстен в точка A е

$$E = \int dE_{\parallel} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q h}{\ell_0 (R^2 + h^2)^{3/2}} \int_0^{\ell_0} d\ell = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q h}{(R^2 + h^2)^{3/2}}.$$

Когато разстоянието h е много по-голямо от радиуса R на пръстена, членът R^2 във формулата за E се пренебрегва и тя получава вида

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{h^2},$$

т.е. на големи разстояния от пръстена разпо-

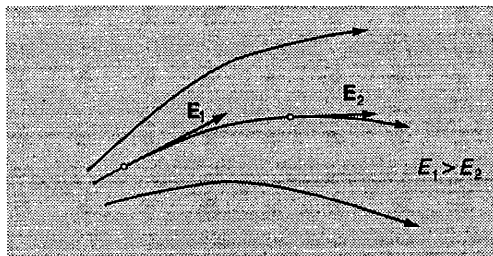


Фиг.44-9.

ложените върху него заряди q създават поле на точков заряд.

Силови линии

За нагледно представяне на електричното поле се използват силови линии, подобни на токовите линии в хидродинамиката, чрез които се представя полето на скоростта на флуидите. Силовите линии са математически линии, които показват посоката на интензитета E на полето: във всяка точка от полето векторът E е насочен по допирателната към силовата линия, преминаваща през тази точка (фиг.44-10).

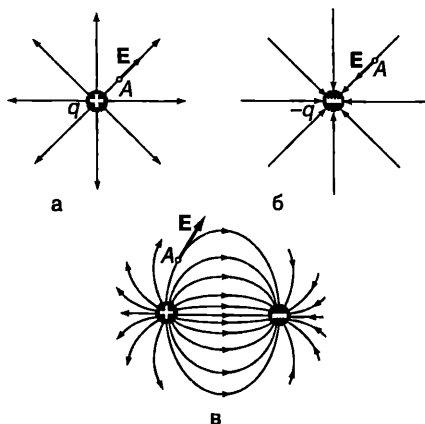


Фиг.44-10. Силови линии на електростатично поле.

При начертаване на силовите линии на електростатичното поле се отчита следното:

1. Силовите линии започват от положителните заряди и завършват в отрицателните заряди или се отдалечават в без-

Фиг.44-11. Електростатично поле на: а) положителен точков заряд; б) отрицателен точков заряд; в) два равни по големина и противоположни по знак точкови заряда.

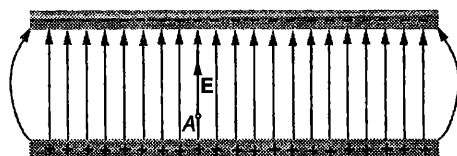


крайност (фиг.44-11). Те не могат да са затворени криви, да се пресичат една с друга или да прекъсват в точки, където няма заряди.

2. Броят на силовите линии, излизащи от положителен заряд или завършващи в отрицателен заряд, е пропорционален на големината на съответния заряд.

3. За нагледност силовите линии се чертаят така, че тяхната гъстота (брой силовии линии, които пресичат повърхност с единица площ, разположена перпендикулярно на силовите линии) да е пропорционална на големината на интензитета. В областите със силно поле силовите линии се чертаят по-нагъсто, а там, където полето е слабо, те се раздалечават (фиг.44-10).

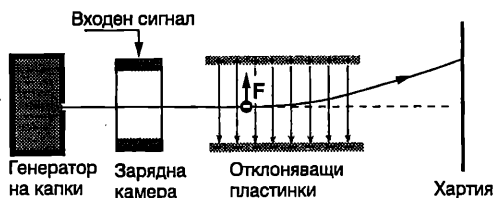
Електрично поле, чийто интензитет има еднаква големина и посока във всички точки от полето, се нарича *еднородно* (хомогенно) поле. Неговите силови линии са успоредни прави линии, разположени на еднакви разстояния една от друга. Например приблизително еднородно е полето между две успоредни метални пластинки, които са заредени с равни по големина и противоположни по знак електрични заряди и са разположени близо една до друга (фиг.44-12).



Фиг.44-12. Еднородно електростатично поле.

Мастилеоструен принтер

Фиг.44-13 илюстрира едно от съвременните приложения на електростатичните полета в мастилеоструйните принтери. При този вид принтери всяка буква върху хартията се очертава от около 100 малки капки мастило. Капките се създават в генератора на капки, след което преминават през специална камера, в която получават отрицателен електричен заряд $-q$. Големината на заряда на всяка отделна капка се контролира от електричен сигнал, постъпващ от компютъра; и носещ инфор-



Фиг.44-13. Принцип на действие на мастиленоструен принтер. Входният сигнал от компютъра контролира големината на електричния заряд на всяка капка мастило и по този начин определя мястото върху хартията, на което ще попадне капката.

мация за текста, който трябва да се отпечата. След това капките преминават между две успоредни метални пластинки, заредени с равни по големина и противоположни по знак електрични заряди, които създават еднородно електрично поле с интензитет E . На капките действа електрична сила $F = -qE$, която ги отклонява към пластинката с положителен заряд. Електричното поле се поддържа постоянно, а отклонението на всяка капка зависи от големината на нейния заряд. По този начин мястото, на което ще попадне капката върху хартията, се определя от нейния електричен заряд: различните капки попадат на различно място и оформят букви.

Задачи

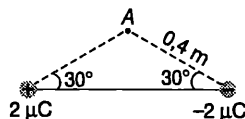
1. Как ще се измени силата на взаимодействие между два точкови заряда, ако разстоянието между зарядите: а) се увеличи 2 пъти; б) се намали 3 пъти?
2. Пресметнете силата на привличане F между два разноименни точкови заряда с големина $q_1 = q_2 = 1 \text{ C}$, които се намират на разстояние $r = 1 \text{ m}$ един от друг. Сравнете тази сила със силата на тежестта G , действаща на слон с маса $m = 3000 \text{ kg}$. Приемете земното ускорение за $g = 10 \text{ m/s}^2$.
3. Колко електрона трябва да се отнемат от метално топче, за да се зареди с положителен заряд $1 \mu\text{C}$?
4. Два точкови заряда се привличат със сила 1 N . Как трябва да се измени разстоянието между зарядите, за да стане силата 16 N ?
5. Две малки топчета, заредени с едноименни заряди с еднаква големина, са свързани с

тънка диелектрична нишка с дължина $0,1 \text{ m}$. Нишката може да издържи максимална сила на опъване $0,9 \text{ N}$. При какъв заряд на топчетата нишката ще се скъса?

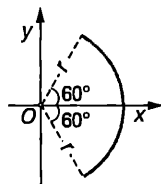
6. През 1909 г. американският физик Миликен за пръв път определя заряда на електрона. Той измерва интензитета на електричното поле, което трябва да се приложи, за да се задържи заредена микроскопична капка масло в равновесие във въздуха. Нека зарядът на капка с маса $m = 1,6 \cdot 10^{-15} \text{ kg}$ се дължи на два некомпенсирувани електрона. Определете заряда на електрона, ако капката е в равновесие при интензитет на електричното поле $E = 4,9 \cdot 10^4 \text{ N/C}$. Земното ускорение е $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

7. Всички експериментални данни показват, че зарядът на електрона е точно равен по големина на заряда на протона и затова атомите и молекулите са електронеутрални. Да допуснем обаче, че зарядът на електрона е само с $0,0001\%$ по-голям от заряда на протона. С каква електрична сила биха се отблъсквали в такъв случай две еднакви медни топчета, всяко с маса $m = 1 \text{ g}$, разположени на разстояние $r = 1 \text{ m}$ едно от друго? Медта има атомен номер $Z = 29$ и моларна маса $M = 63,5 \text{ g/mol}$.

8. Определете големината и посоката на интензитета на електростатичното поле в точка А от фиг. 44-14.



Фиг.44-14.



Фиг.44-15.

9. Тънка еластична пръчка е равномерно заредена с положителен електричен заряд q и е огъната в дъга от окръжност с радиус r (фиг.44-15). Определете големината и посоката на интензитета на електростатичното поле в точка О.

10. Върху диск с радиус R е разпределен равномерно заряд $q > 0$. Определете интензитета на електричното поле в точка А, разположена на разстояние h над центъра на диска.

Указание. Разделете диска на голям брой тънки пръстени. Използвайте резултата от пример 44.3, за да определите интензитета на полето, което създава пръстен с радиус r и дебелина dr .

45. Закон на Гаус

Поток на интензитета

Да разгледаме повърхност с форма на правоъгълник с площ S , разположена перпендикулярно на силовите линии на еднородно електрично поле с интензитет E (фиг.45-1а). Скаларната величина

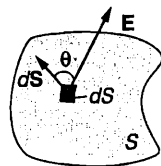
$$(45.1) \quad \Phi_E = ES$$

се нарича поток на интензитета на електричното поле през повърхността S . Величината Φ_E има нагледна геометрична интерпретация: ако силовите линии са начертани така, че гъстотата им да е пропорционална на големината на интензитета E , тогава потокът Φ_E е пропорционален на броя на силовите линии, пресичащи повърхността S .

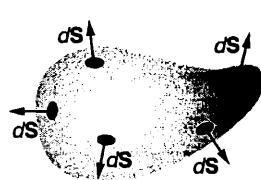
На фиг.45-1б единичният вектор $\mathbf{n}$ на нормалата към повърхността S сключва ъгъл θ с вектора на интензитета $\mathbf{E}$ на еднородното поле. От чертежа се вижда, че броят на силовите линии, пресичащи повърхността S , е равен на броя на силовите линии, които пресичат нейната проекция с площ $S \cos \theta$ върху равнина, перпендикулярна на интензитета $\mathbf{E}$. Тогава потокът на интензитета е

$$(45.2) \quad \Phi_E = ES \cos \theta = E_n S,$$

където $E_n = E \cos \theta$ е проекцията на вектора $\mathbf{E}$ върху нормалата към повърхността. Ще обърнем внимание, че потокът Φ_E е алгебрична величина: $\Phi_E > 0$, когато векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ сключват остър ъгъл ($\cos \theta > 0$), а когато $\cos \theta < 0$, потокът е отрицателен. Ще наречем „лицева“ страната, от която сме избрали да излиза единичният вектор $\mathbf{n}$, а другата страна – „опака“. Потокът Φ_E на интензитета е положителен, когато силовите линии пробождат повърхността от „опаката“ към „лицевата“ страна, и отри-



Фиг.45-2.



Фиг.45-3.

цателен – в обратния случай.

Ще определим потока на интензитета в общия случай, когато повърхността S има произволна форма, а полето не е еднородно. Разделяме повърхността S на безкраен брой малки елементи с площ dS . На фиг.45-2 схематично е представен един от тях. Всеки елемент ще характеризираме с вектор $d\mathbf{S}$, чийто модул е равен на площта dS на елемента, а посоката му съвпада с посоката на единичния вектор $\mathbf{n}$ на нормалата към този елемент, т.е. $d\mathbf{S} = dS \mathbf{n}$. Тъй като елементът е безкрайно малък, електричното поле в неговите граници е еднородно. Тогава съгласно с формула (45.2) потокът $d\Phi_E$ през елемента dS е

$$(45.3) \quad d\Phi_E = E dS \cos \theta = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S},$$

т.е. той е равен на скаларното произведение на векторите $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{S}$.

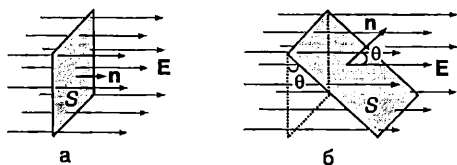
За да определим потока Φ_E през цялата повърхност S , трябва да сумираме (интегрираме) потоците през всички безкрайно малки елементи:

$$(45.4) \quad \Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

На фиг.45-3 е показана затворена повърхност S с произволна форма. В електростатиката такива повърхности се наричат *гаусови повърхности*. Когато повърхността е затворена, прието е единичните вектори $\mathbf{n}$ на нормалите към нея, както и векторите $d\mathbf{S}$, да са насочени навън (фиг.45-3). Тогава силовите линии, които излизат през повърхността, създават положителен поток, а които влизат – отрицателен поток. За затворена повърхност S формула (45.4) за потока на интензитета се записва във вида

$$(45.5) \quad \Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

за затворена
повърхност



Закон на Гаус

Ще установим връзката между потока на интензитета на електричното поле през затворена (гаусова) повърхност и електричните заряди, които създават това поле. Ще започнем с най-простия случай на отделен положителен точков заряд q . За гаусова повърхност ще изберем сфера с радиус r , чийто център съвпада със заряда q (фиг.45-4). Силовите линии на полето излизат радиално от заряда q и са перпендикулярни на повърхността на сферата. Следователно за всяка точка от сферата векторите $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{S}$ са еднопосочни, т.е. $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$. Освен това модулът на вектора $\mathbf{E}$ има

една и съща стойност $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ във всички

точки от сферата, тъй като те се намират на еднакво разстояние r от заряда q . Потокът през малък елемент с площ dS от повърхността на сферата е

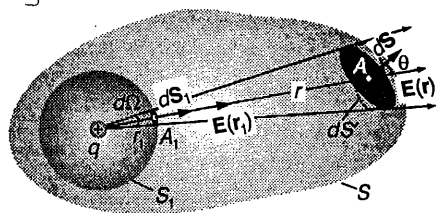
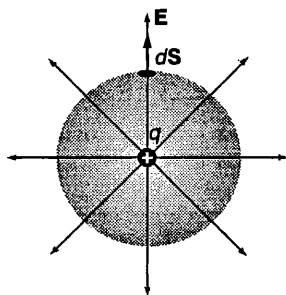
$$d\Phi_E = E dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS,$$

а потокът през цялата сфера е

$$(45.6) \quad \Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0}.$$

Следователно потокът на интензитета през сферата е правопрпорционален на големината на заряда q . Ще докажем, че този резултат остава в сила, когато гаусовата повърхност S , заграждаща точковия заряд q , има произволна форма. Опишваме около заряда q две гаусови повърхности – концентрична сфера с радиус r_1 и

Фиг.45-4.



Фиг.45-5.

затворена повърхност S с произволна форма (фиг.45-5). Отделяме мислено тесен конус (телесен ъгъл $d\Omega$) с връх в заряда q , който отсича от сферата малък елемент с площ dS_1 , а от повърхността S – малък елемент с площ dS (фиг.45-5). Потокът на интензитета през dS_1 е $d\Phi_1 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}_1 = E(r_1) dS_1$, а през dS е $d\Phi_2 = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E(r) dS \cos\theta = E(r) dS'$, където θ е ъгълът между вектора $\mathbf{E}$ и нормалата към елемента dS , $E(r_1)$ и $E(r)$ са големините на интензитета на полето в точките A_1 и A , т.е. на разстояния r_1 и r от точковия заряд, а $dS' = dS \cos\theta$ е проекцията на dS върху сфера с радиус r , концентрична на сферата с радиус r_1 . Както е известно от стереометрията, площите dS_1 и dS' , които отсича телесният ъгъл $d\Omega$ от двете концентрични сферични повърхности, са свързани със съотношението

$$\frac{dS_1}{r_1^2} = \frac{dS'}{r^2} \quad \text{или} \quad dS' = \frac{r^2}{r_1^2} dS_1.$$

Тъй като интензитетът E намалява обратнопропорционално на разстоянието до

$$\text{заряда } q, \quad E(r) = \frac{r_1^2}{r^2} E(r_1).$$

Следователно

$$d\Phi_2 = E(r) dS' = \left(\frac{r_1^2}{r^2} E(r_1) \right) \left(\frac{r^2}{r_1^2} dS_1 \right) = E(r_1) dS_1 = d\Phi_1.$$

И така, съгласно със закона на Кулон интензитетът на електричното поле намалява по закона на обратните квадрати ($E \propto 1/r^2$). Това намаляване на интензитета при отдалечаване от заряда q обаче се компенсира напълно от нарастването на площта на елементите ($dS' \propto r^2$). Затова потоците през елементите dS_1 и dS' са рав-

ни. На всеки един от малките елементи dS , на които мислено разделяме гаусовата повърхност S , съответства получен по описания по-горе начин елемент dS' и елемент dS_1 от сферата S_1 . Следователно пълният поток през гаусовата повърхност е

$$(45.7) \quad \Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Нека точковият заряд q е разположен извън гаусовата повърхност S . В този случай телесният ъгъл $d\Omega$, с връх в заряда q , или изобщо не пресича повърхността S , или я пресича два пъти (фиг.45-6). Като повторим направените вече разсъждения стигаме до извода, че потоците $d\Phi_1$ и $d\Phi_2$ през двата малки елемента dS_1 и dS_2 са равни по големина. Потокът $d\Phi$, обаче е отрицателен, защото силовите линии пресичат dS_1 от „лицевата“ към „опаката“ страна, а потокът $d\Phi_2$ е положителен, тъй като силовите линии пресичат dS_2 от „опаката“ към „лицевата“ страна. Затова общият поток през двата елемента е нула: $d\Phi_1 + d\Phi_2 = 0$. Нула е и пълният поток, който полето на заряда q създава през затворената повърхност S .

Следователно, ако точковият заряд се намира вътре в обема, заграден от гаусовата повърхност, потокът на интензитета на неговото електрично поле е $\Phi_E = q/\epsilon_0$, независимо от формата и размерите на гаусовата повърхност. Когато зарядът се намира извън този обем, потокът е нула ($\Phi_E = 0$).

С помощта на принципа на суперпозицията полученият резултат се обобщава за произволна система от точкови заряди (или заредени тела, които, както вече беше отбелязано, могат да се разглеждат като съвкупност от точкови заряди). Всеки

заряд q_i от системата създава поле с интензитет $\mathbf{E}_i$. Потокът на интензитета на това поле през избраната гаусова повърх-

ност е $\Phi_{E_i} = \frac{q_i}{\epsilon_0}$, ако зарядът q_i е вътре в

обема, заграден от тази повърхност, или $\Phi_{E_i} = 0$, ако зарядът q_i е извън този обем.

Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на електростатичното поле $\mathbf{E}$ е векторна сума от интензитетите на полетата на отделните заряди, а неговият поток е алгебрична сума от потоците на тези полета:

$$(45.8) \quad \Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S (\sum \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{S} = \sum \Phi_{E_i} = \frac{q_n}{\epsilon_0},$$

където q_n е пълният заряд (алгебричната сума от положителните и отрицателните заряди), разположен в обема, заграден от повърхността S . Уравнението

$$(45.9) \quad \Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_n}{\epsilon_0}$$

изразява закона на Гаус в електростатиката, който гласи:

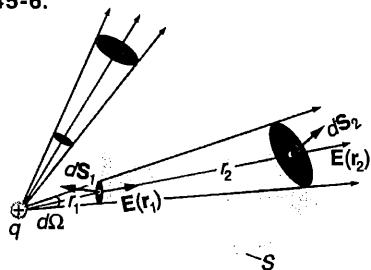
Във вакуум потокът на интензитета на електричното поле през произволна затворена повърхност (гаусова повърхност) е равен на отношението на пълния заряд q_n , намиращ се в заградения от повърхността обем, и електричната константа ϵ_0 .

Законът на Гаус дава възможност лесно да се пресметне интензитетът на електричното поле в случаите, когато електричните заряди са разпределени симетрично. Ще разгледаме три конкретни примера.

Пример 45.1. Електричен заряд q ($q > 0$) е разпределен равномерно в обема на кълбо с радиус R . Определете интензитета на електричното поле на кълбото на разстояние r от неговия център O . Разгледайте два случая:

а) $r > R$; б) $r < R$.

Фиг.45-6.



Решение. Разпределението на електричния заряд има сферична симетрия. Затова електричното поле също е със сферична симетрия: силовите линии са прави линии, които излизат от центъра на кълбото (фиг.45-7).

а) Отчитайки симетрията на полето, избираме за гаусова повърхност сфера с радиус r ($r > R$), чиито център съвпада с центъра на кълбото (фиг.45-7а). Съгласно със закона на Гаус потокът на електричното поле през сферичната повърхност S е

$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

където сме отчели, че целият заряд q на кълбото се намира в обема, заграден от сферичната гаусова повърхност. Разделяме мислено сферата на малки елементи с площ dS , които ще характеризираме с вектори $d\mathbf{S}$, насочени перпендикулярно на повърхността на сферата. Тъй като силовите линии на полето също са перпендикулярни на повърхността на сферата, векторът на интензитета на електричното поле $\mathbf{E}$ на повърхността на всеки малък елемент е успореден на съответния вектор $d\mathbf{S}$ (фиг.45-7а). Следователно $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E dS$. Освен това от сферичната симетрия на полето следва, че интензитетът $\mathbf{E}$ има еднаква големина E за всички точки от повърхността на сферата, защото те се намират на равни разстояния r от центъра на симетрия O . Следователно

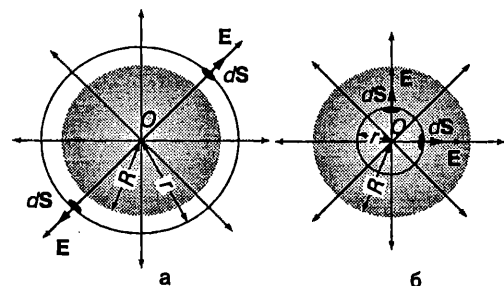
$$\Phi_E = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint_S E dS = E \oint_S dS = E(4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0},$$

където $4\pi r^2$ е площта на сферата. От горното уравнение изразяваме интензитета

$$(45.10) \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Следователно електричен заряд q , разпределен равномерно в обема на кълбо, създава електрично поле, което извън кълбото е еднакво с полето на точков заряд q , поставен в центъра на кълбото.

Фиг.45-7.



б) Повтаряме същите разсъждения, както при $r > R$, и построяваме сферична гаусова повърхност с радиус $r < R$ (фиг.45-7б). Единствената разлика е, че в този случай само част от заряда q на кълбото се намира в обема, заграден от гаусовата повърхност. За да определим заряда q_n , който се намира в кълбото с радиус r , трябва да умножим заряда в единица обем $\frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ по обема $\frac{4}{3}\pi r^3$ на това кълбо.

$$\text{Получаваме } q_n = \frac{r^3}{R^3} q.$$

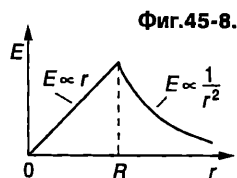
Прилагаме закона на Гаус

$$\Phi_E = E(4\pi r^2) = \frac{q_n}{\epsilon_0} = \frac{r^3}{R^3} \frac{q}{\epsilon_0}$$

и определяме интензитета на електричното поле вътре в кълбото:

$$(45.11) \quad E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

Вътре в кълбото интензитетът на електричното поле нараства по линеен закон с разстоянието r до центъра на кълбото. Графиката на функцията $E(r)$ е показана на фиг.45-8. Ще обърнем внимание, че двете решения (за $r > R$ и за $r < R$) съвпадат при $r = R$, т.е. на повърхността на кълбото.



Фиг.45-8.

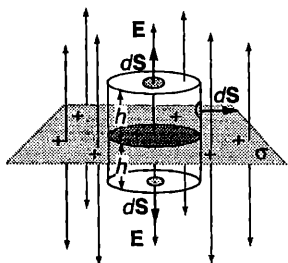
Пример 45.2. Да се определи интензитетът на електричното поле, което се създава във вакуум от равномерно заредена безкрайна равнина. Повърхнинната плътност на заряда е σ ($\sigma > 0$). (Повърхнинна плътност се нарича зарядът на единица площ от равнината.)

Решение. Поради симетрията силовите линии на полето са насочени перпендикулярно на равнината. За гаусова повърхност избираме цилиндър с височина $2h$, чиито основи са успоредни на заредената равнина (фиг.45-9). Тъй като силовите линии на полето са успоредни на околната повърхност на цилиндъра, те не я пресичат и потокът на интензитета през околната повърхност е нула. От симетрията следва, че големината на интензитета на полето на едно и също разстояние h от двете страни на равнината е еднакъв. Следователно потокът през всяка една от основите на цилиндъра е ES , където S е площта на основата. Пълният поток през цилиндъра е $2ES$. Съгласно със зако-

на на Гаус $\Phi_E = 2ES = q_n/\epsilon_0 = \sigma S/\epsilon_0$, където $q_n = \sigma S$ е зарядът на кръга с лице S , който цилиндърът отсича от заредената равнина. Интензитетът на полето на разстояние h от равнината е

$$(45.12) \quad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Следователно интензитетът E не зависи от разстоянието h , т.е. равномерно заредена безкрайна равнина създава еднородно електрично поле, чиито силови линии са насочени перпендикулярно на равнината.



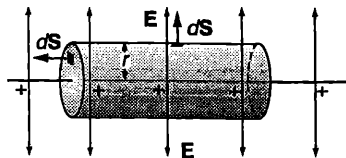
Фиг.45-9.

Пример 45.3. Да се определи интензитетът на електричното поле, което се създава във вакуум от равномерно заредена безкрайна праволинейна нишка. Линеината плътност на заряда е λ ($\lambda > 0$). (Линеината плътност се нарича зарядът на единица дължина от нишката).

Решение. Поради симетрията силовите линии са прави линии, които излизат радиално от нишката (фиг.45-10). Гаусовата повърхност трябва да се избере така, че да се използва аксиалната (осева) симетрия на полето. На това изискване отговаря цилиндърът с радиус r и дължина ℓ от фиг.45-10, чиято ос съвпада с нишката. Двете основи на цилиндъра са успоредни на силовите линии, затова потокът през тях е нула. Околната повърхност на цилиндъра е перпендикулярна на силовите линии. Тъй като всички точки от нея са на еднакво разстояние r от нишката, от симетрията следва, че големината на интензитета E в тях е еднаква. Следователно потокът на интензитета през околната повърхност на цилиндъра е $ES = E(2\pi r\ell)$. Съгласно със закона на Гаус

$$\Phi_E = E(2\pi r\ell) = \frac{q_n}{\epsilon_0} = \frac{\lambda \ell}{\epsilon_0},$$

където $q_n = \lambda \ell$ е зарядът на тази част от нишката, която се намира вътре в цилиндъра, т.е. в



Фиг.45-10.

обема, заграден от избраната от нас гаусова повърхност. От полученото уравнение изразяваме интензитета

$$(45.13) \quad E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Следователно интензитетът E на електричното поле на равномерно заредена безкрайна праволинейна нишка намалява обратно пропорционално на разстоянието r до нишката.

Задачи

1. Електричен заряд q е разпределен равномерно върху повърхността на сфера с радиус R . Определете интензитета на електричното поле: а) вътре в сферата; б) извън сферата.
2. Кълбо с радиус $R = 0,1$ m е заредено равномерно. Обемната плътност на заряда е $\rho = 2 \cdot 10^{-6}$ C/m³. Определете интензитета на електричното поле на разстояние $r = 0,05$ m от центъра на кълбото.
3. Определете силата, с която равномерно заредена непроводяща пластинка привлича точков заряд $q = 1 \cdot 10^{-8}$ C, намиращ се много близо до повърхността на пластинката, но далече от нейните краища. Повърхнинната плътност на заряда на пластинката е $\sigma = 3 \cdot 10^{-7}$ C/m².
4. Електричен заряд е разпределен равномерно в обема на безкраен цилиндър с радиус R . Определете интензитета на електричното поле: а) извън цилиндъра; б) в цилиндъра. Зарядът на единица дължина от цилиндъра е λ .
5. Атомът на водорода може да се разглежда като съставен от положителен точков заряд e (протон), разположен в центъра на атома, около който е разпределен в пространството отрицателен заряд $-e$ (зарядът на електрона). Обемната плътност на отрицателния заряд C се изменя по закона $\rho = C \exp(-2r/r_B)$, където C е константа, $r_B = 0,53 \cdot 10^{-10}$ m е радиусът на Бор, а r е разстоянието до центъра на атома.
 - а) Като използвате факта, че атомът е електронейтрален, определете константата C .
 - б) Определете интензитета на електричното поле на разстояние r_B от центъра на атома.

46. Потенциал на електро-статичното поле

Гравитационните сили са консервативни – тяхната работа при преместване на материална точка не зависи от траекторията, а само от началното и от крайното положение (вж. пример 9.1. на стр.61 от част 1). Гравитационното взаимодействие между две материални точки се описва от закона на Нютон за гравитацията (вж. §5 от част 1), а електростатичното взаимодействие между два точкови заряда – от закона на Кулон (44.1). Двата закона имат аналогична форма: кулоновите сили и гравитационните сили са централни сили и се изменят по закона на обратните квадрати. Затова по аналогичен начин, както при гравитационните сили, се доказва, че електростатичните сили също са консервативни.

Циркулация на електростатичното поле

На пробен заряд q_0 , поставен в електростатично поле с интензитет $\mathbf{E}$, действа сила $\mathbf{F} = q_0 \mathbf{E}$. Работата на консервативните сили на полето при пренасяне на заряда q_0 между две произволни точки зависи единствено от положението на тези точки и не зависи от пътя, по който става пренасянето. При пренасянето на заряда по произволен затворен контур L работата е нула (вж. част 1, §9, стр.59):

$$(46.1) \quad A = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = q_0 \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0,$$

където $d\mathbf{l}$ е векторът на елементарното преместване при обикалянето на контура L .

Интегралът $\Gamma = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ се нарича *циркулация*

на вектора на интензитета $\mathbf{E}$ на електричното поле. Както беше отбелязано в §25 (част 1, стр.136), величината циркулация може да се въведе за всяко векторно поле. При електростатичното поле циркулацията има нагледен физичен смисъл: тя е равна на работата, която извършват електростатичните сили при пренасянето на единица заряд (1 C) по затворения контур L , т.е.

(46.2)

$$\Gamma = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \frac{A}{q_0} = 0.$$

Следователно циркулацията на вектора $\mathbf{E}$ по произволен затворен контур е равна на нула, което е следствие от консервативността на електростатичните сили. Чрез формула (46.2) може да се даде определение на потенциално поле (без да се разглеждат сили): едно векторно поле е потенциално, ако циркулацията му по произволен затворен контур е равна на нула. Такива полета, както беше отбелязано в §25, са *безвихрови*. Една от отличителните характеристики на безвихровите полета е, че силовите им линии не могат да са затворени криви линии.

Потенциал

Освен с интензитета $\mathbf{E}$, във всяка точка от пространството електростатичното поле се характеризира и с величината *потенциал* ϕ . По определение разликата в потенциалите $\phi_B - \phi_A$ на две точки A и B от полето е равна на взетата с обратен знак работа $A_{A \rightarrow B}$, която силите на полето извършват при пренасяне на единица положителен заряд от точка A в точка B :

$$(46.3) \quad \phi_B - \phi_A = -\frac{A_{A \rightarrow B}}{q_0}.$$

Ще подчертаем, че потенциалната разлика между точките B и A е еднозначно определена, защото електростатичните сили са консервативни, т.е. работата $A_{A \rightarrow B}$ зависи единствено от положението на двете точки. Абсолютната стойност на потенциала обаче не е определена еднозначно. Например, ако към потенциалите на точките A и B се прибави една и съща константа, тяхната потенциална разлика няма да се измени.

Единицата за потенциал се нарича *волт* (V). Съгласно с формула (46.3) разликата в потенциалите на две точки от полето е 1 V, ако при пренасяне на заряд 1 C от едната точка в другата точка електростатичните сили извършват работа 1 J, т.е.

$$1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}.$$

Когато двете точки са безкрайно близо една до друга потенциалната разлика е

$$(46.4) \quad d\phi = -dA/q_0 = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ако е известен интензитетът E на полето, след интегриране на уравнение (46.4) се определя потенциалът

$$(46.5) \quad \varphi = -\int E \cdot dr + C.$$

Константата C може да има произволна стойност. За да се определи потенциалът еднозначно, трябва се приеме, че в дадена точка той има някаква предварително зададена стойност. (Обикновено се избира точка, в която потенциалът се приема за равен на нула.)

Пример 46.1. Протон се движи в електростатично поле. В точка с потенциал $\varphi_0 = 1500 \text{ V}$ кинетичната му енергия е $E_{k0} = 2,4 \cdot 10^{-16} \text{ J}$. Колко е кинетичната енергия E_k на протона, когато преминава през точка с потенциал $\varphi = 500 \text{ V}$?

Решение. Нека точков заряд q се намира в точка M от електростатично поле. Ако са известни интензитетът E и потенциалът φ на полето в тази точка, лесно може да се пресметне електричната сила $F = qE$, която действа на заряда, както и неговата електрична потенциална енергия $W = q\varphi$. При решаване на задачи може да се използват двата познати от механиката метода: 1. динамичен (със сили); 2. енергетичен (с енергия).

Енергетичният метод се прилага най-лесно в случаите, когато на заредените частици действат само електростатични сили. Тогава пълната енергия на частицата – сумата от нейната кинетична енергия E_k и електрична потенциална енергия W , не се изменя: $E_k + W = \text{const}$. Под действие на силите на полето кинетичната енергия се преобразува в потенциална енергия и обратно (припомнете си аналогичния закон за запазване на механичната енергия).

В конкретния случай в точката с потенциал φ_0 пълната енергия на протона е $E_{k0} + e\varphi_0$, където e е елементарният заряд. Във втората точка протонът има енергия $E_k + e\varphi$. От закона за запазване на енергията следва равенството $E_{k0} + e\varphi_0 = E_k + e\varphi$, откъдето определяме кинетичната енергия E_k :

$$E_k = E_{k0} + e(\varphi_0 - \varphi) = 4,10 \cdot 10^{-16} \text{ J}.$$

Кинетичната енергия нараства. Следователно при движението на протон (или друга частица с положителен заряд) от точки с висок потенциал към точки с по-нисък потенциал става преобразуване на електричната потенциална енергия в кинетична енергия – полето ускорява протона и той се движи с все по-голяма скорост (кинетична енергия).

Решете същата задача, като заместите протона с електрон. Как ще се измени кинетичната енергия на електрона?

Електронволт

По определение един *електронволт* (1 eV) е кинетичната енергия, която получава в резултат на работата на електричните сили частица със заряд, равен на елементарния заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, когато измине в електростатично поле разстоянието между две точки, чиято потенциална разлика е един волт ($\Delta E_k = A = e\Delta\varphi$):

$$1 \text{ eV} = (1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}.$$

Електронволтът не е единица от SI, но широко се използва за измерване на енергията на молекулите, атомите и елементарните частици.

Потенциал на електростатичното поле на точков заряд

Съгласно с уравнение (44.7) интензитетът E на електростатичното поле на точков заряд q на разстояние r от заряда е

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} r_0 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r,$$

където $r_0 = r/r$ е единичен вектор.

Заместваме E във формула (46.5) и след като използваме равенството $r \cdot dr = r dr$ (вж. пример 9.1. на стр.61 от част 1), получаваме

$$\varphi = -\int \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} r dr + C = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + C.$$

Следователно потенциалът φ на полето на точков заряд намалява обратнопропорционално на разстоянието r и $\varphi \rightarrow C$, когато $r \rightarrow \infty$. Затова е най-естествено да положим $C = 0$, т.е. да приемем, че безкрайно отдалечените точки, където интензитетът на полето на точковия заряд клони към нула, имат също така и нулев потенциал. Тогава

$$(46.6) \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

При направения избор на константата C потенциалът на полето на положителен точков заряд е $\varphi > 0$, а за отрицате-

лен заряд $\varphi < 0$. Когато електростатичното поле се създава от система от n точкови заряда, съгласно с принципа на суперпозицията неговият потенциал е алгебрична сума от потенциалите на полетата на отделните заряди: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$.

Връзка между интензитет и потенциал

Всяка точка от електростатичното поле се характеризира с две величини: векторната величина интензитет $\mathbf{E}$ и скаларната величина потенциал φ , които по определение са свързани със съотношението (46.4). Представяме скаларното произведение на векторите на интензитета и елементарното преместване чрез техните компоненти спрямо декартова координатна система:

$$(46.7) \quad d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -(E_x dx + E_y dy + E_z dz),$$

където вместо с $d\mathbf{r}$ преместването е означено с $d\mathbf{s}$. В частния случай, когато векторът на интензитета $\mathbf{E}$ е насочен по оста x ($E_x = E(x)$; $E_y = E_z = 0$), това уравнение получава вида

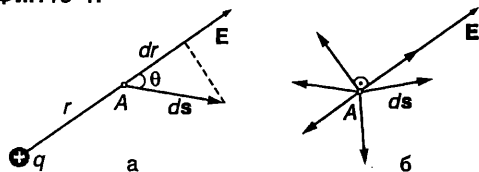
$$(46.8) \quad E_x = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

Знакът минус показва, че когато потенциалът нараства в положителната посока на оста x , векторът $\mathbf{E}$ е насочен в отрицателната посока на същата ос, т.е. в посоката, в която потенциалът намалява. Аналогични равенства могат да се запишат за случаите, когато векторът $\mathbf{E}$ е насочен по оста y или по оста z .

Ще разгледаме още един частен случай, когато полето има сферична или аксиална (цилиндрична) симетрия – например поле на точков заряд или на равномерно заредена безкрайна нишка. В този случай интензитетът $\mathbf{E}$ зависи единствено от разстоянието r до точковия заряд (или до нишката). Тогава

$$d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -Eds \cos \theta = -E dr,$$

Фиг.46-1.



където $dr = ds \cos \theta$ е радиалната компонента на преместването (фиг.46-1а). Следователно

$$(46.9) \quad E = -\frac{d\varphi}{dr}.$$

В общия случай полето може да се изменя в пространството по сложен начин. На фиг.46-1б са показани елементарни премествания с еднаква големина ds , които се извършват в различни посоки от началната точка A . От уравнението $d\varphi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -Eds \cos \theta$ следва, че потенциалът не се изменя, ако преместването се извърши в перпендикулярно направление на вектора $\mathbf{E}$ ($\cos 90^\circ = 0$). Изменението на потенциала е най-голямо, когато векторите $\mathbf{E}$ и $d\mathbf{s}$ са еднопосочни или противоположни. В този случай

$$(46.10) \quad E = -\frac{d\varphi}{ds}.$$

Производната $d\varphi/ds$ се пресмята в направление, в което скаларната функция φ нараства най-бързо – в математиката тя се нарича *градиент* на функцията φ . Уравнение (46.10) показва, че интензитетът $\mathbf{E}$ на електростатичното поле е равен на взетия с обратен знак градиент на потенциала: *векторът $\mathbf{E}$ е насочен в посоката, в която потенциалът намалява най-бързо.*

Пример 46.2. Да се определи потенциалът на електростатичното поле, което създава равномерно заредена безкрайна праволинейна нишка с линейна плътност на заряда λ .

Решение. Както беше показано в пример 45.3, полето на нишката има аксиална симетрия и интензитетът $\mathbf{E}$ намалява с разстоянието r до нишката по закона

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

За поле с аксиална симетрия интензитетът и потенциалът са свързани със съотношение (46.9): $d\varphi = -E dr$. Заместваме E и интегрираме:

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int \frac{dr}{r} + C = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r + C.$$

За разлика от случая на отделен точков заряд (формула (46.6)), модулът на потенциала на равномерно заредена безкрайна нишка нараства с разстоянието r . Затова не е възможно

потенциалът на безкрайно отдалечените точки да се приеме за нула. В случая можем да поставим условието на определено разстояние $r = r_0$ от нишката потенциалът да има някаква предварително зададена стойност $\varphi = \varphi_0$. От това гранично условие се определя константата C :

$$C = \varphi_0 + \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln r_0.$$

Заместваме C в уравнението за φ и окончателно за потенциала на равномерно заредена безкрайна нишка получаваме

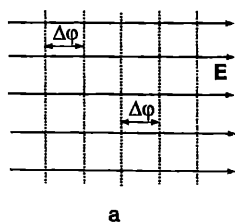
$$(46.11) \quad \varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{r_0} + \varphi_0.$$

Еквипотенциални повърхности

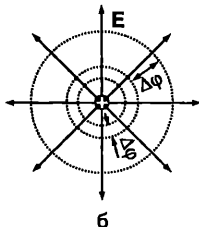
Еквипотенциалните повърхности са геометрично място на точки, които имат еднакъв потенциал $\varphi = \text{const}$. При пренасяне на пробен заряд по еквипотенциална повърхност електричните сили не извършват работа, откъдето следва, че силовите линии и векторът на интензитета на полето винаги са перпендикулярни на еквипотенциалните повърхности. Действително, ако векторът $\mathbf{E}$ имаше компонента, успоредна на еквипотенциалната повърхност, тогава електричните сили биха извършили работа при пренасяне на пробен заряд по тази повърхност и тя нямаше да е еквипотенциална.

Интензитетът $\mathbf{E}$ е насочен перпендикулярно на еквипотенциалните повърхности, в посоката, в която потенциалът намалява. Обикновено еквипотенциалните повърхности се чертаят така, че потенциалната разлика $\Delta\varphi$ между кои да е две съседни повърхности да е еднаква (фиг.46-2).

Фиг.46-2. Еквипотенциални повърхности на: а) еднородно електростатично поле; б) електростатичното поле на положителен точков заряд.



а



б

1. Положителен йон със заряд $2e$ се ускорява от електростатично поле. Колко е кинетичната енергия на йона в точка с потенциал $\varphi = 100 \text{ V}$, ако в началния момент йонът се е намирал в покой в точка с потенциал $\varphi_0 = 200 \text{ V}$?

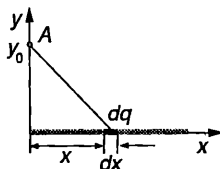
2. Заредена частица се движи в електростатично поле. В точка с потенциал 100 V кинетичната енергия на частицата е $1 \cdot 10^{-5} \text{ J}$, а в точка с потенциал 200 V кинетичната енергия е $5 \cdot 10^{-5} \text{ J}$. Колко е кинетичната енергия на частицата в точка с потенциал 300 V ?

3. В своите знаменити опити Ръдърфорд обстрелва атомите на тънки пластинки от злато с α -частици. На какво минимално разстояние до неподвижно ядро на златото ще се доближи α -частица, която преди да попадне в пластинката е имала кинетична енергия $E_k = 79 \cdot 10^{-14} \text{ J}$? Поредният номер на златото в периодичната система е $Z = 79$.

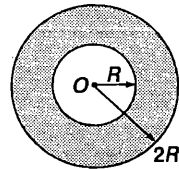
Указание. α -частицата ($Z = 2$) взаимодейства само с едно ядро.

4. Електричен заряд q е разпределен равномерно върху тънка пръчка с дължина ℓ , лежаща върху оста x . Определете потенциала на електростатичното поле в точка A от оста y , която се намира на разстояние y_0 от единия край на пръчката (фиг.46-3).

Указание. Разделете пръчката на малки елементи с дължина dx и заряд dq . Определете потенциала на полето на точков заряд dq в точка A и използвайте принципа на суперпозицията.



Фиг.46-3.



Фиг.46-4.

5. Тънък пръстен с вътрешен радиус R и външен радиус $2R$ е равномерно зареден. Повърхнинната плътност на заряда е σ . Определете потенциала на електростатичното поле в центъра O на пръстена (фиг.46-4).

6. Изразете потенциала φ на електростатичното поле на равномерно заредено кълбо с радиус R и заряд q като функция на разстоянието r до центъра на кълбото.

Указание. Използвайте резултата от пример 45.1 и уравнение (46.9). Двете решения за потенциала (при $r > R$ и $r < R$) трябва да съвпадат за $r = R$.

47. Проводник в електростатично поле

Електрично поле във веществото

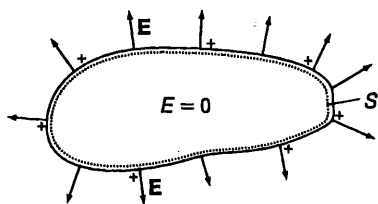
Веществата са изградени от атоми, молекули и йони, които съдържат заредени частици – електрони и атомни ядра. Всяка заредена частица създава собствено електрично поле, а съгласно с принципа на суперпозицията полето във веществото е сума от полетата на отделните микрочастици. Това микроскопично поле обаче е изключително нееднородно – много бързо се изменя на разстояния от порядъка на размерите на атома. Интензитетът му в дадена точка зависи от положението на всички заредени частици. Поради огромния брой микрочастици не е възможно непосредствено да се определи интензитетът на микроскопичното поле и да се проследи изменението му с времето. Затова макроскопичната електродинамика не отчита атомния строеж на веществото и свързаните с него резки изменения на полето между два съседни атома (йона). Подобно на хидродинамиката тя разглежда веществата като непрекъснати среди и характеризира електричните им свойства с макроскопични величини – плътност на заряда ρ и интензитет E на макроскопичното поле. Величините ρ и E са равни на средните стойности на съответните микроскопични величини. Усредняването се извършва за много малки от макроскопична гледна точка области, които обаче включват много голям брой микрочастици. Чрез тази процедура се изглаждат всички резки изменения на микроскопичното поле на малки (атомни) разстояния, които са свързани с атомния строеж на веществото, при което остават само плавните изменения на полето на макроскопични разстояния. Дискретното разпределение на зарядите се заменя с непрекъснатото разпределение, което се характеризира със средната обемна плътност ρ на заряда (или повърхнинната му плътност σ).

Електростатично равновесие

Съгласно с електронната теория металните проводници са изградени от положителни йони, разположени във възлите на кристалната решетка, и свободни електрони, които се движат в целия обем на метала. Само на повърхността на проводниците действат сили, които не позволяват на свободните електрони да напуснат проводника. Тези сили електростатиката не изучава. В рамките на електростатиката дори не е необходимо да се отчита, че в действителност в металите се движат само свободните електрони, а положителните йони остават на местата си във възлите на кристалната решетка. Правилни решения на задачите на електростатиката дава и най-простият модел, според който както отрицателните, така и положителните заряди могат свободно да се движат в обема на проводника, без да го напускат. И най-слабото външно електрично поле привежда в движение свободните електрони. Движението продължава, докато интензитетът на полето вътре в проводника стане нула, т.е. докато свободните електрони се преразпределят така, че тяхното електрично поле изцяло да компенсира външното поле. Ще подчертаем, че във всички разглеждания по-нататък става дума за макроскопичното поле. „Релефът“ на микрополето, т.е. неговите резки изменения в близост до йоните на метала, сравнително малко се влияе от външните полета. Когато не се извършва пренасяне на заряди през обема или по повърхността на проводника казваме, че той се намира в състояние на *електростатично равновесие*. (Хаотичното топлинно движение на свободните електрони не води до пренасяне на електричен заряд, поради което то не се отчита.) Електростатичното равновесие се характеризира със следните важни свойства:

1. *Интензитетът на електростатичното поле във всички точки вътре в проводника е нула ($E = 0$).*

2. *Некомпенсираните заряди се разполагат само по повърхността на проводника.* Действително, да придадем на проводник с произволна форма допълнителен заряд q . Ще докажем, че той се разпре-



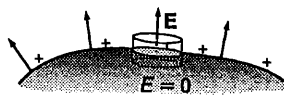
Фиг.47-1.

деля по повърхността на проводника. Избираме гаусова повърхност S , разположена непосредствено под повърхността на проводника (фиг.47-1). При електростатично равновесие интензитетът на електричното поле E във всяка точка от обема на проводника, включително и в точките от повърхността S , е равен на нула. Потокут на интензитета през затворената повърхност S също е нула. Тогава от закона на Гаус следва, че вътре в обема, заграден от повърхността S , няма некомпенсирани заряди, т.е. целият допълнителен заряд q се разпределя само върху повърхността на проводника.

3. *Всички точки от обема и повърхността на проводника имат еднакъв потенциал.* Да допуснем, че в две точки от обема на проводника потенциалът е различен. Това означава, че на заряд, който се пренася от едната точка в другата, действат електрични сили, което противоречи на условието електричното поле в обема на проводника да е нула.

4. *Извън проводника интензитетът на електричното поле е насочен перпендикулярно на повърхността му, която е екипотенциална (фиг.47-1).* Ако интензитетът имаше компонента, успоредна на повърхността на проводника, тогава на свободните заряди от повърхността щяха да действат тангенциални електрични сили и те биха се преразпределили така, че в равновесното положение тангенциалната компонента на интензитета да стане нула.

С помощта на закона на Гаус лесно се установява връзката между интензитета E на електричното поле непосредствено над повърхността на проводника и повърхнинната плътност σ на електричните заряди. За гаусова повърхност избираме прав цилиндър с много малки размери, част от който е вътре в проводника, а другата част



Фиг.47-2.

е извън него (фиг.47-2). Основите на цилиндъра (с площ dS) са успоредни на повърхността на проводника. Силови линии пробождат единствено външната основа на цилиндъра, тъй като вътре в проводника полето е нула, а извън него силовите линии са успоредни на околната повърхност на цилиндъра. Съгласно със закона на Гаус $\Phi_E = EdS = (\sigma dS)/\epsilon_0$, откъдето

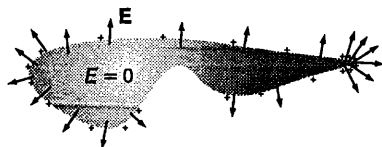
(47.1)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

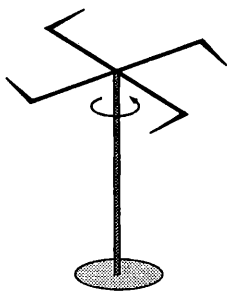
5. *Най-много некомпенсирани заряди се нарупват в изпъкналите (заострени) части на проводниците.* Ако на сферичен проводник се придаде допълнителен заряд q , той се разпределя равномерно върху цялата повърхност. За проводници с неправилна форма обаче разпределението на некомпенсирани заряди е неравномерно. Доказва се, че най-голяма е повърхнинната плътност σ на зарядите в изпъкналите части на проводника и най-малка – във вдлъбнатите (фиг.47-3). Съгласно с уравнение (47.1) интензитетът E на полето е най-голям около изпъкналите части на проводника.

Около заострените краища на зареден проводник полето може да стане толкова силно, че да започне изтичане на заряди. Възниква т.нар. *електричен вятър*. Механизмът е следният. Около острието се създава силно нееднородно поле. Под действие на силите на това поле неутралните молекули на въздуха се поляризират и се привличат към острието. Когато се докоснат до него, молекулите се зареждат с едноименен на острието заряд и веднага се отблъскват в противоположна посока. Тъй като силите, с които

Фиг.47-3.



острието отблъсква заредените молекули, са много по-големи от силите, с които се привличат неутралните поляризиранни молекули, молекулите ще се отдалечават с по-големи скорости в сравнение със скоростите на приближаване към острието. Така възниква електричният вятър – поток от заредени въздушни молекули, отдалечаващи се от острието. Електричният вятър например може да загаси свещ.



Фиг.47-4.

На фиг.47-4 е показан интересен демонстрационен опит, наречен *въртележка на Франклин*. Металните остриета на въртележката се зареждат от електростатична машина. При възникването на електричен вятър, т.е. при отблъскването на заредените въздушни молекули от остриетата, се изпълнява законът за запазване на импулса: молекулите и остриетата получават равни по големина и противоположни по посока импулси, в резултат на което въртележката се завърта.

При силни полета механизмът на изтичане на заряди от остриета е по-сложен. В силното поле около острието става йонизация на въздушните молекули и възникват два противоположни потока – от положителни и от отрицателни йони. Ако например зарядът на острието е отрицателен, положителните йони се привличат към него, а отрицателните се отблъскват. След като достигнат острието, положителните йони се неутрализират, като отнемат част от отрицателния заряд на острието. На подобни процеси се основава действието на гръмоотвода.

Електростатична индукция

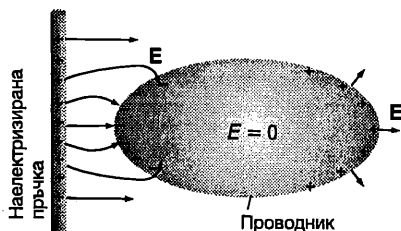
Да доближим наелектризирана с положителен заряд стъклена пръчка до електро-неутрален метален проводник (фиг.47-5). Свободните електрони се привличат от пръчката и част от тях се натрупват в близката до нея част от повърхността на проводника, която се зарежда с отрица-

телен заряд. Поради създадения недостиг на електрони по-отдалечената повърхност на проводника се зарежда с положителен заряд.

Явлението, при което под влияние на външно поле става преразпределение на свободните електрони и едни части от повърхността на проводниците се зареждат с положителен заряд, а други – с отрицателен заряд, се нарича *електростатична индукция*, а зарядите – *индуцирани*.

Индуцираните заряди се разпределят по такъв начин върху повърхността на проводника, че електричното поле в обема му да е нула, т.е. вътре в проводника полето на индуцираните заряди напълно да компенсира външното поле. Извън проводника полето също е суперпозиция от външното поле и полето на индуцираните заряди. Неговите силови линии са перпендикулярни на повърхността на проводника, която е екипотенциална (фиг.47-5).

Нека мислено да отстраним вътрешната част на еднородния проводник от фиг.47-5. Получава се тънка проводяща обвивка. Тъй като вътрешната част не съдържа некомпенсирани заряди, нейното премахване не влияе на електричното поле и на разпределението на индуцираните заряди върху оставащата част. Следователно както в обема на еднороден проводник, така и вътре в тънка проводяща обвивка, електричното поле е нула. Затова кух метален проводник екранира електричното поле на всички външни заряди. Екраниращото действие се използва широко в практиката за *електроста-*



Фиг.47-5.

тична защита. Например, за да се предпазят от влиянието на външни полета, чувствителните електромагнитни измервателни уреди се поставят в метални кутии. Със същата цел стените на някои научно-из-

следователски лаборатории се облицоват с метално фолио.

Защитата от статичното електричество се осъществява чрез *заземяване* – свързване на проводящите тела чрез метална жица за земята, която е проводник с огромни размери. Например, когато корпусът на машина е електрически изолиран от земята, при работа на машината той може да се наелектризира и възниква голяма потенциална разлика между него и земята, представляваща опасност за човека. За да се избегне тази опасност, корпусът се заземява. Тогава между корпуса на машината и земята не може да съществува потенциална разлика, тъй като те образуват един общ проводник, във всички точки от който потенциалът е един и същ.

Пример 47.1. На проводник, който се намира далече от други проводящи тела или електрични заряди, е придаден допълнителен заряд. Той се разпределя по повърхността на проводника, където некомпенсираните (допълнителни) едноименни заряди взаимно се отблъскват. В резултат на това отблъскване повърхността на проводника е подложена на действието на механични сили, които се стремят да я разтегнат. Представете силата f , която действа на единица площ от повърхността, като функция на повърхнинната плътност σ на заряда и на интензитета E на електричното поле непосредствено над заредената повърхност.

Решение. Да отделим мислено от повърхността на заредения проводник малък елемент с площ dS . Интензитетът на електричното поле непосредствено над елемента се изразява с уравнение (47.1), което може да се запише във векторен вид:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} n,$$

където n е единичен вектор, насочен по външната нормала към елемента (фиг.47-6). Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът E на полето е векторна сума от интензитетата E_1 на полето на зарядите $dq = \sigma dS$, разположени

върху елемента с площ dS , и интензитета E_2 на полето на всички останали заряди:

$$E = E_1 + E_2.$$

В точка, която се намира на безкрайно малко разстояние над центъра на елемента dS , зарядите от този елемент създават същото поле, както равномерно заредена безкрайна равнина с повърхнинна плътност на заряда σ .

Следователно $E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} n$ (вж. пример 45.2). Интензитетът на полето на останалите заряди е

$$E_2 = E - E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} n - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} n = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} n.$$

Зарядите от малкия елемент dS се намират в полето E_2 , създадено от всички останали заряди, поради което им действа сила

$$dF = dqE_2 = (\sigma dS) \frac{\sigma}{2\epsilon_0} n = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dSn.$$

Силата, действаща на единица повърхност от проводника, е

$$(47.2) \quad f = \frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} n = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} n,$$

където сме отчели, че $E = \sigma/\epsilon_0$. Следователно силата f , действаща на единица повърхност от проводника, е пропорционална на квадрата на интензитета E и е насочена навън, перпендикулярно на повърхността на проводника.

Задачи

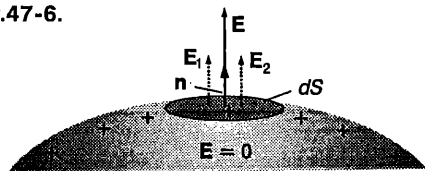
1. Метална сфера е внесена в еднородно електрично поле с интензитет 200 V/m , насочен на север. Определете интензитета на електричното поле, което създават вътре в сферата индуцираните на нейната повърхност заряди.

Указание. Използвайте принципа на суперпозицията.

2. Земната повърхност е заредена отрицателно и създава електрично поле с интензитет $E = 130 \text{ V/m}$. Колко некомпенсирани електрона се съдържат на 1 m^2 от земната повърхност?

3. Две заредени метални сфери с радиуси $R_1 = 1 \text{ cm}$ и $R_2 = 10 \text{ cm}$ са отдалечени една от друга на разстояние, което е много по-голямо от R_2 . Сферите са свързани с метална жица. Интензитетът на електричното поле на повърхността на голямата сфера е $E_2 = 400 \text{ V/m}$. Определете интензитета E_1 на електричното поле на повърхността на малката сфера.

Фиг.47-6.



48. Кондензатори

Капацитет на проводник

Да разгледаме проводник, който е разположен далече от други заредени или проводящи тела, така че техните електрични полета да не му влияят. Допълнителен заряд q се разпределя само по повърхността на проводника, така че електричното поле във всяка точка от обема на проводника да е нула, а повърхността му да е екипотенциална. Доказва се, че това разпределение е единствено и не зависи от големината и от знака на заряда q . Например, ако отношението на повърхнинната плътност на зарядите в две произволно взети точки от повърхността на проводника има определена стойност при дадена големина на заряда q , тази стойност няма да се измени, ако се промени общият заряд q . Оттук следва, че потенциалът φ на проводника е пропорционален на заряда му q , т.е.

$$(48.1) \quad q = C\varphi.$$

Коефициентът на пропорционалност C зависи от формата и от размерите на проводника и не зависи от големината на заряда. Нарича се *капацитет* на проводника. Единицата за капацитет е *фарад* (F). Съгласно с формула (48.1) капацитетът на проводник е един фарад (1 F), ако при заряд $q = 1$ C проводникът има потенциал $\varphi = 1$ V: $1 \text{ F} = 1 \text{ C/V}$.

Пример 48.1. Пресметнете капацитета на сферичен проводник с радиус $R = 1$ m.

Решение. Ако придадем на сферичния проводник заряд q , той се разпределя равномерно по неговата повърхност: всички заряди се намират на еднакво разстояние R от центъра O на сферата. Следователно потенциалът в точка O

$$\text{е } \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}. \text{ Същият потенциал има и екипотенциалната повърхност на проводника. (Ще припомним, че всички точки от обема и повърхността на проводниците имат еднакъв потенциал.) Капацитетът на сферичния проводник е}$$

$$(48.2) \quad C = q/\varphi = 4\pi\epsilon_0 R = 1,1 \cdot 10^{-10} \text{ F}.$$

Полученият резултат показва, че фарадът е много голяма единица. Лесно се пресмята, че капацитет 1 F има сферичен проводник с радиус $9 \cdot 10^9$ m, т.е. около 1500 пъти по-голям от радиуса на Земята. Затова в практиката по-често се използват дробните единици милифарад ($1 \text{ mF} = 10^{-3} \text{ F}$), микрофарад ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$), нанофарад ($1 \text{ nF} = 10^{-9} \text{ F}$) и пикофарад ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$).

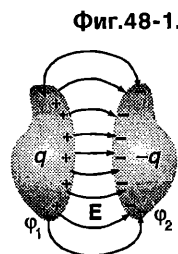
Формула (48.2) е за частния случай на сферичен проводник, но тя илюстрира и един общ резултат: капацитетът на отделен проводник, намиращ се във вакуум, може да се представи като произведение от електричната константа ϵ_0 и някаква характерна за проводника дължина. Следователно в SI размерността на електричната константа е *фарад на метър*: $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$.

Капацитет на кондензатор

Отделните проводници имат малък капацитет, поради което не могат да се използват за натрупване и съхраняване на електрични заряди. Ако към проводник със заряд q се приближи незареден проводник, в резултат на електростатичната индукция потенциалът на заредения проводник намалява. Върху незаредения проводник се индуцират заряди – тези, които са разноименни на заряда q , се разполагат по-близо до заредения проводник, а едноименните – по-далече. Затова разноименните индуцирани заряди оказват по-голямо влияние на потенциала на заредения проводник, като го намаляват. Следователно капацитетът на проводника нараства и върху него може да се натрупа по-голямо количество заряд. Ефектът е още по-силен, когато двата проводника са заредени с противоположни по знак заряди. Система от два проводника, които са заредени с еднакви по големина и противоположни по знак електрични заряди, се нарича *кондензатор* (фиг.48-1). Основната характеристика на кондензатора е неговият капацитет C , който се дефинира чрез равенството

$$(48.3) \quad C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{q}{U},$$

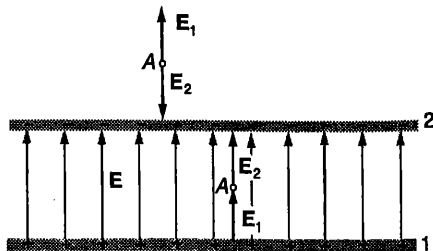
където φ_1 и φ_2 са потенциалите на двата проводника, а q е зарядът на кон-



дензатора. Ще обърнем внимание, че заряд на кондензатора се нарича големината на заряда на единия от проводниците. Тъй като по определение двата проводника имат еднакви по големина и противоположни по знак заряди, техният общ заряд е нула. Потенциалната разлика $U = \varphi_1 - \varphi_2$ се нарича *електрично напрежение* между съответните точки на полето (в случая между екипотенциалните повърхности на двата проводника).

Капацитетът на кондензатор, също както капацитетът на отделен проводник, се измерва във фаради. Той зависи от формата, размерите и взаимното положение на двата проводника, образуващи кондензатора.

Кондензаторите се използват в практиката за натрупване на електричен заряд и на електрична енергия (вж. §49). Двата проводника, от които е съставен кондензаторът, се наричат *електроди*. За да не оказват външните полета влияние на капацитета на кондензаторите, на електродите се придава подходяща форма и те се разполагат един спрямо друг така, че електричното поле, което създават техните заряди, да е съсредоточено в пространството между електродите, а извън кондензатора полето да е нула. В най-простите случаи, когато лесно може да се пресметне капацитетът, електродите са: две успоредни метални пластини (равнини), разположени на малко разстояние една от друга (*плосък кондензатор*), две концентрични метални сфери (*сферичен кондензатор*) или два коаксиални метални цилиндъра (*цилиндричен кондензатор*).



Фиг.48-2.

ищата на кондензатора и ще разглеждаме всеки един от двата електрода като равномерно заредена безкрайна равнина с повърхнинна плътност на заряда $\sigma = q/S$ и $-\sigma$. Такава равнина създава еднородно електрично поле с интензитет $E_1 = \sigma/2\epsilon_0$ (вж. пример 45.2). Извън кондензатора двата електрода създават полета, чиито интензитети имат противоположни посоки, поради което резултантното поле е нула (фиг.48-2). Вътре в кондензатора интензитетите на двете полета имат еднаква посока и съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на резултантното поле е

$$(48.4) \quad E = 2E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}.$$

Полето вътре в плоския кондензатор е еднородно – силовите му линии са успоредни прави с еднаква гъстота, които започват от положителния електрод и завършват в отрицателния електрод (фиг.48-2). Напрежението между двата електрода е равно на потенциалната разлика между две точки на еднородно поле, лежащи върху една и съща силова линия на разстояние d една от друга:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d = \frac{q}{S\epsilon_0} d.$$

Капацитетът на плоския кондензатор е

$$(48.5) \quad C = \frac{q}{U} = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d}.$$

Формула (48.5) показва, че капацитетът на плосък кондензатор нараства, ако се намали разстоянието между електродите или се увеличи тяхната площ.

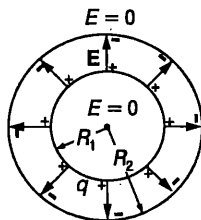
Пример 48.3. Пресметнете капацитета на сферичен кондензатор, съставен от две концентрични сфери с радиуси R_1 и R_2 (фиг.48-3).

Решение. Нека вътрешната сфера е заредена със заряд q , а външната – със заряд $-q$. Поради сферичната симетрия зарядите се разпределят равномерно върху външната повърхност

Пример 48.2. Да се пресметне капацитетът на плосък кондензатор, съставен от две успоредни проводящи пластинки всяка с площ S , разположени във вакуум (или във въздух) много близо една до друга. Разстоянието d между пластинките е много по-малко от техния характерен линеен размер (например от радиуса им, ако пластинките са кръгли, или от дължината на диагонала им, ако пластинките са правоъгълни).

Решение. Нека едната пластинка е заредена със заряд q , а другата – със заряд $-q$. Тъй като пластинките са големи, а разстоянието между тях е малко, няма да отчитаме ефектите в кра-

на вътрешната сфера и върху вътрешната повърхност на външната сфера. Електрично поле има само в пространството между двете сфери. Тъй като извън кондензатора полето е нула, всички точки от външното пространство имат същия потенциал, както външния сферичен проводник на кондензатора. Ще приемем този потенциал за нула: $\varphi_2 = 0$. Общият център на двете сфери има същия потенциал φ_1 , както екипотенциалната повърхност на вътрешната сфера. Той е алгебрична сума от потенциала на зарядите q , които се намират на разстояние R_1 от центъра, и на зарядите $-q$, разположени върху външната сфера на разстояние R_2 от центъра:



Фиг.48-3.

$$\varphi_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right).$$

Капацитетът на сферичния кондензатор е

$$(48.6) \quad C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{4\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Ще разгледаме два характерни гранични случая:

1. Увеличаваме радиуса на външната сфера. Когато е в сила неравенството $R_2 \gg R_1$, умалителят R_1 в знаменателя на уравнение (48.6) може да се пренебрегне. След съкращаване на R_2 се получава формулата $C = 4\pi\epsilon_0 R_1$ за капацитет на отделен сферичен проводник (вж. пример 48.1). Действително, в този случай външната сфера е толкова отдалечена, че не оказва влияние на капацитета на вътрешния сферичен проводник.

2. Разстоянието d между двете сфери е много малко и е в сила неравенството $d = R_2 - R_1 \ll R_1$. Тогава двете сфери имат приблизително еднаква повърхност $S \approx 4\pi R_1 R_2$. След заместване на S и d в уравнение (48.6), за капацитета се получава $C = \epsilon_0 S/d$, което е формулата за капацитет на плосък кондензатор. В този граничен случай, поради малкото разстояние между сферите и приблизително еднаквата им повърхност, електричното поле между тях е почти еднородно и кондензаторът може да се приеме за плосък.

ра се получава кондензаторна батерия. Два кондензатора могат да се свържат успоредно или последователно. В общия случай една кондензаторна батерия може да съдържа различни комбинации от успоредно и последователно свързани кондензатори.

На фиг.48-4а е показана схематично батерия, съставена от два успоредно свързани кондензатора с капацитети C_1 и C_2 . Горните електроди на кондензаторите са свързани с проводник, поради което имат еднакъв потенциал φ_1 . Същото се отнася за долните електроди, чийто потенциал ще означим с φ_2 . Следователно при успоредно свързване напрежението върху заредените кондензатори е еднакво: $U = \varphi_1 - \varphi_2$. Зарядът на единия кондензатор е $q_1 = C_1 U$, а на другия е $q_2 = C_2 U$.

Общият заряд на кондензаторната батерия е $q = q_1 + q_2 = (C_1 + C_2)U$, а нейният капацитет е

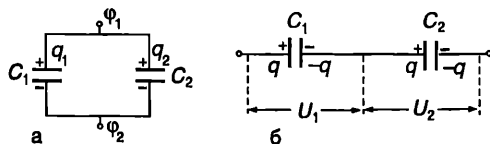
$$(48.7) \quad C = q/U = C_1 + C_2.$$

Следователно кондензаторна батерия, съставена от два успоредно свързани кондензатора, е еквивалентна на един единствен кондензатор с капацитет, равен на сумата от капацитетите на двата кондензатора. Този резултат се обобщава за батерия от N успоредно свързани кондензатора с капацитети $C_1, C_2, \dots, C_N$:

$$(48.8) \quad C = C_1 + C_2 + \dots + C_N.$$

На фиг.48-4б са показани два последователно свързани кондензатора. Ако на левия електрод на първия кондензатор се придаде заряд q , в резултат на електростатичната индукция върху свързаните с проводник съседни електроди на двата кондензатора се индуцират равни по големина и противоположни по знак заряди $-q$ и q (фиг.48-4б). Зарядът q на левия електрод на втория кондензатор от своя страна индуцира заряд $-q$ на десния му електрод и по този начин двата конденса-

Фиг.48-4.



Свързване на кондензатори

В електрическите вериги кондензаторите се отбелязват със символа $\text{--}||\text{--}$. При свързване на два или повече конденса-

тора се оказват заредени с един и същ заряд q . Напрежението на първия кондензатор е $U_1 = q/C_1$, а напрежението на втория кондензатор е $U_2 = q/C_2$. Напрежението върху кондензаторната батерия е

$$U = U_1 + U_2 = q \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) = \frac{q}{C},$$

където

$$(48.9) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.$$

Равенство (48.9) изразява капацитета C на батерия, съставена от два последователно свързани кондензатора. В случай на N последователно свързани кондензатора общият капацитет е

$$(48.10) \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}.$$

Пример 48.4. Пресметнете капацитета на кондензаторната батерия от фиг.48-5а.

Решение. Ще решим задачата „стъпка по стъпка“. Отначало заместваме двата успоредно свързани кондензатора с капацитети $4 \mu\text{F}$ и $2 \mu\text{F}$ с еквивалентен кондензатор, който има капацитет

$$C' = 4 \mu\text{F} + 2 \mu\text{F} = 6 \mu\text{F}.$$

Следващата стъпка е да заместим в получената схема (фиг.48-5б) двата последователно свързани кондензатора с капацитети $3 \mu\text{F}$ и $6 \mu\text{F}$ с еквивалентен кондензатор, чийто капацитет C'' определяме чрез непосредствено заместване във формула (48.9):

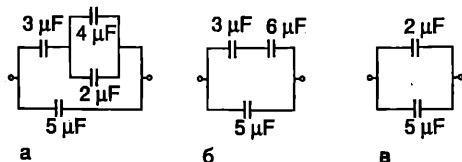
$$\frac{1}{C''} = \frac{1}{3 \mu\text{F}} + \frac{1}{6 \mu\text{F}} = \frac{1}{2 \mu\text{F}}; \quad C'' = 2 \mu\text{F}.$$

Така стигаме до схема, съставена само от два успоредно свързани кондензатора (фиг.48-5в). Техният еквивалентен капацитет е

$$C = 2 \mu\text{F} + 5 \mu\text{F} = 7 \mu\text{F}.$$

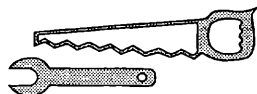
Следователно кондензаторната батерия от фиг.48-5а е еквивалентна на един кондензатор с капацитет $7 \mu\text{F}$.

Фиг.48-5.



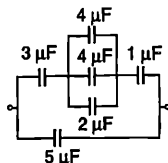
Задачи

1. Сферична капка живак има капацитет $0,05 \text{ pF}$. Ако осем такива капки се слеят в една капка, колко фарада ще е нейният капацитет?
2. Двата метални предмета от фиг.48-6 имат електричен заряд съответно 50 pC и -50 pC . Колко е капацитетът на тази система от два проводника (кондензатор), ако потенциалната разлика между проводниците е 25 V ?

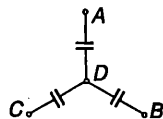


Фиг.48-6.

3. Как ще се измени капацитетът на плосък кондензатор, ако се увеличи 2 пъти: а) зарядът на кондензатора; б) разстоянието между електродите му; в) площта на електродите; г) напрежението на кондензатора?
4. Компютърен чип (RAM памет) съдържа голям брой кондензатори, всеки с капацитет $6 \cdot 10^{-14} \text{ F}$. Ако приемем, че това са плоски въздушни кондензатори с площ на всеки един от електродите $2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^2$, колко нанометра е разстоянието между електродите на такъв кондензатор?
5. Кутия съдържа еднакви кондензатори. Ако всички кондензатори се свържат успоредно, ще се получи кондензаторна батерия, чийто капацитет е 100 пъти по-голям от капацитета на батерията, получена при последователно свързване на същите кондензатори. Колко кондензатора има в кутията?
6. Определете капацитета на кондензаторната батерия от фиг.48-7.



Фиг.48-7.



Фиг.48-8.

7. Три еднакви кондензатора са свързани, както е показано на фиг.48-8. Потенциалите на точките A , B и C са съответно $\varphi_A = 100 \text{ V}$, $\varphi_B = 60 \text{ V}$ и $\varphi_C = 50 \text{ V}$. Определете потенциала φ_D на точка D .
8. Коаксиален кабел е направен от два цилиндрични проводника с радиуси R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$). Определете капацитета на единица дължина от кабела. Приемете, че проводниците се намират във вакуум.

49. Енергия на електрично-то поле

Потенциална енергия на система от точкови заряди

Както е известно от механиката (вж. част 1, §11), система от материални точки, които взаимодействат с консервативни сили, се характеризира с потенциална енергия. По определение тя е равна на работата, която извършват консервативните сили при отдалечаване без ускорение на материалните точки на безкрайно големи разстояния една от друга. Когато материалните точки са безкрайно отдалечени, приема се, че потенциалната енергия на системата е нула.

Тъй като кулоновите сили на взаимодействие между точкови заряди са консервативни, всяка система от такива заряди също се характеризира с потенциална енергия. Да разгледаме най-простия случай, когато системата е съставена само от два точкови заряда q_1 и q_2 , разположени на разстояние r_{12} един от друг. Зарядът q_1 създава електростатично поле, чийто потенциал в точката, където се на-

мира зарядът q_2 , е $\varphi_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$. По определение потенциалът на една точка е равен на работата на електричните сили за пренасяне на единица положителен заряд от тази точка до безкрайно отдалечена точка (ще казваме на безкрайност), където потенциалът е приет за равен на нула. Следователно работата за пренасяне на заряда q_2 на безкрайност е $A = q_2\varphi_2$, а потенциалната енергия на системата от два точкови заряда е

$$(49.1) \quad W = A = q_2\varphi_2 = \frac{q_1q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}.$$

Същият резултат ще получим, ако оставим заряда q_2 неподвижен и пресметнем работата на електростатичните сили при пренасяне без ускорение на заряда q_1 на безкрайност. Формула (49.1) отчита знака на зарядите: когато те са едноименни, потенциалната енергия е положителна,

докато системата от два разноименни заряда има отрицателна потенциална енергия. Действително, разноименните заряди се привличат, затова при раздалечаването им на безкрайност електричните сили извършват отрицателна работа и потенциалната енергия също е отрицателна.

Да разгледаме система от N точкови заряда $q_1, q_2, \dots, q_N$. Съгласно с принципа на суперпозицията взаимодействието на кои да е два заряда от системата не зависи от присъствието на останалите заряди и се определя от закона на Кулон. Следователно пълната енергия на системата е сума от членове, отразяващи взаимодействието на всички възможни двойки от заряди. Нека q_i и q_j са два произволни заряда от системата, разстоянието между които е r_{ij} (фиг.49-1). Потенциалната енергия на взаимодействие на тази двойка е

$\frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$. Потенциалната енергия на цялата система е

$$(49.2) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (i \neq j).$$

Множителят $1/2$ отчита, че потенциалната енергия на всяка двойка заряди при сумирането влиза два пъти: веднъж като

$\frac{q_iq_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$ и втори път като $\frac{q_jq_i}{4\pi\epsilon_0 r_{ji}}$. Уравнение (49.2) се записва и във вида

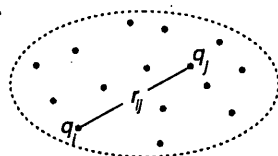
$$(49.3) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i\varphi_i,$$

където

$$(49.4) \quad \varphi_i = \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \quad (j \neq i)$$

е потенциалът на полето, създадено от всички заряди (с изключение на заряда q_i) в точката, в която е разположен зарядът q_i .

Фиг.49-1.



Потенциална енергия на система от заредени проводници

Да разгледаме отделен проводник със заряд q и потенциал φ . Разделяме мислено повърхността на проводника на много голям брой малки елементи със заряди $\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_N$, които образуват система от точкови заряди. За да определим потенциалната енергия на тази система, ще използваме уравнение (49.3), като отчетем, че повърхността на проводника е екипотенциална, т.е. всички заряди се намират в точки с еднакъв потенциал φ . Тогава

$$(49.5) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \Delta q_i \varphi = \frac{1}{2} q \varphi.$$

Доказва се, че потенциалната енергия на система от N проводника със заряди $q_1, q_2, \dots, q_N$ и потенциали $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$ е

$$(49.6) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \varphi_i.$$

Уравненията (49.3) и (49.6), изразяващи потенциалната енергия съответно на система от точкови заряди и на система от заредени проводници, са еднакви. Те обаче имат различно физично съдържание. Потенциалът φ_i в уравнение (49.6) е действителният потенциал на повърхността на i -тия проводник, докато в уравнение (49.3) φ_i е потенциалът на полето, което създават всички останали точкови заряди (без i -тия) в точката, в която е разположен i -тият заряд. Действителният потенциал в точка, където се намира точков заряд, е неопределена величина. (Ако изходим формално от уравнение (46.6) той би трябвало да е безкрайно голям.) Вътрешната структура и разпределението на заряда в частиците, които се приемат за точкови заряди, е въпрос, който излиза извън рамките на електростатиката.

Другото принципно важно различие се състои в това, че потенциалната енергия на система от заредени проводници винаги е положителна, докато система от точкови заряди може да има и отрицателна енергия (например система от два разноименни заряда). Това различие се дължи на факта, че потенциалната енергия на

система от проводници включва както енергията на взаимодействие между проводниците, така и собствената енергия на всеки отделен зареден проводник. Енергията на взаимодействие се дефинира чрез работата на електричните сили при отдалечаването на проводниците на безкрайност – тя може да бъде както положителна, така и отрицателна. Собствената енергия е равна на работата на електричните сили при пренасяне на зарядите от всеки отделно взет зареден проводник (в отсъствие на останалите) на безкрайност. Тъй като зарядите върху проводника са едноименни, те се отблъскват и тази работа е положителна – положителна е и собствената енергия. Доказва се (вж. пример 49.2), че собствената енергия винаги е по-голяма от енергията на взаимодействие. Затова пълната енергия на системата е положителна.

При точковите заряди потенциалната енергия се състои единствено от енергията на взаимодействие на зарядите. Електростатиката не отчита собствената енергия на отделния точков заряд. Такава величина изобщо не се дефинира, тъй като нейното въвеждане също изисква изясняване на вътрешната структура на обекта, наречен точков заряд.

Пример 49.1. Метална сфера с радиус R е заредена със заряд q . Определете електростатичната потенциална енергия на сферата.

Решение. Потенциалът на сферата е

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Съгласно с уравнение (49.5) потенциалната енергия на заредения сферичен проводник е

$$W = \frac{1}{2} q \varphi = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 R}.$$

Енергия на зареден кондензатор

Нека два проводника образуват кондензатор, който е зареден със заряд q . Потенциалът на проводника с положителен заряд ще означим с φ_1 , а на проводника с отрицателен заряд – с φ_2 . Енергията на системата от два заредени проводника се

изразява с уравнение (49.6):

$$(49.7) \quad W = \frac{1}{2} (q\varphi_1 + (-q)\varphi_2) = \frac{1}{2} qU,$$

където $U = \varphi_1 - \varphi_2$ е напрежението на кондензатора. С помощта на съотношението $q = CU$, което дава връзката между напрежението и заряда на кондензатора (C е капацитетът), формула (49.7) може да се запише във вида

$$(49.8) \quad W = \frac{q^2}{2C} \quad \text{или} \quad W = \frac{CU^2}{2}.$$

Ще обърнем внимание, че получените формули за енергията на зареден кондензатор са в сила за всички кондензатори – плоски, сферични, цилиндрични, както и за кондензаторите, чиито електроди имат произволна форма.

Енергия на електричното поле

Дотук, по аналогия с механиката, разглеждахме енергията на система от неподвижни електрични заряди като потенциална енергия на частици, взаимодействащи от разстояние с консервативни сили. При такъв подход потенциалната енергия характеризира системата като цяло и въпросът, къде е локализирана тази енергия – върху самите заредени тела или в пространството между тях, няма смисъл. Алтернативният подход се основава на теорията на полето. Според него електричната енергия е разпределена в пространството, заето от полето, т.е. това е *енергия на полето*. В рамките на електростатиката принципно е невъзможно да се извърши опит, който да даде предимство на единия от тези два подхода. Причината е в това, че не е възможно да се отделят неподвижните заряди от полетата, които те създават. Големината и разпределението на зарядите еднозначно определя полето и обратно, ако се знае полето във всички точки на пространството, също така еднозначно може да се определят големините и разпределението на зарядите. Затова можем да говорим както за потенциална енергия на взаимодействие на заряди от разстояние, така и за енергия на електричното поле.

Ситуацията принципно се изменя, когато полетата са променливи. Както ще

видим в §86, движещите се с ускорение електрични заряди излъчват електромагнитни вълни. Промениливото електромагнитно поле на вълната съществува независимо от зарядите, които са го създали, и се разпространява в пространството, пренасяйки енергия и импулс. Съществуването на електромагнитни вълни доказва, че електричната енергия, както и магнитната енергия, са локализирани в пространството – това е енергия на електромагнитното поле. Тъй като електростатиката е частен случай на електродинамиката, дори и в нея трябва да се даде предимство на теорията на полето и да се приеме, че електростатичната енергия е енергия на електростатичното поле, което от своя страна е частен случай на електромагнитното поле.

Ще изразим плътността на енергията на електричното поле във вакуум, т.е. енергията в единица обем от пространството, заето от полето, чрез интензитета E на полето. За целта разглеждаме частния случай на еднородно поле на зареден плосък кондензатор. Заместваме във формулата за енергията на кондензатора, $W = CU^2/2$, капацитета $C = \epsilon_0 S/d$ на кондензатора (S – площ на всеки от електродите на кондензатора, d – разстояние между електродите) и изразяваме напрежението U на кондензатора чрез интензитета E на полето: $U = Ed$. След елементарни преобразования получаваме

$$(49.9) \quad W = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} (Sd) = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} V,$$

където $V = Sd$ е обемът между електродите, т.е. обемът, зает от еднородното поле на кондензатора. Плътността на енергията е

$$(49.10) \quad w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Доказва се, че получената формула е в сила за всяко електрично поле: *плътността на енергията w на електричното поле във вакуум е пропорционална на квадрата на интензитета E на полето и на електричната константа ϵ_0 .*

Ако е известен интензитетът E на полето във всяка точка от пространството, може да се определи плътността на енергията му и чрез интегриране да се прес-

метне пълната енергия W на полето:

$$(49.11) \quad W = \int_V w dV = \int_V \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV,$$

където интегрирането се извършва по обема V , зает от полето.

Пример 49.2. Докажете, че собствената енергия на система от два заредени проводника винаги е по-голяма от енергията на взаимодействие на проводниците.

Решение. Нека в произволна точка P от пространството първият проводник създава електрично поле с интензитет E_1 , а вторият проводник – поле с интензитет E_2 . Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на полето в точка P е $E = E_1 + E_2$. Вдигаме на квадрат двете страни на това равенство:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 \cdot E_2.$$

Плътноста на енергията на полето в точка P е

$$w = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} + \frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} + \epsilon_0 E_1 \cdot E_2 = w_1 + w_2 + w_{12},$$

където $w_1 = \epsilon_0 E_1^2/2$ и $w_2 = \epsilon_0 E_2^2/2$ са плътности на собствената енергия на полетата съответно на първия и на втория проводник, а членът $w_{12} = \epsilon_0 E_1 \cdot E_2$ е плътността на енергията на взаимодействие. От очевидното неравенство $(E_1 - E_2)^2 \geq 0$ следва, че $E_1^2 + E_2^2 \geq 2E_1 \cdot E_2$, т.е. сумата от плътностите на собствените енергии на двата проводника в точка P е по-голяма от плътността на енергията на взаимодействие. Тъй като точка P е избрана произволно, този резултат е в сила за всички точки от полето. След като във всички точки от пространството е в сила неравенството $w_1 + w_2 \geq w_{12}$, тогава след интегриране по цялото пространство получаваме

$$\int w_1 dV + \int w_2 dV \geq \int w_{12} dV,$$

където двата интеграла от лявата страна на неравенството изразяват собствената енергия на двата заредени проводника, а интегралът от дясната страна – енергията на взаимодействие. Полученото неравенство показва, че собствената енергия винаги е по-голяма от енергията на взаимодействие. Знакът за равенство се отнася за частния случай, когато резултантното поле във всички точки от пространството е нула. На практика това е възможно само ако проводниците не са заредени.

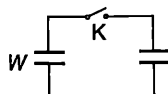
Задачи

1. Енергията, запасена в кондензатор, е нараснала 4 пъти. Как са се изменили: а) напрежението на кондензатора; б) зарядът на кондензатора?

2. Мощен лазер използва кондензатор с капацитет $C = 30 \text{ mF}$, който е зареден до напрежение $U = 6 \text{ kV}$. Пресметнете енергията на кондензатора: а) в джаули; б) в киловатчаса.

3. Кондензаторна батерия е съставена от два кондензатора с капацитети $4 \text{ }\mu\text{F}$ и $2 \text{ }\mu\text{F}$, които са свързани последователно. На батерията е подадено напрежение 50 V . Пресметнете запасената в нея електрична енергия.

4. Двата кондензатора от фиг.49-2 са еднакви. Единият е зареден с енергия $W = 2 \text{ mJ}$, а другият не е зареден. Определете общата енергия на двата кондензатора след затварянето на ключа K . Обяснете резултата.



Фиг.49-2.

5. Протонът е изграден от два u -кварка, всеки от които е носител на електричен заряд $+2e/3$, и един d -кварк със заряд $-e/3$. Като приемете трите кварка за точкови заряди, разположени във върховете на равностранен триъгълник със страна $a = 1,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$, пресметнете електричната потенциална енергия на: а) подсистемата от два u -кварка; б) системата от три кварка.

6. Колко джаула електростатична енергия се съдържа в стая с обем 30 m^3 ? Интензитетът на електричното поле на Земята е 130 V/m .

7. Метално кълбо с радиус $R = 25 \text{ cm}$ е заредено до потенциал $\varphi = 600 \text{ V}$. Колко джаула количество топлина ще се отдели при заземяването на кълбото?

8. Проводяща сферична сапунена ципа е заредена със заряд q . Пресметнете работата на електричните сили при увеличаване на радиуса на ципата от R до $2R$.

9. Два отдалечени сферични проводника с радиуси R_1 и R_2 са заредени до потенциали φ_1 и φ_2 . След това съединяват сферите с тънък проводник (с пренебрежимо малък капацитет). Определете изменението на енергията на системата. Обяснете резултата.

10. Електрична система е съставена от две концентрични тънки метални сфери с радиуси R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) и заряди съответно q_1 и q_2 . Определете собствената енергия W_1 и W_2 на всяка от сферите, енергията на взаимодействие на сферите W_{12} и пълната енергия W на системата.

50. Електричен дипол

Поле на електричен дипол

На *фиг.50-1* са показани два равни по големина и противоположни по знак електрични заряда q и $-q$, разположени на фиксирано разстояние ℓ един от друг. За нагледност можем да приемем, че зарядите са закрепени на краищата на непроводяща пръчка. Потенциалът на електричното поле, което двата заряда създават в произволна точка A , е (*фиг.50-1*)

$$(50.1) \quad \varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} = \frac{q(r_1 - r_2)}{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}.$$

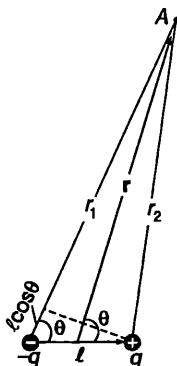
Когато разстоянието ℓ между зарядите е много по-малко от разстоянията r_1 и r_2 до точката, в която се изследва полето, разглежданата система от два заряда се нарича *електричен дипол*. В този случай с приближение можем да положим

$$r_1 r_2 = r^2 \quad \text{и} \quad r_1 - r_2 = \ell \cos \theta,$$

където r е модулът на радиус-вектора, прекаран от дипола към точката на наблюдение A , а θ е ъгълът между вектора ℓ (с начало в отрицателния заряд и край в положителния заряд) и радиус-вектора r . Тъй като разстоянието ℓ е много малко, не е съществено от коя точка на дипола е прекаран радиус-векторът r . Той може да започва например от положителния заряд, от отрицателния заряд или от средата на отсечката ℓ (*фиг.50-1*). Във всички случаи ъгълът между векторите ℓ и r приблизително един и същ (равен на θ). След заместване на $r_1 r_2$ и $r_1 - r_2$, за потенциала се получава

$$(50.2) \quad \varphi = \frac{q\ell \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Формула (50.2) показва, че при отдалечаване от дипола потенциалът на електричното му поле намалява много бързо – обратнопропорционално на квадрата на разстоянието r до дипола, докато потенциалът



Фиг.50-1.

на полето на отделен точков заряд се изменя по-бавно ($\propto 1/r$).

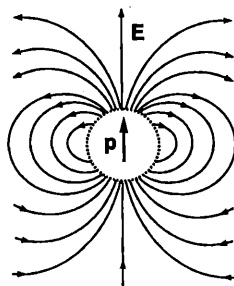
Електричният дипол се характеризира с векторната величина

$$(50.3) \quad \mathbf{p} = q\ell,$$

наречена *електричен диполен момент*.

Като отчетем, че $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = q\ell r \cos \theta$, изразяваме потенциала (50.2) чрез диполния момент $\mathbf{p}$:

$$(50.4) \quad \varphi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$



Фиг.50-2.

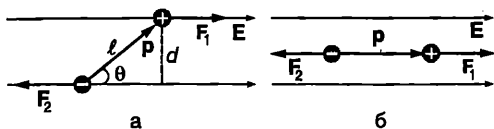
На *фиг.50-2* са показани силовите линии на полето на електричен дипол. Доказва се, че интензитетът E на полето намалява обратнопропорционално на третата степен на разстоянието r до дипола ($E \propto 1/r^3$) и се изразява с формулата

$$(50.5) \quad \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3} \right).$$

Ще обърнем внимание, че потенциалът и интензитетът на полето на електричен дипол се изразяват съответно с формули (50.4) и (50.5) само в т.нар. далечна област, т.е. на разстояния, които са много по-големи от разстоянието ℓ между двата заряда. Близката област, в която тези формули не са в сила, на *фиг. 50-2* за нагледност е оградена с пунктир.

Електричен дипол във външно електрично поле

Електричен дипол с диполен момент $\mathbf{p}$ е поставен в еднородно електрично поле с интензитет $\mathbf{E}$. На двата заряда от дипола действат равни по големина и противоположни по посока сили $\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = q\mathbf{E}$, които образуват двойка сили, стремяща се да



Фиг.50-3.

завърти дипола (фиг.50-3а). Въртящият момент на двойката сили е

$$M = Fd = qE\ell\sin\theta = pE\sin\theta,$$

където $d = \ell\sin\theta$ е разстоянието между линиите на действие на двете сили (вж. част 1, стр. 92). Уравнението за въртящия момент се записва във векторен вид

$$(50.6) \quad \mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}.$$

Двойката сили завърта дипола и го ориентира така, че посоката на вектора на диполя му момент $\mathbf{p}$ да съвпадне с посоката на интензитета $\mathbf{E}$ на полето (фиг.50-3б).

Ще пресметнем потенциалната енергия на дипола, когато е поставен в еднородно електрично поле. Да означим с φ_1 и φ_2 потенциалите на точките, в които се намират зарядите $-q$ и q на дипола (фиг.50-4). Потенциалната енергия на дипола е равна на сумата от потенциалните енергии на двата заряда:

$$W = -q\varphi_1 + q\varphi_2 = q(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Изразяваме потенциалната разлика $\varphi_2 - \varphi_1$ чрез интензитета E на полето и разстоянието d между екипотенциалните повърхности с потенциали φ_1 и φ_2 (на опростената двумерна схема от фиг.50-4 d е разстоянието между двете успоредни линии, представени с пунктир):

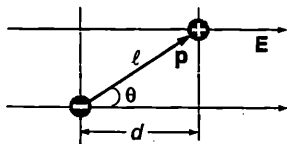
$$\varphi_2 - \varphi_1 = -Ed = -E\ell\cos\theta.$$

След заместване във формулата за енергията W на дипола се получава

$$(50.7) \quad W = -Eq\ell\cos\theta = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E},$$

т.е. потенциалната енергия на дипола е равна на взетото с обратен знак скалярно произведение на електричния диполен момент $\mathbf{p}$ и интензитета $\mathbf{E}$ на електрично-

Фиг.50-4.



то поле. От формула (50.7) следва, че потенциалната енергия на дипола е минимална, $W_{\min} = -pE < 0$, когато той е ориентиран по посока на полето (фиг.50-3б).

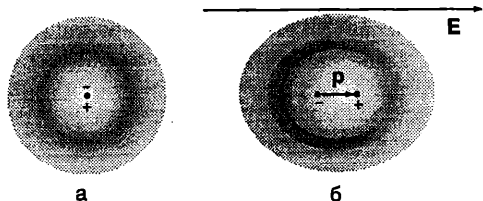
Енергията на дипола е максимална, $W_{\max} = pE > 0$, когато посоките на векторите $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$ са противоположни. Електричните сили на полето се стремят да завъртят дипола и да го ориентират по посока на полето, т.е. да го приведат в състояние с минимална потенциална енергия.

Уравнение (50.7) остава в сила и в случая, когато външното електрично поле не е еднородно. Тъй като разстоянието ℓ между двата заряда на дипола е много малко, изменението на полето на разстояние ℓ може да не се отчита.

Поляризуемост на атомите

Съгласно с квантовата механика електронът в атома на водорода може да се намира с определена вероятност на различни разстояния от ядрото. Затова традиционният за класическата механика въпрос, в коя точно точка от пространството се намира електронът в даден момент, в квантовата механика губи смисъл. Вместо като точков заряд, електронът може да се разглежда като „размазан“ в пространството около ядрото заряд, който се характеризира с обемна плътност ρ . Плътността на заряда ρ е пропорционална на вероятността електронът да се намира в дадената област (точка) от пространството. Електричното поле, което създава обгръщащият ядрото „облак“ от отрицателен заряд (електронен облак) на разстояния, много по-големи от размерите на атома, е еквивалентно на полето, създадено от отрицателен точков заряд с големина, равна на големината на заряда на целия електронен „облак“. Точката, в която трябва да се постави този заряд, се нарича *ефективен център на отрицателния заряд*. Тъй като размерите на ядрото са много по-малки от размерите на атома, ядрото може да се разглежда като точка, която е ефективен център на положителния заряд на атома.

Установено е, че когато атомът на водорода се намира в основно състояние, разпределението на електронната плът-



Фиг.50-5.

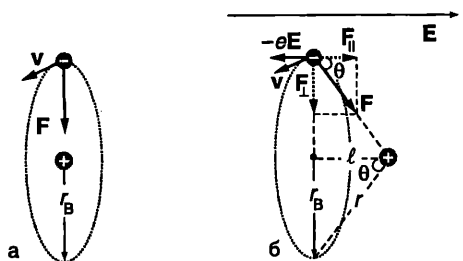
ност е сферически симетрично, т.е. ρ зависи единствено от разстоянието r до ядрото. В този случай ефективният център на отрицателния заряд е разположен в центъра на атома, т.е. съвпада с ефективния център на положителния заряд.

Аналогични разглеждания могат да се направят и за другите атоми. Когато ефективният център на отрицателния заряд в един атом съвпада с ефективния център на положителния заряд, атомът няма електричен диполен момент (фиг.50-5а). Ако такъв атом се постави във външно електрично поле обаче, електричните сили на полето го деформират: електронният „облак“ и ядрото се изместват в противоположни посоки (фиг.50-5б). Ефективните центрове на положителните и на отрицателните заряди вече не съвпадат и атомът се *поляризира*, т.е. получава *индуциран диполен момент* $\mathbf{p}$. В относително слаби електрични полета индуцираният диполен момент $\mathbf{p}$ е пропорционален на интензитета $\mathbf{E}$ на полето:

$$(50.8) \quad \mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}.$$

Коефициентът на пропорционалност α е характерна константа за дадения вид атоми, наречена *поляризуемост* на атома. За да определим поляризуемостта α на водородния атом, ще използваме следния най-прост класически модел. Ще приемем (фиг.50-6а), че атомното ядро (про-

Фиг.50-6.



тонът) е неподвижен, а електронът под действие на кулоновата сила на привли-

чане $F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_B^2}$ обикаля около протона

по кръгова орбита с радиус $r_B = 0,053 \text{ nm}$ (радиус на Бор). В този случай центърът на окръжността е едновременно ефективен център на положителните и на отрицателните заряди, поради което диполният момент на атома е нула.

В електрично поле орбитата на електрона се измества. На фиг.50-6б е показан случаят, когато интензитетът $\mathbf{E}$ на външното поле е перпендикулярен на равнината на орбитата. Под действие на електричните сили електронът и протонът се отместват в противоположни посоки: центърът на орбитата на електрона, т.е. ефективният център на отрицателния заряд, се оказва на разстояние ℓ от протона. В резултат на това отместване атомът получава диполен момент $\mathbf{p} = e\ell$. Големината на индуцирания диполен момент се определя от условието външната сила $-e\mathbf{E}$, която действа на електрона, да се уравни с компонента на кулоновата сила (фиг.50-6б):

$$F_{\parallel} = F \cos \theta = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\ell}{r} = eE.$$

В относително слаби полета, когато силата eE е много по-малка от кулоновата сила F на привличане на електрона към ядрото, радиусът r_B на орбитата практически не се изменя, а отместването ℓ е много по-малко от r_B . Тогава $r \approx r_B$ и след заместване на ℓ от горното равенство получаваме

$$(50.9) \quad p = e\ell = 4\pi\epsilon_0 r_B^3 E = \alpha E,$$

където

$$(50.10) \quad \alpha = 4\pi\epsilon_0 r_B^3 = 0,17 \cdot 10^{-40} \text{ F} \cdot \text{m}^2$$

е поляризуемостта на водородния атом. Точните пресмятания на поляризуемостта α на водородния атом, основаващи се на квантовата механика, дават резултат, който се различава от формула (50.10) само с числен множител $9/2$.

Поляризуемостта на атомите може да се определи експериментално. Стойнос-

тите на поляризуемостта α за някои атоми са представени в табл. 50.1.

Таблица 50.1. Поляризуемост α на някои атоми в единици $\times 10^{-40} \text{ F}\cdot\text{m}^2$.

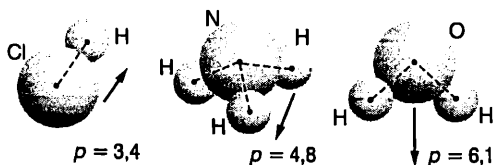
Елемент	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
α	0,73	0,23	13	10	1,7	0,44	30	1,8	38

От таблицата се вижда, че алкалните метали литий, натрий и калий имат голяма поляризуемост α , която нараства с атомния номер на елемента. В най-външната си електронна обвивка те имат само един валентен електрон, който е слабо свързан с атома. На този електрон се дължи лесното „деформиране“ и поляризиране на атомите на алкалните метали във външно поле. За инертните газове хелий, неон и аргон са характерни значително по-малки стойности на α . Външната електронна обвивка на атомите на инертните газове е изцяло запълнена и електронната им структура е „по-твърда“ – сравнително слабо се „деформира“ под действие на външно електрично поле.

Полярни и неполярни молекули

Някои молекули имат електричен диполен момент дори в отсъствие на външно електрично поле. Това са несиметрични молекули, в които ефективните центрове на положителните и на отрицателните заряди не съвпадат. Молекулите със собствен диполен момент се наричат *полярни молекули*. На *фиг.50-7* са показани три типични полярни молекули – на хлороводорода, на амоняка и на водата. Дадена е също посоката и големината на техните диполни моменти. Водната молекула например е полярна, защото двата атома на водорода са разположени несиметрично спрямо кислородния атом: осите O–H сключват

Фиг.50-7. Полярни молекули (HCl , NH_3 и H_2O). Стойностите на електричния диполен момент на молекулите са в единици $\times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$.



помежду си ъгъл около 105° . На големия собствен електричен диполен момент на молекулите се дължи свойството на водата да е добър разтворител. Той оказва съществено влияние и на химичните реакции във водните разтвори.

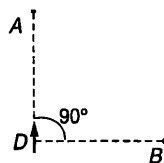
Симетричните молекули нямат собствен диполен момент, тъй като при тях ефективните центрове на положителните и отрицателните заряди съвпадат. Например, за разлика от водата, двата атома на кислорода в молекулата на въглеродния диоксид (CO_2) са разположени симетрично от двете страни на атома на въглерода и молекулата е неполярна. Други примери за неполярни молекули са O_2 , CH_4 и BF_3 .

Задачи

1. Точките *A* и *B* от *фиг.50-8* се намират на еднакво разстояние от електричния дипол *D*.

а) Определете посоката на интензитета на електричното поле на дипола в тези две точки.

б) В точка *A* електричното поле на дипола има интензитет $E_A = 2 \cdot 10^{-5} \text{ V/m}$. Определете интензитета на полето в точка *B*.



Фиг.50-8.

Указание. Използвайте уравнение (50.5).

2. Молекулата на водата има собствен диполен момент $p = 6,1 \cdot 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m}$. Проба, в която се съдържа 1 mol вода, е поставена в еднородно електрично поле с интензитет $E = 3 \cdot 10^5 \text{ V/m}$. Приемете, че диполните моменти на всички водни молекули са ориентирани по посока на електричното поле. Колко джаула работа трябва да се извърши, за да се завъртят всички молекули, така че диполните им моменти да са насочени перпендикулярно на електричното поле?

3. Електричен дипол с диполен момент p се намира в еднородно електрично поле с интензитет E_0 . Диполът е ориентиран по посока на полето. Докажете, че една от екипотенциалните повърхности е сфера, в центъра на която се намира диполът, и определете нейния радиус r .

Указание. Използвайте принципа на суперпозицията. Приемете, че в точката, в която се намира диполът, потенциалът на еднородното поле е нула. В този случай потенциалът и интензитетът на еднородното поле са свързани със съотношението $\phi_0 = -E_0 \cdot r$. Използвайте и уравнение (50.4).

51. Диелектрици

Проводници и диелектрици

В зависимост от това, дали електростатичните полета проникват или не проникват в обема на веществото, Фарадей разделя веществата на две групи: *проводници* и *диелектрици*. Проводниците напълно екранират електростатичните полета, което се дължи на големия брой свободни електрични заряди. Свободните заряди се разпределят така, че вътре в проводника тяхното електрично поле изцяло компенсира външното поле. Средите, в които проникват електростатичните полета, Фарадей нарича диелектрици (от лат. *dia* – през и англ. *electric* – електричен). За разлика от проводниците, в диелектриците практически няма свободни електрични заряди, тъй като всички електрони са свързани в атомите и молекулите. Затова външните електрични полета предизвикват само поляризация на атомите (молекулите) на диелектрика и ориентират атомните диполни моменти по посока на полето.

Диелектрична проникваемост

Фарадей установява експериментално, че когато пространството между електродите на кондензатор с капацитет C_0 се запълни с еднороден диелектрик, капацитетът на кондензатора нараства ϵ пъти:

$$(51.1) \quad C = \epsilon C_0.$$

Безразмерната константата ϵ характеризира даденото вещество и се нарича *диелектрична проникваемост* (или относителна диелектрична проникваемост). Стойностите на диелектричната проникваемост ϵ за някои диелектрици са дадени в табл. 51.1.

Таблица 51.1. Диелектрична проникваемост ϵ на някои вещества при температура 20°C.

Вещество	ϵ	Вещество	ϵ
Въздух	1,00057	NaCl	5,26
CO ₂	1,00099	Бензол	2,322
Слюда	6	Si	12,0
Етилов спирт	26,8	Полиетилен	2,3
Вода	81	Сегнетова сол	6000

Да разгледаме зареден плосък кондензатор. Зарядът q , напрежението U_0 и капацитетът C_0 на кондензатора са свързани със съотношението (48.3): $q = C_0 U_0$. Ако цялото пространство между електродите се запълни с диелектрик, съгласно с уравнение (51.1) капацитетът на кондензатора нараства ϵ пъти. Тъй като при това зарядът q не се променя, от равенството $q = C_0 U_0$ следва, че напрежението на кондензатора намалява ϵ пъти: $U = U_0/\epsilon$. Електричното поле в плосък кондензатор е еднородно. Интензитетът му преди внасянето на диелектрика е $E_0 = U_0/d$, където d е разстоянието между електродите. След внасяне на диелектрика интензитетът на полето става

$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0}{\epsilon d} = \frac{E_0}{\epsilon},$$

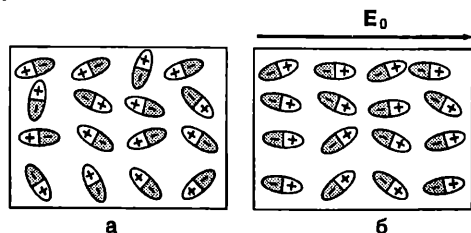
т.е. намалява ϵ пъти. Следователно при внасяне на диелектрик във външно електростатично поле с интензитет E_0 (в разглеждания случай това е полето на заредения кондензатор) полето вътре в диелектрика е по-слабо от външното. Отношението на интензитета E_0 на външното поле към интензитета E на полето в диелектрика е равно на диелектричната проникваемост ϵ на веществото:

$$(51.2) \quad \epsilon = \frac{E_0}{E}.$$

Поляризация на диелектриците

Да разгледаме диелектрик с полярни молекули. Поради топлинното движение диполните моменти на отделните молекули са насочени напълно хаотично (фиг.51-1а). Затова, ако мислено отделим малък макроскопичен обем от диелектрика, неговият диполен момент (векторната сума от ди-

Фиг.51-1.



полните моменти на молекулите, съдържащи се в този обем) е нула. Във външно електрично поле с интензитет E_0 на всеки дипол е приложен въртящ момент, който се стреми да го ориентира по-посока на полето. На ориентиращото действие на електричното поле се противопоставя хаотичното топлинно движение, водещо до „разбъркване“ на диполите. В резултат на едновременното действие на двата конкуриращи се фактора молекулните диполи се ориентират само частично (преимуществено) по посока на полето (фиг.51-16). Явлението се нарича *ориентационна поляризация* на диелектрика и се характеризира с *вектора на поляризация* P . По определение векторът на поляризация P е равен на векторната сума от диполните моменти на всички молекули, съдържащи се в единица обем от диелектрика.

Разглеждаме малък обем ΔV от диелектрика, в който се съдържат N молекули. Диполните моменти p_i на отделните молекули имат еднаква големина, но посоките им са различни (фиг.51-16). Векторът на поляризация е

$$(51.3) \quad P = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^N p_i = n p_{cp},$$

където $n = N/\Delta V$ е концентрацията на мо-

лекулите, а $p_{cp} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p_i$ е средната стойност на диполния момент на молекулите от обема ΔV . Доказва се (теоретично и експериментално), че в слаби електрични полета, когато големината на интензитета E на макроскопичното поле в диелектрика удовлетворява условието $E \ll kT/p$ (T – абсолютна температура, k – константа на Болцман, p – диполен момент на полярните молекули), векторът p_{cp} се изразява с формулата

$$(51.4) \quad p_{cp} = \frac{p^2}{3kT} E.$$

След заместване на p_{cp} в уравнение (51.3) за вектора на поляризация се получава

$$(51.5) \quad P = \frac{np^2}{3kT} E.$$

От уравнение (51.5) следва, че векторът на поляризация P е насочен по посока на интензитета E на макроскопичното поле в диелектрика, а големината му е право пропорционална на големината на E . Хаотичното топлинно движение на молекулите препяства ориентирането на диполните им моменти по посока на полето. Затова P намалява при повишаване на температурата T .

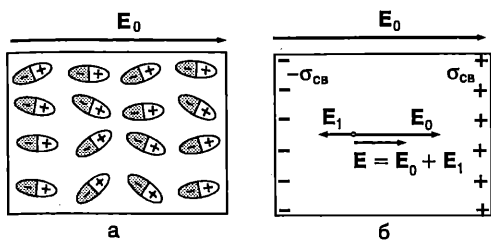
Диелектриците с неполярни молекули също се поляризират. Под действие на електричното поле всяка молекула получава индуциран диполен момент $p = \alpha E$ (α е поляризуемостта на молекулата), който е насочен по посока на полето. Векторът на поляризация на диелектрик с неполярни молекули е

$$(51.6) \quad P = n p = n \alpha E,$$

където n е концентрацията на молекулите. Такава поляризация се нарича *електронна поляризация*, защото е свързана с деформирането на електронните обвивки на атомите под действие на електричното поле.

Свързани заряди

Когато диелектрик се постави в електрично поле той се поляризира и върху срещуположните му повърхности възникват некомпенсирани електрични заряди. За разлика от явлението електростатична индукция при проводниците, индуцираните заряди върху повърхността на диелектриците не са свободни. Те са част от заряда на поляризирани молекули, поради което се наричат *свързани заряди*. Възникването на свързани заряди се илюстрира от фиг. 51-2а. Пластика от диелектрик е поставена в еднородно електрично поле с интензитет E_0 . Молекулните диполи са ориентирани в направление на външното електрично поле. Електричният заряд във всяка макроскопична област от обема на диелектрика е нула. Некомпенсиран електричен заряд има единствено на повърхността на диелектрика: лявата повърхност на пластинката се зарежда с отрицателен заряд с повърхнинна плътност $-\sigma_{cb}$, а дясната – с положителен заряд с повърхнинна плътност σ_{cb} . Свързаните заряди са разпределени равномерно по двете повърхности на пластинката и създават елек-



Фиг.51-2.

трично поле, което с приближение може да се разглежда като поле на две равномерно заредени успоредни безкрайни равнини (вж. пример 48.2 на стр. 28). Извън пластинката полето на свързаните заряди е нула, а вътре в нея има интензитет $E_1 = \sigma_{cb}/\epsilon_0$. Векторите $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_0$ са с противоположни посоки (фиг.52-26): полето на свързаните заряди частично компенсира външното поле. Затова интензитетът на макроскопичното поле в диелектрика е помалък от интензитета на външното поле. Съгласно с принципа на суперпозицията

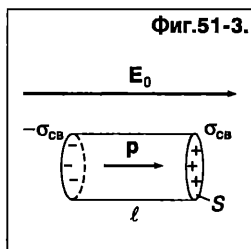
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 \text{ или } E = E_0 - E_1 = E_0 - \sigma_{cb}/\epsilon_0.$$

Заместваме в горното равенство $E_0 = E/\epsilon$ (вж. уравнение (51.2)) и получаваме връзката между интензитета E на макроскопичното поле в диелектрика и повърхнинната плътност на свързаните заряди σ_{cb} :

$$(51.7) \quad \sigma_{cb} = \epsilon_0(\epsilon - 1)E.$$

Връзка между диелектричната проникваемост и атомната поляризуемост

Ще разгледаме най-простия за анализ случай: разреден инертен газ е поставен в електрично поле. Отделяме мислено от газа малък цилиндричен обем ΔV с основа S и височина ℓ (фиг.51-3). Всеки атом се намира в електрично поле с интензитет E и има индуциран диполен момент $p = \alpha E$, насочен по посока на полето. Общият диполен момент на газа от обема ΔV е $Np = N\alpha E$, където N е броят на атомите. От друга страна, диполният момент на цилиндъра може да се изрази чрез повърхнин-



Фиг.51-3.

ната плътност σ_{cb} на индуцираните върху двете му основни свързани заряди. Те са равни по големина и противоположни по знак, поради което могат да се разглеждат като електричен дипол с диполен момент $(\sigma_{cb}S)\ell$. Следователно

$$N\alpha E = (\sigma_{cb}S)\ell,$$

откъдето изразяваме повърхнинната плътност на свързаните заряди

$$(51.8) \quad \sigma_{cb} = \frac{N}{S\ell} \alpha E = n\alpha E,$$

където $n = \frac{N}{S\ell} = \frac{N}{\Delta V}$ е концентрацията на атомите. Приравняваме десните страни на уравнения (51.7) и (51.8) и изразяваме атомната поляризуемост α чрез диелектричната проникваемост ϵ :

$$(51.9) \quad \alpha = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{n}.$$

Диелектричната проникваемост ϵ е макроскопична величина, която се определя експериментално. От получените стойности на ϵ (при известна концентрация n на газа) може да се пресметне поляризуемостта α на атомите.

Когато концентрацията на газа е голяма, трябва да се отчита дипол-диполното взаимодействие между атомите. Тогава за атомната поляризуемост се получава следното съотношение:

$$(51.10) \quad \alpha = \frac{\epsilon_0(\epsilon - 1)}{n} \frac{3}{\epsilon + 2},$$

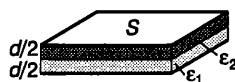
известно като *формула на Каузиус-Мосоти*.

Задачи

1. Плосък кондензатор без диелектрик има капацитет C_0 . Между електродите на кондензатора се вкарват две диелектрични пластинки с диелектрични проникваемости ϵ_1 и ϵ_2 (фиг.51-4). Определете капацитета на кондензатора с диелектрик.

Указание. Системата е еквивалентна на два последователно свързани кондензатора.

Фиг.51-4.



Електричен ток



Алесандро Волта демонстрира една от първите електрически батерии на император Наполеон

В тази глава ще се спрем на основните закономерности на постоянния електричен ток. Ще прилагаме закона на Ом и правилата на Кирхоф за определяне токовете и напреженията в прости и в разклонени електрически вериги. Като пример за квазистационарни токове ще разгледаме процесите на зареждане и разреждане на кондензатор. Особено внимание ще отделим на механизмите на протичане на електричен ток в метали, свръхпроводници и полупроводници. При анализа на тези механизми ще използваме както класическия модел на електронния газ в металите, така и понятия от зонната теория на твърдото тяло. Ще дадем многобройни примери за важни практически приложения на електричния ток.

52. Закон на Ом

Електричен ток

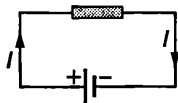
Електричен ток се нарича насоченото движение на електрични заряди. Токът в металите е насочено движение на електрони, тъй като само валентните електрони на метала могат свободно да се преместват под действие на електрични полета, докато положителните йони не напускат възлите на кристалната решетка. Свободни токови носители в електролитите са положителните и отрицателните йони, а в газовете могат да съществуват както подвижни електрони, така и йони. Снопостите от електрони, протони или йони, които се получават в ускорителите на заредени частици, също са примери за електричен ток. Скоростта на насочено движение на зарядите при протичане на електричен ток се нарича *дрейфова скорост*.

За посока на тока се приема посоката, в която се движат положителните заряди. Когато токът се обуславя от движението на отрицателни заряди неговата посока е противоположна на посоката на движение на зарядите. Например токът в електрическата верига от фиг.52-1 тече от положителния към отрицателния полюс на източника, докато свободните електрони в металния проводник, свързващ двата полюса, се движат в противоположната посока – от отрицателния към положителния полюс на източника.

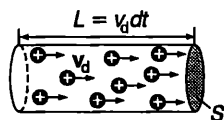
Нека в средата, където се извършва движение на електрични заряди (метал, газ и т.н.) отделим мислено повърхност с площ S . Да означим с dq електричния заряд, който преминава през повърхността за време dt . Електричният ток през повърхността S се дефинира с равенството

$$(52.1) \quad I = \frac{dq}{dt}$$

Фиг.52-1.



Фиг.52-2.



Електричният ток е равен на заряда, който преминава през повърхността S за единица време. Измерва се в *ампери* (А). Токът е 1А, ако за 1s през повърхността на преминава заряд 1С:

$$1\text{А} = 1\text{С/с.}$$

Плътност на тока

По аналогия с хидродинамиката (вж. част I, §25) насоченото движение на електричните заряди може да се онагледя с токови линии и токови тръби. Ще разгледаме най-простия случай, когато в проводящата среда има само един вид подвижни заредени частици, всяка със заряд q_0 ($q_0 > 0$). Ще смятаме, че концентрацията n на заредените частици е постоянна и всички свободни заряди се движат праволинейно и равномерно с еднаква дрейфова скорост v_d . В този случай токовите линии са прави линии. На фиг.52-2 е показана цилиндрична токова тръба с напречно сечение S . При движението си електричните заряди не пресичат повърхността на токовата тръба (като пример за токова тръба може да служи повърхността на цилиндричен проводник, по който тече ток). За време dt през дадено напречно сечение S на токовата тръба преминават всички свободни заряди, които се намират на разстояние $L \leq v_d dt$ от него. Техният брой е $N = n(v_d dt S)$. Пренесеният през напречното сечение на тръбата заряд е

$$dq = q_0 N = q_0 n v_d S dt.$$

Токът през напречното сечение на токовата тръба е

$$(52.2) \quad I = \frac{dq}{dt} = n q_0 v_d S.$$

Зарядът, който преминава за единица време през единица площ от напречното сечение на токовата тръба, се нарича *плътност на тока* j :

$$(52.3) \quad j = \frac{dq}{dt S} = \frac{I}{S} = n q_0 v_d.$$

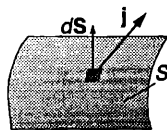
Полученият резултат се обобщава и всяка точка от средата, в която тече ток, се характеризира с векторната величина плътност на тока

$$(52.4) \quad \mathbf{j} = n q_0 \mathbf{v}_d.$$

Посоката на вектора $\mathbf{j}$ съвпада с посоката на дрейфовата скорост $\mathbf{v}_d$ на положителните заряди. Ако е известна плътността на тока във всяка точка от средата (в общия случай в различните точки векторът $\mathbf{j}$ има различна големина и посока), може да се пресметне токът през произволна повърхност S . За целта повърхността S мислено се разделя на безкраен брой малки елементи dS . Тъй като елементът dS е безкрайно малък, плътността на тока във всяка негова точка е постоянна. По аналогичен начин, както при пресмятането на потока на интензитета на електричното поле (вж. §45), за тока през елемента dS (фиг.52-3) получаваме

$$dI = \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Токът през повърхността S е сума (интеграл) от токовете през всички малки елементи:



Фиг.52-3.

$$(52.5) \quad I = \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}.$$

Пример 52.1. По меден проводник с напречно сечение $S = 1 \text{ mm}^2$ тече ток $I = 1 \text{ A}$. Определете дрейфовата скорост v_d на електроните. Плътността на медта е $\rho_1 = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, моларната маса е $M = 0,0636 \text{ kg/mol}$. Приемете, че на всеки атом Cu се пада по един свободен електрон.

Решение. От уравнение (52.2) изразяваме дрейфовата скорост на свободните електрони:

$$v_d = \frac{I}{Snq_0}.$$

Концентрацията на свободните електрони n е равна на концентрацията на атомите на медта (на броя атоми в единица обем от проводника). В единица обем се съдържат ρ_1/M мола вещество, а в един мол вещество – N_A атома (N_A – число на Авогадро). Следователно

$n = \frac{\rho_1}{M} N_A$. Заместваме n и $q_0 = e$ в уравнението за дрейфовата скорост и получаваме

$$v_d = \frac{IM}{Se\rho_1 N_A} =$$

$$\frac{(1 \text{ A})(0,0636 \frac{\text{kg}}{\text{mol}})}{(1,10^{-6} \text{ m}^2)(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C})(8,9 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})} =$$

$$= 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ m/s} = 27 \text{ cm/h}.$$

Следователно дрейфовата скорост е много малка – в случая на свободните електрони са необходими почти 4 часа, за да преминат през проводник с дължина 1 метър. Защо тогава лампата в стаята светва веднага след натискането на ключа? При затварянето на веригата електричното поле, което привежда в насочено движение свободните електрони, се разпространява в проводниците със скоростта на светлината ($c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$). По този начин „командата“ да започнат да се движат (електричното поле) достига почти едновременно до всички електрони.

Уравнение за непрекъснатост

В проводяща среда, в която тече ток, мислено отделяме затворена повърхност S . Ще означим с dq/dt бързината (скоростта), с която се изменя положителният заряд в обема V , заграден от повърхността S . Съгласно със закона за запазване на електричния заряд изменението на заряда в обема V е равно на заряда, преминал през повърхността S за същото време, т.е. на тока I през S : $I = -dq/dt$. Знакът минус показва, че токът I през повърхността S и изменението dq на заряда вътре в нея имат противоположни знаци. Когато зарядът намалява ($dq < 0$), положителните заряди напускат повърхността ($I > 0$). Обратно, при $dq > 0$ положителни заряди навлизат през повърхността S в обема V , т.е. $I < 0$. Изразяваме тока от уравнение (52.5) и получаваме

$$(52.6) \quad \oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}.$$

Това равенство се нарича уравнение за непрекъснатост: токът през произволна затворена повърхност S е равен на взетата с обратен знак скорост на изменение на електричния заряд в обема V , заграден от тази повърхност. Уравнението за непрекъснатост е следствие от закона за запазване на електричния заряд. (Направете аналогия с уравнението за непрекъснатост при флуидите (вж. част 1, §25)).

Закон на Ом

Както знаем от електростатиката, при електростатично равновесие електричното поле в обема на проводниците е нула. Когато това условие не е изпълнено, под действие на електричните сили свободните заряди извършват насочено движение, т.е. в проводящата среда тече ток. Експерименталните изследвания показват, че в редица вещества (проводящи среди) плътността на тока $\mathbf{j}$ е право пропорционална на интензитета $\mathbf{E}$ на електричното поле:

$$(52.7) \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Коефициентът на пропорционалност σ се нарича *специфична проводимост* на средата.

Когато специфичната проводимост σ не зависи от интензитета $\mathbf{E}$ на полето, казваме, че е в сила *законът на Ом*. Законът на Ом гласи:

Плътността на тока $\mathbf{j}$ е право пропорционална на интензитета на електричното поле $\mathbf{E}$, т.е. отношението на модулите на векторите $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ не зависи от полето

$$(52.8) \quad \frac{j}{E} = \sigma = \text{const.}$$

Опитът показва, че законът на Ом е в сила за голям брой проводящи вещества, включително и за повечето метали. В анизотропни среди, например в някои кристали, посоките на векторите $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ не съвпадат. В такива случаи вместо уравнение (52.7) се използват по-сложни съотношения.

В уравнения (52.7) и (52.8) влиза интензитетът на полето, което се създава в проводящата среда при протичане на ток. Доказва се, че когато средата е еднородна, в повечето важни за практиката случаи характеристиките на това поле са същите, както на електростатичното поле, което би се създавало между дадените електроди, ако на тях се подаде същото напрежение, както при наличие на ток, а проводящата среда се замени с вакуум. Следователно токовите линии в еднороден проводник съвпадат със силовите линии на това електростатично поле.

За да запишем закона на Ом в позна-

тия вид от училищния курс по физика, ще разгледаме еднороден цилиндричен метален проводник с дължина L и напречно сечение S (фиг.52-4). Когато между две напречни сечения на проводника се поддържа постоянна потенциална разлика (постоянно напрежение) $U = \varphi_1 - \varphi_2$, в ограничението от тях обем на проводника се създава еднородно електрично поле с интензитет $E = U/L$. Токът през напречното сечение на проводника е $I = jS$. Заместваме $j = I/S$ и $E = U/L$ в уравнение (52.8) и получаваме

$$(52.9) \quad U = \frac{L}{\sigma S} I = \frac{\rho L}{S} I,$$

където $\rho = 1/\sigma$ е реципрочната стойност на специфичната проводимост, която се нарича *специфично съпротивление* на проводника. Величината

$$(52.10) \quad R = \frac{U}{I} = \frac{\rho L}{S}$$

се нарича *съпротивление* на проводника. Уравнение (52.10) изразява математически друга формулировка на закона на Ом, която е частен случай на тази, представена с уравнения (52.7) и (52.8):

Съпротивлението $R = U/I$ на проводника не зависи от тока I и от приложеното напрежение U .

Между тока и напрежението в проводниците, за които е в сила законът на Ом, съществува линейна зависимост

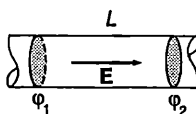
$$(52.11) \quad U = RI,$$

представена графично на фиг.52-5.

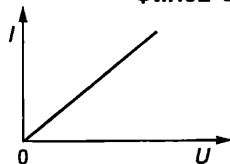
Единицата за електрично съпротивление се нарича *ом* (Ω). Съпротивлението на даден проводник е 1Ω , ако при напрежение 1 V през него протича ток 1 A , т.е.

$$1 \Omega = 1 \frac{\text{V}}{\text{A}}.$$

Фиг.52-4.



Фиг.52-5.



$$(52.12) \quad \rho = \frac{RS}{L}$$

се измерва в единици $\Omega \cdot \text{m}$ (ом-метър), а специфичната проводимост $\sigma = 1/\rho$ – в единици $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ (ом на минус първа степен – метър на минус първа степен).

Пример 52.2. Колко метра проводник от ни-хром (нихромът е сплав от никел, хром, желязо и манган) с напречно сечение $S = 0,3 \text{ mm}^2$ ви е необходим, за да направите нагревател със съпротивление 30Ω ? Специфичното съпротивление на нихрома е $\rho = 1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$.

Решение. $L = \frac{RS}{\rho} = \frac{(30 \Omega)(0,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2)}{1,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}} = 6 \text{ m}.$

***Пример 52.3.** В обема на еднороден меден проводник със специфична проводимост $\sigma = 5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ е внесен допълнителен електричен заряд q_0 . Оценете времето, след което ще се установи електростатично равновесие.

Решение. Както знаем от електростатиката, допълнителните заряди се разпределят по повърхността на проводника. Ако допълнителният заряд се внесе в обема на проводника, ще протече ток, който ще доведе до преразпределение на зарядите. Токът се прекратява, когато се установи електростатично равновесие. Нека вътре в проводника мислено отделим затворена (гаусова) повърхност S , която да загражда допълнителния заряд. Записваме закона на Гаус

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0},$$

където q е допълнителният заряд, който се намира в момента t в обема, заграден от повърхността S . Както вече отбелязахме, електростатичното поле $\mathbf{E}$, което би се създало от неподвижните заряди във вакуум, съвпада с полето в проводящата среда при протичане на ток. Умножаваме двете страни на горното равенство по проводимостта σ на проводника и като отчетем закона на Ом $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, получаваме

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\sigma q}{\epsilon_0}.$$

Записваме уравнението за непрекъснатост

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{dq}{dt}$$

и приравняваме десните страни на двете уравнения:

$$\frac{\sigma q}{\epsilon_0} = -\frac{dq}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{dq}{q} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} dt.$$

След интегриране получаваме

$$q = q_0 \exp\left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} t\right).$$

Следователно зарядът q намалява по експоненциален закон. След време $t = \tau = \epsilon_0 / \sigma = (8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}) / (5,9 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}) = 1,5 \cdot 10^{-19} \text{ s}$ той ще намалее $e = 2,71$ пъти. Времето τ се нарича *време на релаксация*. То показва от какъв порядък е времето, след което се установява електростатично равновесие в проводника. Поради голямата проводимост на металните проводници в тях електростатично равновесие се установява практически мигновено.

Задачи

1. Електронният сноп, който формира образа върху екрана на домашния телевизор, представлява електричен ток $I = 60 \mu\text{A}$. Колко електрона попадат върху екрана на телевизора за време $t = 16 \text{ s}$?

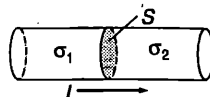
2. Близко до Земята протоните от слънчевия вятър имат концентрация $n = 8,7 \cdot 10^6 \text{ m}^{-3}$ и се движат със скорост $v = 470 \text{ km/s}$. Определете плътността j на тока, създаден от протоните.

3. Информацията в нервната система на човека се предава чрез електрични сигнали, разпространяващи се по нервни влакна, наречени аксони. Пресметнете електричното съпротивление на цилиндричен аксон с радиус $5 \mu\text{m}$, дължина 1 cm и специфично съпротивление $2 \Omega \cdot \text{m}$.

4. Два цилиндрични еднородни проводника с напречно сечение S са свързани, както е показано на *фиг. 52-6*. По проводниците тече постоянен ток I . Специфичната проводимост на двата проводника е съответно σ_1 и σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$).

Определете: а) интензитета на електричното поле във всеки един от проводниците; б) големината и знака на електричния заряд q , който е натрупан в контактното напречно сечение S между двата проводника.

Указание. Използвайте законите на Ом и на Гаус.

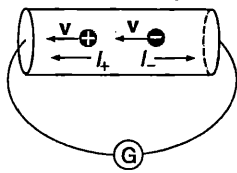


Фиг. 52-6.

53. Електричен ток в метали

Опит на Толмен

През 1916 г. американският физик Р. Толмен извършва серия от опити, които убедително доказват електронната природа на електричния ток в металите. Идеята на тези опити се основава на свойството инертност. Например незареден метален проводник се движи наляво със скорост v (фиг.53-1). Заедно с проводника се движат и подвижните заряди (токовете носители). Ако проводникът рязко спре, подобно на пътниците в автобус, които след натискане на спирачките политат напред, подвижните заредени частици ще продължат да се движат по инерция наляво и през чувствителния галванометър ще протече ток. По посоката на тока може да се определи знакът на токовете носители: ако посоката на тока I_+ съвпада с посоката на движение на частиците по инерция, това означава, че техният заряд е положителен, а при отрицателен заряд на частиците посоката на тока I_- е противоположна (фиг.53-1). Опитите на Толмен показват, че електричният ток в металите се пренася от частици с отрицателен заряд. Освен това Толмен определя отношението q/m на заряда q и масата m на тези частици и установява, че това са електрони.



Фиг.53-1.

Класически модел на електропроводимостта на металите

В най-простия класически модел на електронната проводимост на металите свободните електрони се разглеждат като идеален газ със средна кинетична енергия на хаотичното топлинно движение

$$(53.1) \quad \frac{m_e u^2}{2} = \frac{3}{2} kT,$$

където m_e е масата на електрона, u – средната квадратична скорост на топлинно движение на електроните (вж. част 1, §32 и §33), k – константа на Болцман, T – абсолютна температура на електронния газ.

Приемаме, че всички електрони се движат с еднаква скорост

$$(53.2) \quad u = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}},$$

като се разсейват еластично от неподвижните положителни йони, разположени във възлите на кристалната решетка. Средното разстояние λ , изминато от електрон между два последователни удара, се нарича *средна дължина на свободния пробег* на електроните, а средното време

$$(53.3) \quad \tau = \frac{\lambda}{u}$$

между ударите се нарича *време на релаксация*.

Поради хаотичния характер на топлинното движение, в отсъствие на електрично поле през метала не протича ток. Когато в проводника се създаде еднородно електрично поле с интензитет E , на електроните действа постоянна сила $-eE$ и те започват да се движат равноускорително в посока, обратна на посоката на полето. Това насочено движение се наслаждава към хаотичното топлинно движение. Ще приемем, че след всеки удар с йоните електроните изцяло губят скоростта си на насочено движение, след което започват да се ускоряват отново. Скоростта на насочено движение в края на свободния пробег определяме от втория принцип на механиката: импулсът на действащата сила $eE\tau$ е равен на изменението на импулса $m_e v_{\max}$ на електрона, т.е. $eE\tau = m_e v_{\max}$, откъдето

$$(53.4) \quad v_{\max} = \frac{eE\tau}{m_e}.$$

Тъй като движението е равноускорително без начална скорост, средната скорост на насочено движение на електроните, т.е. тяхната дрейфова скорост, е равна на половината от максималната скорост (вж. част 1, зад.3 на стр.17):

$$(53.5) \quad v_d = \frac{v_{\max}}{2} = \frac{eE\tau}{2m_e}.$$

При по-точни пресмятания, след като се отчете Максвеловото разпределение на електроните по скорости (вж. част 1, §34), за дрейфовата скорост се получава

$$(53.6) \quad v_d = \frac{eE\tau}{m_e}.$$

Заместваме дрейфовата скорост в равенство (52.3) и за плътността на тока получаваме

$$(53.7) \quad j = nev_d = \frac{ne^2\tau}{m_e} E = \sigma E,$$

където

$$(53.8) \quad \sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}$$

е специфичната проводимост на метала. Тя може да се изрази и чрез средната дължина на свободен пробег на електроните:

$$(53.9) \quad \sigma = \frac{ne^2\lambda}{m_e u}$$

Нито една от величините от дясната страна на уравнение (53.9) не зависи от интензитета на електричното поле. Следователно при постоянна температура специфичната проводимост е константа, характерна за дадения метал, т.е. за металите е в сила законът на Ом.

Дрейфова подвижност

Величината *дрейфова подвижност* на заредените частици се дефинира със съотношението

$$(53.10) \quad \mu = \frac{v_d}{E}.$$

По определение подвижността μ е равна на големината на дрейфовата скорост v_d , която получава частицата под действие на електрично поле с интензитет $E = 1 \text{ V/m}$. Заместваме v_d от уравнение (53.6) в (53.10) и за дрейфовата подвижност на свободните електрони в металите получаваме

$$(53.11) \quad \mu = \frac{e\tau}{m_e}.$$

Специфичната проводимост може да се изрази чрез подвижността на токовите носители (електрони):

$$(53.12) \quad \sigma = en\mu.$$

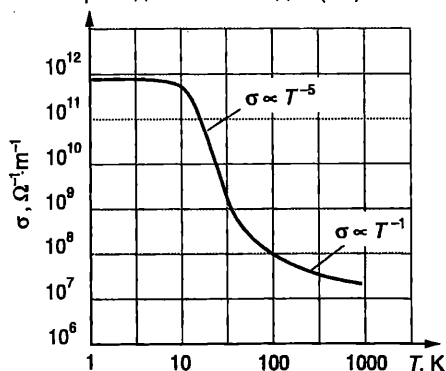
Температурна зависимост на специфичната проводимост. Недостатъци на класическия модел

Експерименталните изследвания, извършени с различни метали, показват сложна температурна зависимост на електропроводимостта. На фиг. 53-2 е показана експериментално получената зависимост на специфичната проводимост σ на чиста мед от абсолютната температура T . При високи температури σ е пропорционална на T^{-1} . Зависимостта става по-силна при понижаване на температурата и достига T^{-5} в най-стръмния участък на кривата $\sigma(T)$. При много ниски температури проводимостта престава да зависи от температурата.

Според класическия модел единствената величина в уравнение (53.9) за специфичната проводимост, която зависи от температурата, е средната топлинна скорост на електроните ($1/u \propto T^{-1/2}$). За да се обясни по-силната температурна зависимост на специфичната проводимост $\sigma \propto T^{-1}$ при високи температури, например, трябва да се предположи, че съществува температурна зависимост на дължината на свободния пробег от вида $\lambda \propto T^{-1/2}$. Такова предположение обаче е необосновано, защото в класическата теория λ е геометричен параметър от порядъка на 1 nm , който се определя от размерите на йоните и от разстоянието между тях и не би трябвало да зависи от температурата.

Останалите особености в зависимостта $\sigma(T)$ остават напълно необясними в рамките на класическата теория. За да се опи-

Фиг. 53-2. Температурна зависимост на специфичната проводимост на медта (Cu).



шат електричните свойства на веществата на микроскопично равнище, трябва да се използват законите на квантовата физика. Ще се спрем накратко на допълненията и корекциите, които квантовата физика внася във вече разгледания класически модел на електропроводимостта на металите.

Енергия на Ферми

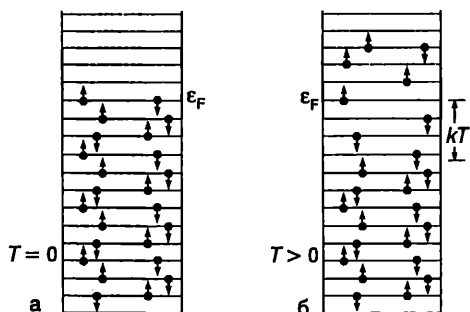
Съгласно с молекулнокинетичната теория движението на частиците на идеалния газ при абсолютната нула се прекратява, т.е. тяхната кинетична енергия става равна на нула. Електроните от електронния газ в металите обаче продължават да се движат дори при температура $T = 0$ K. Това движение не е топлинно и се обяснява от квантовата механика. За да се опишат свойствата на електронния газ, използват се две основни идеи на квантовата механика:

1. Енергията на електроните от газа, подобно на енергията на електроните в атома, се квантува, т.е. може да има само определен дискретен набор от стойности – казва се, че електроните запълват т. нар. *енергетични нива*.

2. За електронния газ е в сила принципът на Паули: *на едно и също енергетично ниво могат да се намират най-много два електрона с противоположни спинове*.

На *фиг.53-3* схематично са представени енергетичните нива и запълването им с електрони. Условно посоката на спина на електроните е отбелязана със стрелка. При температура $T = 0$ K (*фиг.53-3а*) електроните се разполагат в най-ниските (по енергия) нива. Най-високото енергетично ниво, запълнено с електрони при абсолютната нула, се нарича *ниво на Ферми* в чест на

Фиг.53-3.



италианския физик Енрико Ферми (1905–1954), а кинетичната енергия на електроните от нивото на Ферми – *енергия на Ферми* ϵ_F . При $T = 0$ K всички нива с енергия $\epsilon \leq \epsilon_F$ са заети от електрони, докато нивата с енергия $\epsilon > \epsilon_F$ са свободни.

От класическата молекулнокинетична теория следва, че при нагряване на метала до температура T всеки електрон получава (средно) енергия от порядъка на kT . В действителност обаче само част от електроните участват в топлинното движение. При ниски температури това са електроните, разположени на нива с енергия в интервала от $\epsilon_F - kT$ до ϵ_F . Само тези електрони могат да получат енергия kT и да преминат в някое от незаетите състояния над нивото на Ферми (*фиг.53-3б*). Електроните с по-малка енергия ϵ не могат да бъдат топлинно активирани, защото за тях състоянията с енергия $\epsilon + kT$ са заети от други електрони и преминаването в тях е забранено от принципа на Паули.

За температури, при които е изпълнено условието $kT \ll \epsilon_F$, се казва, че електронният газ е *изроген*. Тогава най-силно се проявяват квантовите му свойства. Едва при температури, по-високи от температурата на Ферми T_F , дефинирана чрез равенството

$$(53.13) \quad kT_F = \epsilon_F,$$

всички електрони участват в топлинното движение. При тези температури свойствата на електронния газ вече не се различават от свойствата на класическия идеален газ – казва се, че газът е *неизроген*.

Данни за енергията и температурата на Ферми за някои метали са дадени в табл. 53.1.

Таблица 53.1. Концентрация на електроните n , енергия на Ферми ϵ_F , скорост на Ферми v_F и температура на Ферми T_F за някои метали.

Метал	n , cm^{-3}	ϵ_F , eV	v_F , m/s	T_F , K
Литий	$4,7 \cdot 10^{22}$	4,7	$1,3 \cdot 10^6$	55 000
Натрий	$2,6 \cdot 10^{22}$	3,2	$1,1 \cdot 10^6$	37 000
Мед	$8,5 \cdot 10^{22}$	7,0	$1,6 \cdot 10^6$	81 000
Злато	$5,9 \cdot 10^{22}$	5,5	$1,4 \cdot 10^6$	64 000

Правят впечатление много високите стойности на температурата на Ферми. При такива температури нито един метал

не може да се намира в твърдо агрегатно състояние. Следователно при всички температури, които представляват практически интерес, електронният газ в металите е изроден.

Квантов модел на електропроводимостта на металите

В квантовата теория специфичната проводимост на металите се описва с уравнение, което е аналогично на уравнение (53.9), но някои от влизащите в него величини имат по-различен смисъл.

За изроден електронен газ практически всички състояния с енергия $\epsilon < \epsilon_F$ са запълнени с електрони. Ще представим скоростите v на електроните с точки с декартови координати v_x , v_y и v_z . Големината на скоростта е свързана с кинетичната енергия на електрона чрез известното съотношение

$$(53.14) \quad v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \frac{2\epsilon}{m_e},$$

където ϵ е кинетичната енергия на електрона. Тъй като енергията ϵ се квантува, от уравнение (53.14) следва, че големината на скоростта v също се квантува. На фиг.53-4а са точки са показани разрешените стойности на скоростта, които запълват сфера, наречена *сфера на Ферми*. Сферата на Ферми е с начало в точката $v = 0$

и има радиус $v_F = \sqrt{\frac{2\epsilon_F}{m_e}}$. Това е скоростта

на електроните от нивото на Ферми – нарича се *скорост на Ферми* v_F . В отсъствие на електрично поле на всеки електрон със скорост v съответства втори електрон с равна по големина и противоположна по посока скорост $-v$ (фиг.53-4а) и електричен ток не протича.

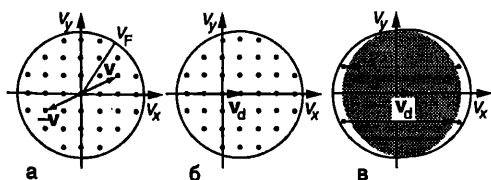
В електрично поле всеки електрон получава допълнителна скорост v_d , насочена

на в противоположна посока на интензитета E на полето, и центърът на сферата на Ферми се отмества, както е показано на фиг.53-4б. При разсейване, което в класическия модел разглеждаме като удар в неподвижен йон от кристала, електроните губят изцяло скоростта v_d на насочено движение, след това отново се ускоряват и т.н. Процесът на ускоряване и разсейване може да се разгледа и по друг начин, като се отчете, че електроните са неразличими частици. Това означава, че те нямат индивидуални характеристики, които да ги различават един от друг, т.е. ако два електрона си разменят местата (енергията), състоянието на системата не се променя. На фиг.53-4в са показани едновременно двете положения на сферата на Ферми – със и без електрично поле. Тъй като електроните са неразличими, няма значение кои точно електрони се намират в припокриващите се (защриховани) части от двете сфери. Затова можем да смятаме, че там през цялото време се намират едни и същи електрони, които не изменят състоянието си под действие на полето, т.е. нито се ускоряват, нито се разсейват. Само електроните, намиращи се в много тънък слой със скорости, близки до скоростта на Ферми v_F ($v_F \gg v_d$), променят състоянието си: тези от дясната ивица след разсейване преминават в незапълнената с електрони лява част, отново се ускоряват и се връщат в дясната част и т.н.

И така, електропроводимостта на металите се определя не от всички свободни електрони, а само от тези, които са разположени много близко до нивото на Ферми и имат скорост, приблизително равна на скоростта на Ферми. Затова във формула (53.9) за специфичната проводимост средната скорост u на топлинно движение се заменя със скоростта на Ферми v_F (тя е около 10 пъти по-голяма от средната топлинна скорост u при стайна температура – вж. табл.53.1), а λ – с дължината на свободния пробег на електроните от нивото на Ферми λ_F . Специфичната проводимост на метала е

$$(53.15) \quad \sigma = \frac{ne^2\lambda_F}{m_e v_F}.$$

Фиг.53-4.



Механизми на разсейване

В уравнение (53.15) влиза скоростта на Ферми v_F , която, за разлика от средната скорост на топлинно движение u , не зависи от температурата. Единствената зависеща от температурата величина може да е дължината на свободния пробег λ_F . В класическата теория λ е геометричен параметър от порядъка на разстоянието между съседните йони (около 1 nm). Пресмятанията на свободния пробег по формула (53.15) с експерименталните стойности за σ и v_F обаче дават съвсем друг резултат: свободният пробег е много по-голям – десетки nm при стайна температура, а за някои особено чисти метали надхвърля 10 cm при температурата на течния хелий (4,2 K). Следователно очакваните от класическата теория еластични удари на електроните в неподвижните йони не се наблюдават.

Взаимодействието на свободните електрони с йоните се извършва чрез електрични сили. То може да се отчете, ако се разгледа движението на електроните в електростатичното поле, създадено от всички йони. Когато йоните са неподвижни във възлите на кристалната решетка, интензитетът на електричното им поле се изменя в пространството по периодичен закон: рязко нараства в близост до йоните и намалява при отдалечаване от тях. Такова поле се нарича *периодично кристално поле*. Квантовомеханичният анализ показва, че свободните електрони се движат в периодичното кристално поле без да променят посоката си, т.е. без да се разсейват. Разсейване на електроните предизвикват само нарушения в периодичността на полето, свързани с наличието на примеси и дефекти. Трептенията на кристалната решетка също водят до нарушаване на периодичността и разсейване на електроните.

При разсейване от дефекти и примеси дължината на свободния пробег $\lambda_{\text{деф}}$ обикновено не зависи от температурата, докато свободният пробег $\lambda_{\text{реш}}$ при разсейване от трептения на кристалната решетка намалява при нагряване. Когато двата механизма действат едновременно и независимо, общата дължина на свободния пробег λ се определя по формулата

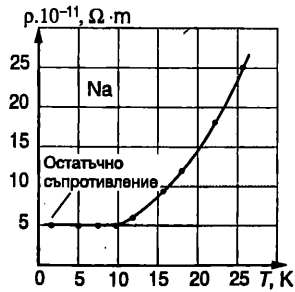
$$(53.16) \quad 1/\lambda = 1/\lambda_{\text{деф}} + 1/\lambda_{\text{реш}}.$$

Аналогично за специфичното съпротивление ($\rho \propto 1/\sigma \propto 1/\lambda$) се получава

$$(53.17) \quad \rho = \rho_{\text{деф}} + \rho_{\text{реш}}.$$

Следователно специфичното съпротивление се разделя на две части: $\rho_{\text{реш}}$, зависещо от температурата, и $\rho_{\text{деф}}$, което е температурно независимо, но се влияе от съдържанието на примеси и дефекти. Зависимостта (53.17) се нарича *правило на Матисен*. Тази част от съпротивлението, която не зависи от температурата, се нарича *остатъчно съпротивление* (фиг.53-5).

Трептенията на кристалната решетка също се описват от законите на квантовата механика: тяхната енергия може да се изменя само на точно определени порции (кванти). Колкото е по-висока честотата на трептене, толкова по-голяма е енергията ϵ_T на съответния квант. При ниски температури топлинно се възбуждат само трептения, за които е в сила неравенството $kT \geq \epsilon_T$, т.е. трептения с ниски честоти. При нагряването нараства амплитудата на тези трептения и едновременно с това се възбуждат трептения с по-високи честоти. Сумарното действие на тези два фактора води до силна зависимост на разсейването от температурата. Доказва се, че в този случай дължината на свободния пробег се изменя по закона $\lambda_{\text{реш}} \propto T^{-5}$, което обяснява най-стръмния участък от зависимостта $\sigma(T)$ на фиг.53-2. При високи температури е възбуден целият спектър на трептенията на кристалната решетка и нагряването води единствено до нарастване на тяхната амплитуда. Затова температурната зависимост на разсейването на електроните е по-слаба. Квантовата теория в този случай показва, че дължината на свободния пробег е обратнопропорционална на абсолютната температура ($\lambda_{\text{реш}} \propto T^{-1}$).



Фиг.53-5. Температурна зависимост на специфичното съпротивление на натрия (Na).

54. Свръхпроводимост

Явлението свръхпроводимост

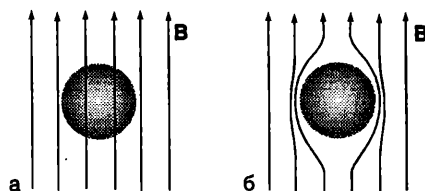
В известната Лайденска лаборатория (Холандия) през 1908 г. за пръв път е получен течен хелий (температура на втечняване при нормално атмосферно налягане 4,2 K), което разкрива нови възможности за изследвания при ниски температури. Три години по-късно ръководителят на лабораторията Камерлинг Онес извършва опити с чист живак, за да изясни влиянието на примесите върху остатъчното съпротивление. Резултатът е напълно неочакван: при температура $T_k = 4,2$ K специфичното съпротивление става равно на нула! На *фиг. 54-1* са показани получените от Онес резултати. Прави впечатление, че температурният интервал, в който съпротивлението намалява до нула, е много тесен. Явлението е наречено *свръхпроводимост*. По-късно е установено, че подобно на живака и други метали могат да се намират в две различни състояния: 1. състояние с крайно електрично съпротивление при високи температури; 2. състояние с нулево електрично съпротивление при ниски температури. Металите, които се намират в състояние 1, се наричат *нормални метали*, а в състояние 2 – *свръхпроводници*. Температурата T_k , при която става преход от нормално в свръхпроводящо състояние, се нарича *критична температура*.

Преминаването на метал от нормално в свръхпроводящо състояние е фазов преход от втори род (вж. част 1, §41). Той не е съпроводен с отделяне или поглъщане на топлина, но при критичната темпе-

ратура се наблюдава скок в моларния топлинен капацитет на електронния газ, свързан с преминаването на електронната система на свръхпроводника в по-подредено състояние.

Ефект на Майснер

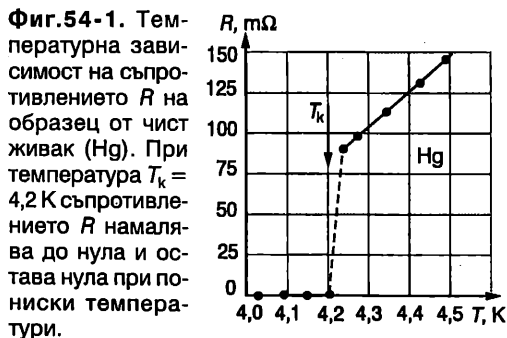
Ако диамагнитно вещество се постави във външно магнитно поле, магнитната индукция във веществото е по-малка, отколкото извън него (вж. §69). Експериментално е установено, че магнитното поле в обема на свръхпроводниците винаги е нула, т.е. те са *идеални диамагнетици*. Когато се постави образец в магнитно поле и се охлади под температурата на прехода в свръхпроводящо състояние T_k , магнитните индукционни линии, които първоначално преминават през образца (*фиг. 54-2а*), се изтласкват извън обема на свръхпроводника (*фиг. 54-2б*). Явлението се нарича *ефект на Майснер*. Нулево електрично съпротивление и идеален диамагнетизъм – това са двете най-важни отличителни характеристики на свръхпроводниците.



Фиг. 54-2. Ефект на Майснер: а) нормален метал; б) свръхпроводник.

Купърови двойки

Квантовата теорията за свръхпроводимостта е развита от американските физици Бардин, Купър и Шрифър през 1957 г. Известна е като теория БКШ – по първите букви на имената на нейните автори. Според тази теория причина за свръхпроводимостта е непрякото електрон – електронно взаимодействие, което се осъществява посредством кристалната решетка и има характер на привличане. Когато електрон се движи в кристала, той се привлича от катионите и предизвиква локална деформация на кристалната решетка. Друг електрон използва тази деформация, за да понижи своята енергия, което на практика означава, че двата електрона взаимодействат.



ват посредством положителните йони. Тъй като в резултат на това непряко взаимодействие енергията намалява, за електроните е енергетически по-изгодно да се обединяват в т. нар. *купърови двойки*. Да означим с $\epsilon_{\text{вр}}$ енергията на връзката – тя е равна на енергията, необходима за разделянето на една електронна двойка. При температура $T = 0 \text{ K}$ електроните на нормалния метал запълват всички състояния с енергия $\epsilon \leq \epsilon_{\text{F}}$. При свързване на два електрона в купърва двойка тяхната обща енергия намалява с $\epsilon_{\text{вр}}$, а енергията на всеки електрон намалява с $\epsilon_{\text{вр}}/2$. В резултат на това между най-високото (по енергия) състояние на електроните, свързани в двойки, и незаематите разрешени състояния, т.е. около нивото на Ферми, възниква енергетична празнина (забранена зона), в която няма енергетични нива (фиг. 54-3). Ширината на забранената зона $E_g = \epsilon_{\text{вр}}$ обикновено не надминава няколко милиелектронволта, т.е. $E_g \ll \epsilon_{\text{F}}$. Тя се определя експериментално чрез оптични измервания в далечната инфрачервена област на спектъра. Свързването на двойки са прозрачни за фотоните на инфрачервената светлина с енергия, по-малка от E_g . Такива фотони не се поглъщат от свързководника, защото енергията им не е достатъчна за разкъсване на купъровите двойки.

Тъй като процесът на образуване на купърови двойки е свързан с изменение на енергията на електроните, в такива двойки могат да се обединяват само електрони, които се намират близо до нивото на Ферми. За останалите електрони това е невъзможно, защото противоречи на принципа на Паули – за тях всички съседни нива за заети и те не могат да изменят енергията си. Следователно всички електрони от купъровите двойки имат скорости, приблизително равни на скоростта на Ферми v_{F} . На фиг.54-4 е показан модел на

купърва двойка, която наподобява атома на хелия: два електрона се движат около ефективен положителен заряд. Електроните от двойката имат равни по големина и противоположни по посока скорости и противоположни спинове. Освен това купъровите двойки имат едно забележително свойство: центровете на масите на всички двойки винаги се движат с еднаква (дрейфова) скорост или се намират в покой. Това води до много силна съгласуваност в движението на електроните от купъровите двойки. Както образно се изразява руският физик Френкел, „електроните се движат подобно на алпинисти, свързани помежду си с въже: ако един от тях се препъне в неравностите на релефа (обусловени от топлинното движение на йоните), неговите съседи го връщат обратно“.

Купъровите двойки се движат в кристала без да се разсейват и обуславяният от това движение електричен ток не се прекратява след изключването на електричното поле, което го е породило.

Приложения на свързководниците

Още при откриването на свързководимостта Онес отбелязва възможността тя да се използва за създаване на силни магнитни полета от свързководящи намотки (соленоиди) с ток. През такива намотки могат да се пропускат много силни токове без да се отделя топлина. Мощните свързководящи магнити намират широко приложение в съвременната наука, техника и медицина:

–Магнити за физиката на високите енергии, които се използват в съвременните ускорители на заредени частици.

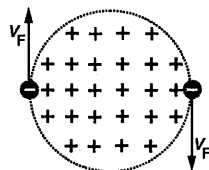
–Магнити за удържане на плазмата в съоръженията за термоядрен синтез.

–ЯМР–томография. Изображение на вътрешните органи на човека може да се получи, като се използва явлението ядрен магнитен резонанс (ЯМР). Същността на това явление е разгледана в §106. Тук само ще отбележим, че методът изисква силни магнитни полета, създадени в камери с големи размери (диаметър около 1 m). Такива полета се създават от свързководящи магнити. Методът има голяма разделителна способност, дава възможност

Фиг.54-3.



Фиг.54-4.



да се наблюдават някои меки тъкани, не-различими по другите методи, и не вреди на здравето на пациента.

Друга голяма област на приложение е свръхпроводящата електроника. Докато основен елемент на полупроводниковата електроника е $p-n$ -преходът, в свръхпроводящите електронни елементи се използват т. нар. *преходи на Джозефсън*. Обикновено преходът на Джозефсън представлява два тънки слоя от свръхпроводящ метал, разделени от много тънък слой диелектрик. Според класическата теория токовете носители не могат да преминат през диелектрика (диелектриктът представлява потенциален бариер, който е непропускаем за свободните електрони) и в такава структура ток не би трябвало да протича. Купъровите двойки обаче преминават през диелектрика благодарение на т. нар. *квантов тунелен ефект*. Наблюдават се два интересни ефекта:

1. През прехода тече постоянен ток в отсъствие на външни електрични или магнитни полета (стационарен ефект на Джозефсън).

2. Когато към прехода се приложи постоянно напрежение, през него протича осцилиращ ток (нестационарен ефект на Джозефсън).

Преходите на Джозефсън намират приложение в квантовите магнитометри с висока чувствителност, предназначени за регистриране на много слаби магнитни полета. Такива уреди се използват например за:

- Изучаване на биомagnetизма. Съставят се карти на изключително слабите магнитни полета, излъчени от невроните на човешкия мозък. Така например възможно е точно да се определи огнището на електрични разряди, които предизвикват епилептични припадъци, и то хирургично да се отстрани.

- Регистриране на нищожни локални изменения на магнитното поле на Земята, носещи информация за източниците на геотермална енергия.

Разработват се също така проекти за свръхпроводящи компютри с голямо бързодействие, използващи преходи на Джозефсън.

Високотемпературна свръхпроводимост

За широкото практическо използване на свръхпроводимостта са необходими материали, които остават в свръхпроводящо състояние при колкото е възможно по-високи температури. Сега съществуващите свръхпроводящи магнити и други устройства се охлаждат от течен хелий. Получаването и съхраняването на течен хелий обаче изисква скъпоструващи съоръжения, което прави приложението на свръхпроводниците с хелиево охлаждане в редица области икономически неефективно. Качествена граница от гледна точка на приложенията е температурата 77 K, при която кипи течният азот. Азотните охлаждащи системи са многократно по-евтини и създаването на свръхпроводящи устройства, работещи при азотни температури, открива нови хоризонти за практическо използване – например за пренасяне без загуби на електрическа енергия от свръхпроводящи далекопроводи.

Отначало свръхпроводимост е била установена в редица чисти метали (Hg, Pb, Sn, Zn, Nb, In и др.), метални сплави, интерметални съединения и в някои полупроводници. През 1973 г. е достигната най-високата критична температура (23,3 K) в сплав на ниобия с германия (Nb_3Ge), с което сякаш се изчерпват възможностите, които предлагат „класическите“ свръхпроводници.

Големият „пробив“ става през 1986 г., когато сътрудниците на Цюрихската изследователска лаборатория на фирмата IBM Йоханес Беднорц и Клаус Мюлер се насочват към нов клас материали – оксиди на медта и бария, съдържащи лантан ($Ba-La-Cu-O$). Те първи съобщават за наблюдавана свръхпроводимост в тази система с критична температура $T_k \approx 30$ K: открита е високотемпературната свръхпроводимост. В последвалите интензивни търсения на нови високотемпературни свръхпроводници се изменят съотношенията между отделните елементи на тази сложна система или се заменят някои от тях с подобни по свойства елементи. Например при замяна на лантана с итрий е установена свръхпроводимост в системата ($Y-Ba-Cu-O$) с критична температура $T_k \approx 100$ K.

55. Понятие за зонна теория на твърдото тяло

Специфичното съпротивление на чистите метали при ниски температури е от порядъка на $10^{-12} \Omega \cdot \text{м}$, докато при някои диелектрици то достига $10^{20} \Omega \cdot \text{м}$. Изключително широкият диапазон на изменение на съпротивлението не може да се обясни с модела на свободните електрони, който разгледахме. Този модел не дава отговор на въпроса защо някои кристали са изолатори, други са отлични проводници на електричен ток, а на трети електричните свойства зависят силно от температурата (полупроводници).

Отговор на тези въпроси дава зонната теория на твърдото тяло. Ще разгледаме качествено само основните идеи и резултати на тази квантова теория и ще проследим измененията, които настъпват в енергетичния спектър на електроните, когато отделните атоми се обединят в кристал.

Енергетични нива на електроните в атома

Както е известно от училищните курсове по физика и химия, състоянието на електроните в атома се определя от четири квантови числа: главно квантово число n , орбитално число ℓ , магнитно число m и спиново число s . Орбиталното квантово число може да взема стойности $\ell = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$, т.е. n на брой различни стойности. Магнитното квантово число m приема $(2\ell + 1)$ различни стойности: $m = 0, \pm 1; \pm 2, \dots, \pm \ell$. Спиновото квантово число на електроните може да има само две стойности: $s = 1/2$ или $s = -1/2$.

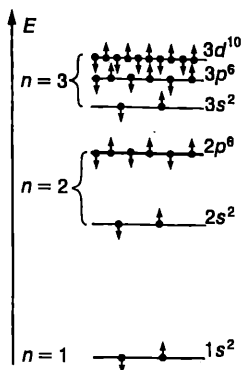
Състоянията, за които орбиталното квантово число е $\ell = 0$, е прието да се означават с буквата s и да се наричат s -състояния независимо от стойностите на останалите квантови числа. Състоянията с $\ell = 1$ се наричат p -състояния, с $\ell = 2 - d$ -състояния, с $\ell = 3 - f$ -състояния. Електроните, които се намират в тях, се наричат съответно s -, p -, d - или f -електрони.

В изолирания атом енергията на електроните се определя само от главното квантово число n и от орбиталното квантово

число ℓ . На *фиг.55-1* схематично е показано запълването с електрони на нивата с главни квантови числа $n = 1, 2$ и 3 . В s -състоянията съгласно с принципа на Паули могат да се намират само по два електрона с противоположни спинове. В p -състоянията електроните се различават не само по спина, но и по магнитното квантово число, което може да има три различни стойности: $m = -1, 0$ и $+1$. Казва се, че p -състоянията са трикратно изродени: на една и съща енергия отговарят три състояния с различно m , във всяко от които се разполагат по два електрона. В общия случай степента на израждане g е равна на броя на стойностите, които може да приема магнитното число m : $g = 2\ell + 1$. Максималният брой на електроните, запълващи g -кратно изродено ниво, е

$$N = 2g = 2(2\ell + 1).$$

На *фиг.55-1* е използван един от общоприетите начини за означаване на електронната конфигурация на атомите: първата цифра показва главното квантово число, буквата – орбиталното квантово число, а горният индекс над буквата – броя на електроните в даденото състояние.



Фиг.55-1.

Разрешени и забранени енергетични зони

В изолирания атом дискретните електронни състояния са следствие от взаимодействието на електроните с атомното ядро, както и между отделните електрони на атома. В кристалите, поради малките разстояния между атомите, възникват нови сили: сили на взаимодействие между ядрата, между електроните, принадлежащи на различни атоми, и между всички електрони и всички ядра на кристала. Тези взаимодействия не са в състояние изцяло да разрушат изходната електронна структура на атомите. Затова съществува сходство между електронната структура на от-

делните атоми и на кристалите. От друга страна, в резултат на изброените допълнителни взаимодействия се появяват нови ефекти, характерни за твърдите тела:

1. На всяко енергетично ниво от отделния атом в кристала съответства определен енергетичен интервал (зона) с много близо разположени едно до друго разрешени състояния (нива).

2. Поради малките разстояния a между атомите в кристала електронните обвивки на съседните атоми, особено външните, частично се припокриват. Това означава, че електрон, намиращ се на дадено ниво, принадлежащо на един атом, може с определена вероятност да премине в същото ниво на съседен атом, а електронът от съседния атом да прескочи в друг атом и т.н. За такива преходи не е необходима допълнителна енергия и електроните от различни атоми могат непрекъснато да разменят местата си, т.е. те вече не принадлежат на конкретен атом, а на кристала като цяло.

Как възникват енергетичните зони? Нека N еднакви атома са разположени толкова далеч един от друг, че да не взаимодействат помежду си. Тогава на всяко дискретно ниво на отделния атом в разглеждания „кристал“ ще съответстват N нива с еднаква енергия, т.е. едно N -кратно изродено ниво (или Ng -кратно изродено, ако изходното ниво има g -кратно израждане). Когато атомите се приближават един към друг, всеки от тях попада в нарастващото електрично поле на своите съседи, което води до снемане на израждането: нивата, които първоначално са имали еднаква енергия, се разцепват (фиг.55-2). Разцепването се обяснява с това, че електроните от изроденото ниво взаимодействат

по различен начин с допълнителното електрично поле на съседните атоми, т.е. с периодичното кристално поле.

Следователно на дискретните нива в отделния атом в кристала съответстват енергетични зони с близо разположени енергетични нива. Разрешените зони са разделени от забранени зони: интервали от енергия, в които няма електронни състояния. Колкото по-външни са електроните, толкова по-силно е влиянието на периодичното кристално поле и разрешените зони са по-широки. Обратно, с увеличаване на енергията на електроните ширината на забранените зони намалява.

Пример 55.1. Оценете разликата в енергии на две съседни нива в s -зона с ширина $E = 1 \text{ eV}$ на кристал с $N = 10^{22}$ атома.

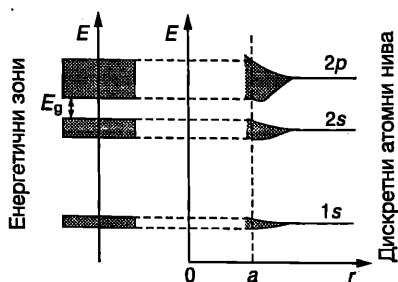
Решение. Да приемем с приближение, че нивата са разположени на еднаква енергия едно от друго. Тогава разликата в енергиите на две съседни нива е $\Delta E = E/N = 10^{-22} \text{ eV}$. Това е толкова малка стойност, че разпределението на електроните по енергия в рамките на една зона може да се смята за непрекъснато, т.е. да не се отчита дискретната енергетична структура. Но фактът, че броят на състоянията в зоната, макар и много голям, е все пак краен, играе важна роля за свойствата на кристалите.

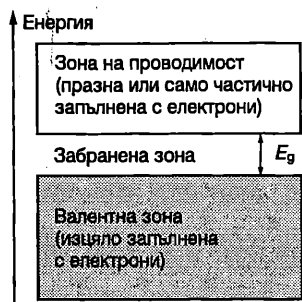
Валентна зона и зона на проводимост

Запълването на разрешените зони с електрони става по същия начин, както нивата в атомите: в съответствие с принципа на Паули на всяко ниво могат да се разполагат най-много два електрона. Тъй като броят на електроните в кристала е ограничен, запълнени се оказват само определен брой зони (разположени най-ниско по отношение на енергията им). Последната, изцяло запълнена с електрони зона, се нарича *валентна зона* (фиг.55-3). Разположената над нея частично запълнена или с изцяло свободни нива разрешена зона, се нарича *зона на проводимост*. Валентната зона и зоната на проводимост са разделени от *забранена зона* с ширина E_g .

Вътрешните зони (разрешени и забранени) почти не влияят на свойствата на твърдите тела и по-нататък няма да ги разглеждаме. Решаващо значение за свойст-

Фиг.55-2.





Фиг.55-3.

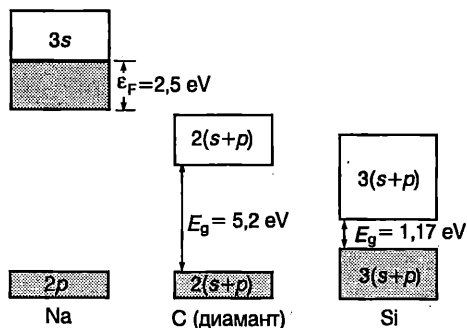
вата на кристалите има зоната на проводимост. Когато тя е частично запълнена с електрони, кристалът има висока електропроводимост, типична за металите. Диелектрици и полупроводници са кристали, в чиито зони на проводимост при температура $T = 0$ К няма електрони.

Метали

Типични представители на кристалите с частично запълнена зона на проводимост са алкалните метали, които имат само по един s -електрон в най-външната си електронна обвивка. Например при натрия ($2p^6 3s^1$) последните, изцяло запълнени с електрони нива, са $2p$ -нивата, от които се формира валентната зона. В $3s$ -нивата се намира само по един електрон (вместо 2 електрона) и те образуват запълнена до половината зона на проводимост (фиг.55-4).

Високата електропроводимост на металите се дължи на електроните от зоната на проводимост. Техните свойства се описват добре от модела на свободните електрони, който разгледахме. В зонната теория енергията на Ферми ϵ_F (за изроден електронен газ при температура 0 К) е равна на раз-

Фиг.55-4.



стоянието (енергетично) от дъното на зоната на проводимост до най-високото запълнено с електрони ниво (фиг.55-4).

Диелектрици и полупроводници

Типични представители на кристалите, в чиято зона на проводимост при температура 0 К няма електрони, са ковалентните кристали на елементите от IV група на периодичната система: диамантът C ($2s^2 2p^2$), силицият Si ($3s^2 3p^2$) и германият Ge ($4s^2 4p^2$). Характерно за тях е, че валентните s - и p -състояния не образуват самостоятелни зони. В кристала те се разцепват по такъв начин, че създават две смесени (хибридни) $s+p$ -зони. Четирите валентни електрона запълват изцяло долната (валентна) $s+p$ -зона, а в горната (проводима) $s+p$ -зона нивата остават свободни (фиг.55-4).

Електроните от валентната зона, когато тя е запълнена изцяло с електрони, не участват в пренасянето на електричния заряд при протичане на ток. Действително, за да се ускорят от външно електрично поле, те трябва да получат допълнителна енергия, т.е. да преминат в по-високоенергетични състояния. Това обаче е невъзможно, защото всички нива в зоната са запълнени с електрони и такива преходи противоречат на принципа на Паули. Преходи в свободните нива от зоната на проводимост също са невъзможни, защото за тях е необходима голяма енергия – трябва да се преодолее забранената зона E_g . Следователно кристалите с изцяло запълнена с електрони валентна зона и празна зона на проводимост при ниски температури са изолатори.

От гледна точка на зонната теория между диелектрици и полупроводници няма разлика – това са кристали, в чиято зона на проводимост при 0 К няма електрони. Делението е условно и се основава на ширината на забранената зона E_g . Към диелектриците се причисляват кристалите с големи E_g ($E_g \geq 3 \text{ eV}$). Например за диаманта $E_g = 5,2 \text{ eV}$.

При типичните полупроводници ширината на забранената зона е от порядъка (или по-малка) на 1 eV: $E_g = 1,17 \text{ eV}$ за Si и $E_g = 0,74 \text{ eV}$ за Ge при температура 0 К.

При $T = 0$ К чистите полупроводници са изолатори.

56. Електричен ток в полупроводници

Електрони и дупки

Полупроводников кристал е поставен в електрично поле. Електрон от валентната зона, който се движи със скорост $\mathbf{v}_i$, създава електричен ток $-e\mathbf{v}_i$. Когато валентната зона е изцяло запълнена с електрони, електричното поле не променя симетрията в тяхното разпределение по скорости: на всеки електрон със скорост $\mathbf{v}$ съответства електрон, който се движи със скорост $-\mathbf{v}$. Затова пълният ток $\mathbf{J}$, обусловен от движението на всичките N електрона от валентната зона, е равен на нула:

$$(56.1) \quad \mathbf{J} = -e \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i = 0.$$

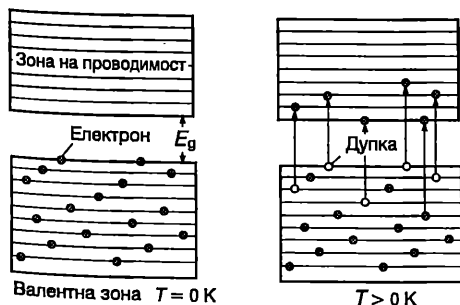
Нека един от електроните, който във валентната зона е имал скорост $\mathbf{v}_k$, да премине в зоната на проводимост. За да се определи токът, дължащ се на останалите във валентната зона електрони, трябва сумирането в уравнение (56.1) да се извърши по всички електрони от валентната зона, с изключение на k -тия електрон:

$$(56.2) \quad \mathbf{J} = -e \sum_{i=1 (i \neq k)}^N \mathbf{v}_i = -e \sum_{i=1}^N \mathbf{v}_i - (-e\mathbf{v}_k) = e\mathbf{v}_k,$$

където е отчетено равенство (56.1).

Следователно пълният ток, дължащ се на всички електрони от валентна зона с едно свободно място, е еквивалентен на тока, получен в резултат на движението

Фиг. 56-1.



само на една частица с положителен заряд $+e$, намираща се в свободното състояние. Тази частица се нарича *p-носител* или *дупка*. Подобно на електроните, дупките се характеризират с енергия, импулс и маса. Те запълват състоянията около върха на валентната зона по същия начин, както електроните заемат състоянията около дъното на зоната на проводимост (фиг.56-1). Дупките са квазичастици, т.е. те не са частици в обичайния смисъл на това понятие, а физичните им свойства произтичат от реалното движение на електроните от валентната зона.

Ефективна маса

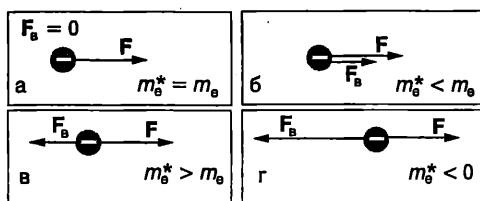
В класическата механика ускорението $\mathbf{a}$ на едно тяло и приложената към него сила $\mathbf{F}$ са свързани чрез уравнението $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, изразяващо втория принцип на механиката, където масата m е мярка за инертността на тялото. Как се ускорява под действие на външно електрично поле електрон, намиращ се в периодичното кристално поле? За решаването на тази задача могат да се използват два подхода:

1. Да се определи равнодействащата на всички вътрешни сили $\mathbf{F}_s$ и уравнението на втория принцип на механиката да се запише във вида $\mathbf{F} + \mathbf{F}_s = m\mathbf{a}$. Сложният характер на изменение на вътрешните сили (на кристалното поле) обаче прави невъзможно решаването на това уравнение.

2. Електронът се разглежда като свободна частица (квазичастица), а влиянието на периодичното електрично поле в кристала се отчита, като действителната инертна маса m_e на електрона се замени с т. нар. *ефективна маса* m_e^* . Тогава уравнението на втория принцип на механиката запазва вида си

$$(56.3) \quad \mathbf{F} = m_e^* \mathbf{a}.$$

Ефективната маса може не само да се различава от масата на свободния електрон, но дори да бъде отрицателна, което се илюстрира от фиг.56-2. Ако вътрешната сила $\mathbf{F}_s$ е насочена по посока на външната сила $\mathbf{F}$ (фиг.56-2б), електронът се движи с по-голямо ускорение от ускорението, с което би се движил свободен електрон под действие само на силата $\mathbf{F}$. Съг-



Фиг.56-2.

ласно с уравнение (56.3) това съответства на по-малка ефективна маса: инертността на електрона е по-малка и той по-бързо реагира на външно въздействие. От енергетична гледна точка в случая кинетичната енергия на електрона нараства не само в резултат на работата на външната сила, но и за сметка на намаляване на потенциалната му енергия в периодичното поле на кристала. Анализирайте самостоятелно случаите, показани на *фиг.56-2а, в и г*.

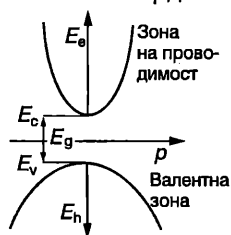
По аналогичен начин се въвежда величината ефективна маса на дупките. Доказва се, че електроните от дъното на зоната на проводимост и дупките от върха на валентната зона имат положителни ефективни маси. Тяхната кинетична енергия се записва във вида

$$(56.4) \quad E_e = \frac{p^2}{2m_e^*}; \quad E_h = \frac{p^2}{2m_h^*},$$

където m_e^* и m_h^* са ефективните маси на електроните и дупките (индексът „h“ идва от английски: hole – дупка).

Зависимостта на енергията на електроните и дупките от техния импулс p е показана на *фиг.56-3*. Енергията на електроните се отчита от дъното E_c на зоната на проводимост, а на дупките – от върха E_v на валентната зона. За повечето полупроводници $m_e^* < m_h^*$, поради което параболата $E_h(p)$ на *фиг.56-3* е начертана по-широка. Ефективните маси се определят експериментално и с тяхна помощ се описват електричните свойства на твърдите тела.

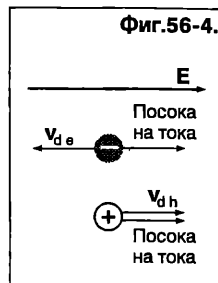
Фиг.56-3.



Собствена проводимост

Свободни токови носители в полупроводниците са електроните от зоната на проводимост и дупките от валентната зона. Полупроводници, в които появата на свободни токови носители е свързана с преходи на електрони от валентната зона в зоната на проводимост, се наричат полупроводници със *собствена проводимост*. Собствената проводимост е обусловена от едновременното движение на еднакъв брой електрони и дупки, *наречени собствени токови носители*. Концентрациите на двата типа собствени токови носители са еднакви: $n_i = p_i$, където n_i е концентрацията на собствените електрони, а p_i – на дупките.

В електрично поле с интензитет E електроните и дупките се движат в противоположни посоки, но създаденият от тях ток има една и съща посока – посоката на външното електрично поле (*фиг. 56-4*). За специфичната проводимост на полупроводниците, както при металите, е в сила уравнение (53.12), само че трябва да се отчете наличието на два типа токови носители:



$$(56.5) \quad \sigma = \sigma_e + \sigma_h = n_i e \mu_e + p_i e \mu_h,$$

където μ_e и μ_h са съответно подвижностите на електроните и на дупките. Формула (53.11) за подвижността също остава в сила, като масата на свободния електрон се заменя с ефективната маса на електроните и дупките:

$$(56.6) \quad \mu_e = \frac{e\tau}{m_e^*}; \quad \mu_h = \frac{e\tau}{m_h^*}.$$

За повечето полупроводници $m_e^* < m_h^*$, поради което електроните имат по-голяма подвижност.

Пример 56.1. Подвижността на електроните в германия (Ge) при стайна температура е $\mu_e = 4500 \text{ cm}^2/(\text{V}\cdot\text{s})$. Определете подвижността на дупките, ако на тях се дължи 44% от собствената проводимост на германия.

Решение. За германия

$$\sigma_h = 0,44\sigma = 0,44(\sigma_e + \sigma_h).$$

Концентрациите на собствените електрони и дупки са равни: в уравнение (56.5) полагаме $p_i = n_i$, съкращаваме на $e n_i$ и като отчетем горното равенство получаваме

$$\mu_h = 0,44(\mu_e + \mu_h); \quad \mu_h = \frac{0,44\mu_e}{0,56} \approx 3500 \frac{\text{cm}^2}{\text{V} \cdot \text{s}}.$$

Зависимост на собствената проводимост от температурата

При полупроводниците зависимостта $\sigma(T)$ се определя от два фактора: от температурната зависимост на подвижността (дължината на свободния пробег) и на концентрацията на свободните токови носители. Основните механизми на разсейване на токовите носители в полупроводниците са същите, както при металите: разсейване от трептенията на кристалната решетка и от примеси. Те дават степенна зависимост на подвижността от температурата:

$$(56.7) \quad \mu \propto T^{-\alpha} \quad (\alpha \leq 2,5).$$

Много по-съществен за проводимостта на полупроводниците е другият фактор, който при металите отсъства – температурната зависимост на концентрацията на свободните токови носители. При повишаване на температурата все повече електрони получават необходимата енергия, за да преодолеят забранената зона и да преминат в зоната на проводимост. Затова, както показват пресмятанията, концентрацията на собствените носители нараства с температурата по експоненциален закон:

$$(56.8) \quad n_i = p_i \propto \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right),$$

където E_g е ширината на забранената зона, а k – константата на Болцман.

Експонентата е много бързо променяща се функция, поради което множителят $\exp(-E_g/2kT)$ доминира в температурната зависимост на проводимостта. Значително по-слабата зависимост на подвижността от температурата във формула (56.5) може и да не се отчита. Приема се, че зависимостта $\sigma(T)$ се определя само от изменението на концентрацията на токови носители: σ

нараства с температурата по същия експоненциален закон, както концентрацията на токовите носители, т.е.

$$(56.9) \quad \sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{E_g}{2kT}\right),$$

където σ_0 е константа. Специфичното съпротивление $\rho = 1/\sigma$ намалява експоненциално при повишаване на температурата:

$$(56.10) \quad \rho = \rho_0 \exp\left(\frac{E_g}{2kT}\right).$$

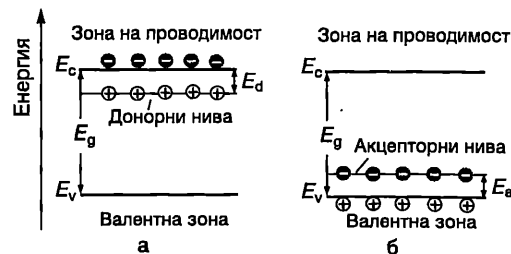
Чрез измерване на зависимостта $\rho(T)$ може да се определи експериментално ширината на забранената зона на полупроводник със собствена проводимост.

Донори и акцептори

Досега разглеждахме зонната структура на идеалните кристали, която се състои от редуващи се разрешени и забранени зони. Примесите в реалните кристали водят до нарушаване на идеалната периодичност на кристалното поле и в забранената зона възникват дискретни енергетични нива на примесите, на които могат да се разполагат електрони.

Да разгледаме силициев кристал, в който част от атомите на четиривалентния Si са заместени от петвалентния атом на фосфора (P). Четири от неговите валентни електрони образуват ковалентни връзки със съседните атоми на Si – енергетичните нива на тези електрони попадат във валентната зона. Петият електрон не участва в ковалентните връзки. Той е много по-слабо свързан към атома на фосфора P и енергетичното му ниво се оказва разположено под дъното на зоната на проводимост (фиг.56-5а). Ако на такъв електрон се

Фиг.56-5.



придаде допълнителна енергия E_d , наречена *енергия на активация*, той преминава в зоната на проводимост. На освободеното място се създава дупка. За разлика от дупките във валентната зона, дупките на примесните нива са неподвижни: те са локализирани около определен примесен атом и не участват в насоченото движение на зарядите при протичане на електричен ток.

Примеси, в резултат на чиято йонизация се създават свободни електрони в зоната на проводимост и свързани към примесите дупки, се наричат *донори*, а техните енергетични нива в забранената зона – *донорни нива*. Полупроводници, в които проводимостта се определя от донорите, се наричат електронни полупроводници, или полупроводници от *n*-тип.

Нека част от атомите на Si са заместени с тривалентния атом на индия (In). На индия не достига един електрон, за да образува четири ковалентни връзки с най-близките съседни атоми на Si. Такъв електрон може да се привлече от някой друг атом Si, за което е необходима енергия E_a . След захващане на електрон примесният атом се превръща в отрицателен йон. Съгласно със зонната теория процесът изглежда така: примесните атоми създават в забранената зона енергетични нива, разположени на разстояние E_a над върха на валентната зона (фиг.56-56). Електрон от валентната зона, след като получи допълнителна енергия E_a , наречена енергия на активация, се захваща на примесно ниво. Там той е пространствено локализиран около примесния атом, а във валентната зона се създава свободна дупка.

Примеси, които захватват електрони от валентната зона и по този начин създават в нея дупки, се наричат *акцептори*. Техните енергетични нива се наричат *акцепторни нива*. Полупроводници, в които проводимостта се определя от създадените от акцепторите дупки, се наричат полупроводници с *p*-тип *проводимост*.

Температурна зависимост на концентрацията на свободните токови носители

Ще разгледаме полупроводник от *n*-тип с донорни нива, разположени близо до дъното на зоната на проводимост ($E_d < E_g$).

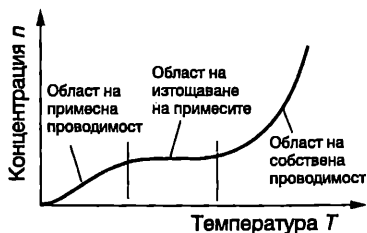
При абсолютната нула те са запълнени с електрони, а зоната на проводимост е свободна – кристалът е изолатор.

При повишаване на температурата най-напред започва термична активация на електрони от донорните нива, които преминават в зоната на проводимост. Доказва се, че концентрацията n на електроните нараства с температурата T по същия експоненциален закон $n \propto \exp(-E_d/2kT)$, както концентрацията на собствените носители, само че енергията на активация е равна на E_d (енергия на йонизация на донорите), а не на ширината на забранената зона E_g . Температурният интервал, в който проводимостта на кристала се определя от йонизацията на донорите, се нарича *област на примесна проводимост* (фиг.56-6).

При по-нататъшно повишаване на температурата се преминава в областта на *изтощаване на примесите*. В нея повечето донори вече са йонизирани и концентрацията на токовите носители почти не се изменя. От друга страна, температурата все още е твърде ниска, за да се появят голям брой собствени носители (тъй като $E_g \gg E_d$, за преминаване на електрони от валентната в проводимата зона е необходима много по-голяма енергия). При високи температури концентрацията на собствените електрони и дупки започва бързо да нараства и полупроводникът навлиза в *областта на собствена проводимост*. В нея получените при йонизацията на донорите електрони са само малка част от общия брой на токовите носители, т.е. доминират собствените носители.

Температурната зависимост на специфичната проводимост σ на примесните полупроводници има същия характер, както представената на фиг.56-6 зависимост $n(T)$.

Фиг.56-6.



57. *p-n*-преход

Получаване на *p-n*-преходи

Прогресът на полупроводниковата електроника е свързан преди всичко с използването на контакта между два примесни полупроводника с различен тип проводимост. Този контакт се нарича *p-n-преход*. Получаването му чрез механично притискане на два кристала е невъзможно поради неизбежното замърсяване и големия брой примеси и дефекти на граничните повърхности. През последните 50 години са разработени множество технологии за получаване на качествени *p-n*-преходи. Основната идея е следната: взема се полупроводников кристал от *n*- или от *p*-тип и на определена дълбочина в него се вкарват примеси, които създават проводимост от противоположния тип. Например, ако изходният кристал е от *n*-тип, внасят се акцептори, а в кристалите от *p*-тип – донори. Там, където са попаднали допълнителните примесни атоми, типът проводимост на кристала се изменя. На границата между областта с променен тип проводимост и останалата част на кристала (наречена подложка) възниква *p-n*-преход.

P-n-преходи се създават, например, чрез дифузия на донорни (акцепторни) примеси в полупроводникови кристали от *p*-тип (*n*-тип). Дълбочината, на която проникват примесите и мястото на *p-n*-прехода се определят от температурата и времето за провеждане на дифузията.

P-n-преходи с много малки размери и точно контролируема дълбочина се създават чрез йонна имплантация (йонно легиране). Сноп от йони с еднаква енергия, получен в специален ускорител, се насочва към повърхността на кристала и йоните се внедряват като примеси в кристалната решетка. В зависимост от енергията си те проникват на различна дълбочина. Например йоните на бора B^+ при енергия 20 keV проникват в силициева пластина на дълбочина 0,071 μm , а при енергия 300 keV – на дълбочина 0,559 μm .

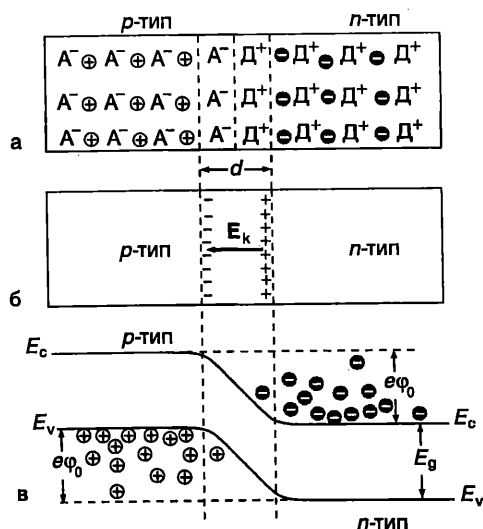
Широко приложение намират и епитаксиалните методи за изготвяне на *p-n*-

преходи. При тях върху подложка с определен тип проводимост израства от газова или течна фаза тънък слой от същия полупроводник, но с противоположния тип проводимост – между слоя и подложката се създава *p-n*-преход.

Равновесно състояние на *p-n*-преход

Необичайните свойства на *p-n*-преходите, които определят приложението им в полупроводниковите прибори, се дължат на енергетичния (потенциален) бариер, възникващ на границата между *p*- и *n*-областите. За да разберем как се създава този бариер и какво влияние оказва той на електричните свойства на нееднородния полупроводник с *p-n*-преход, отначало мислено ще разделим двете части на кристала (фиг.57-1а). В *n*-областта има голямо количество свободни електрони, получени при йонизацията на донорите, и положително заредени донори D^+ . Освен това се съдържат и собствени дупки, чиято концентрация е много по-малка (например концентрацията p_i на собствените дупки е около 10^6 пъти по-малка от концентрацията n на примесните електрони). Електроните в *n*-областта се наричат *основни токови носители*, а дупките – *неосновни токови носители*. Обратно, в *p*-областта основни токови носители са дупките, чиято концентрация е много по-голяма от кон-

Фиг.57-1.



центрацията на неосновните носители – собствените електрони. P -областта съдържа също така отрицателно заредени акцептори A^- . Когато двете части на кристала се приведат в контакт, възниква дифузионен поток от електрони, които се движат от областта с висока концентрация на електрони (n -областта) към мястото, където тяхната концентрация е ниска (p -областта). По същия начин възниква дифузионен поток на дупки от p -областта към n -областта. В резултат на дифузията броят на свободните заряди в област с ширина d (от порядъка на $10^{-4} - 10^{-6}$ cm), разположена от двете страни на p - n -прехода, силно намалява. В този тънък преходен слой остават заредените неподвижни донори и акцептори, които създават т. нар. *контактното електрично поле* (фиг.57-1б) с интензитет E_k , насочен от n -областта (където са положително заредените донори) към p -областта (с отрицателно заредени акцептори). Контактното поле пречатства процеса на дифузия. То се стреми да върне движещите се към прехода дупки в p -областта, а електроните – в n -областта.

Да означим с φ_0 потенциалната разлика между двата края на преходния слой. Когато електрон преминава от n -областта в p -областта, в преходния слой силите на контактното електрично поле извършват отрицателна работа и кинетичната енергия на електрона намалява с $e\varphi_0$. Същото се отнася за дупките, които преминават през преходния слой от p - в n -областта – тяхната енергия също намалява с $e\varphi_0$. Казва се, че за основните токови носители в областта на p - n -прехода възниква енергетичен бариер с височина $e\varphi_0$. За да могат да преодолеят този бариер, те трябва да имат енергия, по-голяма от $e\varphi_0$. Енергетичният бариер води до изкривяване на валентната и проводимата зона в областта на p - n -прехода (фиг.57-1в).

При температура T средната кинетична енергия на свободните електрони и дупки е от порядъка на kT . При стайна температура $kT \ll e\varphi_0$. Затова само много малка част от основните токови носители имат необходимата енергия, за да преодолеят енергетичния бариер. Концентрацията на тези „горещи“ електрони и дупки е про-

порционална на $\exp(-e\varphi_0/kT)$. Следователно плътността j_n на дифузионния ток на електроните, преминаващи през преходния слой от n - в p -областта, и плътността j_p на дифузионния ток, обусловен от движението на дупките от p -областта към n -областта, също ще бъдат пропорционални на $\exp(-e\varphi_0/kT)$.

Както беше отбелязано, в n -областта има и неосновни токови носители – дупки. Когато такава дупка достигне преходния слой, тя се захваща от контактното поле E_k и се прехвърля в p -областта. Аналогично неосновните токови носители (електроните) от p -областта, достигнали преходния слой, се ускоряват от контактното поле и преминават в n -областта. За неосновните носители енергетичен бариер не съществува. Тяхното движение под действие на контактното поле поражда т.нар. *дрейфови токове* през p - n -прехода. В състояние на равновесие се установява такава височина на потенциалния бариер, при която плътността j_n на дифузионния ток на електроните от n -областта към p -областта се изравнява с плътността на дрейфовия ток j_{ns} на електроните от p - към n -областта, а плътността j_p на дифузионния ток на дупките от p - към n -областта е равна на плътността j_{ps} на противоположно насочения дрейфов ток на дупките (от n - към p -областта):

$$(57.1) \quad j_n = j_{ns}; \quad j_p = j_{ps}.$$

В равновесното състояние пълният ток през p - n -прехода е нула:

$$(57.2) \quad j = (j_n + j_p) - (j_{ns} + j_{ps}) = 0,$$

където са отчетени посоките на токовете.

Доказва се, че когато концентрацията на основните токови носители е много по-голяма от концентрацията на неосновните носители (собствените електрони и дупки), височината на енергетичния бариер при равновесното състояние на p - n -прехода е приблизително равна на ширината на забранената зона на полупроводника: $e\varphi_0 \approx E_g$. За германиеви p - n -преходи бариерът е около 0,7 eV, а за силициевите – около 1 eV. Тъй като при стайна температура ($T = 300$ K) $kT = 0,026$ eV, виждаме, че за силициевите и германиевите p - n -преходи се изпълнява условието $kT \ll e\varphi_0$.

Прав ток

Да приложим към p - n -преход външно напрежение U . За целта свързваме p -областта към положителния полюс на източник на напрежение, а n -областта – към отрицателния полюс (фиг.57-2а). При такова свързване външното електрично поле $E_{\text{вн}}$ е насочено в противоположна посока на контактното електрично поле E_k и резултантното поле E в преходния слой намалява (намалява и ширината d на преходния слой). Енергетичният барьер също се понижава и става $e\phi_0 - eU$ (фиг.57-2б). Броят на основните носители, които имат необходимата енергия за преодоляване на този по-нисък барьер, е пропорционален на

$$\exp\left(-\frac{e\phi_0 - eU}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{e\phi_0}{kT}\right) \exp\left(\frac{eU}{kT}\right),$$

т.е. нараства $\exp(eU/kT)$ пъти. Също толкова пъти нараства и плътността на дифузионните токове през p - n -прехода. Плътноста на дрейфовите токове обаче не се изменя, тъй като те не се влияят от височината на бариера. Като отчетем, че в равновесното състояние на p - n -прехода плътностите на дифузионните и дрейфовите токове са били еднакви (равенства (57.2)), за дифузионните токове при външно напрежение U върху прехода получаваме

$$(57.3) \quad j_n = j_{ns} \exp(eU/kT); \quad j_p = j_{ps} \exp(eU/kT).$$

Заместваме j_n и j_p от уравнения (57.3) в (57.2) и получаваме

$$(57.4) \quad j_{np} = j_s \left[\exp\left(\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right],$$

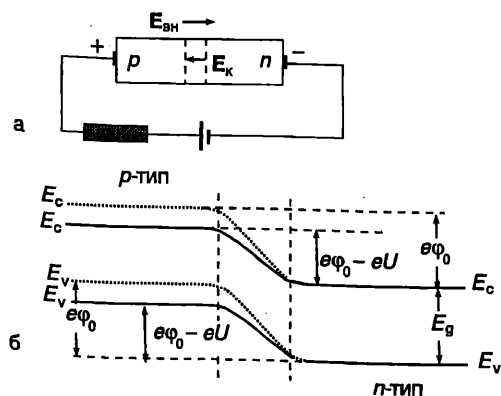
където $j_s = j_{ns} + j_{ps}$ е общият дрейфов ток през p - n -прехода, обусловен от движението на неосновните токови носители под действие на контактното електрично поле.

Казва се, че на p - n -прехода е подадено *право напрежение* U , а токът j_{np} , който тече през прехода, се нарича ток в *права посока*, или за по-кратко *прав ток*.

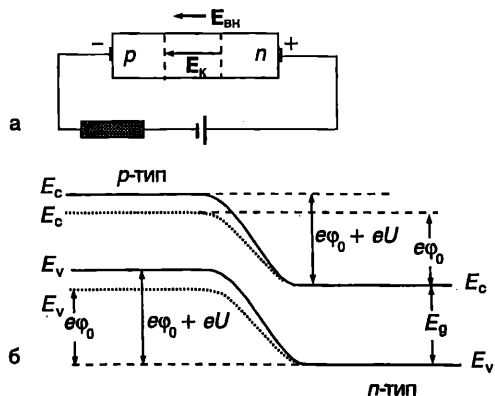
Обратен ток

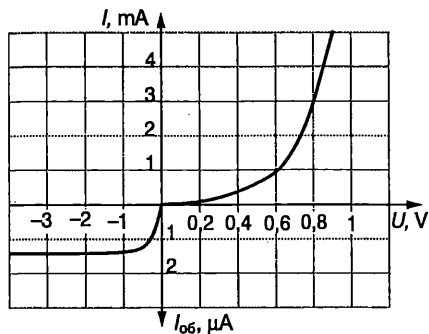
Да разменим полксите на източника: p -областта свързваме с отрицателния полюс, а n -областта – с положителния полюс (фиг. 57-3а). При такова свързване казваме, че на p - n -прехода е подадено *обратно напрежение*. В този случай външното електрично поле усилва контактното поле и потенциалната разлика между двата края на преходния слой нараства – енергетичният барьер става $e\phi_0 + eU$ (фиг.57-3б). Броят на електроните, които имат необходимата енергия, за да преодолеят този висок барьер, е $\exp(eU/kT)$ пъти по-малък от броя на електроните, които са могли да преодо-

Фиг.57-2. а) На p - n -прехода е подадено право напрежение U . **б)** Правото напрежение намалява енергетичния барьер: с шрих е показана енергетичната диаграма на p - n -прехода в равновесното състояние, а с плътни линии – след подаването на право напрежение U .



Фиг.57-3. а) На p - n -прехода е подадено обратно напрежение $-U$. **б)** Обратното напрежение увеличава енергетичния барьер: с шрих е показана енергетичната диаграма на p - n -прехода в равновесното състояние, а с плътни линии – след подаването на обратно напрежение $-U$.





Фиг.57-4. Волтамперна характеристика на германиев $p-n$ -преход.

леят по-ниския бариер $e\phi_0$ в равновесно състояние на прехода. Затова плътността на дифузионните токове през бариера също намалява $\exp(eU/kT)$ пъти и става

$$(57.5) j_n = j_{ns} \exp(-eU/kT); j_p = j_{ps} \exp(-eU/kT).$$

Заместваме j_n и j_p в уравнение (57.2) и определяме плътността на пълния ток

$$(57.6) \quad j_{\text{об}} = (j_{ns} + j_{ps}) \left[\exp\left(-\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right] \\ = j_s \left[\exp\left(-\frac{eU}{kT}\right) - 1 \right].$$

Токът, който тече при подаване на обратно напрежение $-U$ на $p-n$ -прехода, се нарича *обратен ток*. Когато големината на обратното напрежение нараства, експонентата $\exp(-eU/kT) \rightarrow 0$, а изразът $[\exp(-eU/kT) - 1] \rightarrow -1$. Тогава плътността на обратния ток $j_{\text{об}}$ през $p-n$ -прехода клони към граничната стойност

$$(57.7) \quad |j_{\text{об}}| = j_s,$$

наречена *ток на насищане*. Токът на насищане се определя от дрейфовото движение на неосновните носители под действие на контактното електрично поле. Обратният ток достига насищане практически още при $eU \approx 4 kT$, т.е. при $U \approx 0,1$ V. На фиг.57-4 е показана волтамперната характеристика на $p-n$ -преход, която се описва с уравнения (57.4) и (57.6). За правия ток I и за обратния ток $I_{\text{об}}$ е използван различен мащаб, тъй като $I \gg I_{\text{об}}$.

Пример 57.1. Пресметнете отношението $j_{\text{пр}}/j_{\text{об}}$ на плътностите на правия и обратния ток през $p-n$ -преход при температура $T = 300$ K, за право напрежение $0,52$ V и обратно напрежение $-0,52$ V.

Решение. При $T = 300$ K и $U = 0,52$ V $eU/kT = 20$. Обратният ток е достигнал насищане: $j_{\text{об}} = j_s$, а токът в права посока е $j_{\text{пр}} = j_s e^{20}$. Търсеното отношение е

$$j_{\text{пр}}/j_{\text{об}} = e^{20} \approx 5 \cdot 10^8.$$

Следователно при такива напрежения $p-n$ -преходът практически има едностранна проводимост. Свойството на $p-n$ -преходите да пропускат ток само в една посока намира широко приложение в полупроводниковите прибори.

Пробив на $p-n$ -преход

Ако непрекъснато увеличаваме обратното напрежение, достига се до т. нар. *пробивно напрежение* $U_{\text{проб}}$, при което обратният ток през $p-n$ -прехода рязко нараства (за германиев $p-n$ -преход пробивното напрежение е от порядъка на 10^3 V). Това явление се нарича *пробив* на $p-n$ -прехода. В зависимост от физичната природа на процесите, които предизвикват рязкото нарастване на тока, различаваме *топлинен*, *лавинен* и *тунелен* пробив.

Когато отделената при протичане на тока топлина не се отвежда от областта на прехода, температурата се повишава, което от своя страна води до нарастване на обратния ток. При по-голям ток се отделя по-голямо количество топлина, температурата отново се повишава, токът още повече нараства и т.н., докато се достигне до топлинния пробив. Лавинният пробив се предизвиква от ударната йонизация на полупроводника под действие на силното електрично поле, което се създава в переходния слой при големи обратни напрежения. Ако переходният слой е много тънък, контактното електрично поле може да предизвика т.нар. тунелни преходи. Явлението има квантовомеханичен характер – енергията на електроните не е достатъчна, за да „прескочат“ над високия енергетичен бариер, но те преминават чрез квантов тунелен ефект през него и обратният ток скокообразно нараства.

58. Работа и мощност на електричния ток

Последователно и успоредно свързване на резистори

На *фиг.58-1* а са показани два проводника (резистора) със съпротивление R_1 и R_2 , за които е в сила законът на Ом. Резисторите са свързани последователно. При такава свързване токът I през тях е еднакъв, а напрежението U между точките A и B е равно на сумата от напреженията върху отделните резистори: I - еднакъв

$$(58.1) \quad U = U_1 + U_2 = IR_1 + IR_2.$$

Двата резистора могат да се заменят с еквивалентен резистор със съпротивление R (*фиг.58-1* б), през който тече същият ток I . От закона на Ом следва равенството

$$(58.2) \quad U = RI.$$

Като се приравнят десните страни на уравнения (58.1) и (58.2), за еквивалентното съпротивление на двата последователно свързани резистора се получава

$$(58.3) \quad R = R_1 + R_2.$$

Получената формула се обобщава за по-голям брой последователно свързани резистори:

$$(58.4) \quad R = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$$

Когато резисторите са свързани успоредно (*фиг.58-2* а), напрежението U върху тях е еднакво. Сумата от токовете I_1 и I_2 , които текат през двата резистора, е равна на тока I в останалата част от веригата:

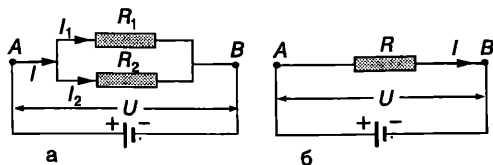
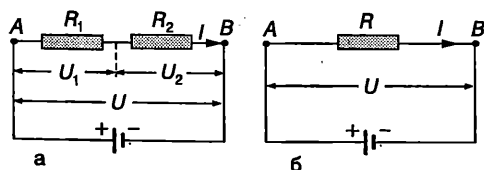
$$(58.5) \quad I = I_1 + I_2.$$

От закона на Ом следват равенствата

$$(58.6) \quad I_1 = \frac{U}{R_1}; \quad I_2 = \frac{U}{R_2}.$$

Двата резистора са еквивалентни на

Фиг.58-1.



Фиг.58-2.

един резистор, чието съпротивление е такава, че при включването му между точките A и B (*фиг.58-2* б) във веригата да тече същият ток I . Токът I от закона на Ом е

$$(58.7) \quad I = \frac{U}{R}.$$

Заместваме токовете I , I_1 и I_2 в уравнение (58.5) и получаваме

$$(58.8) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Еквивалентното съпротивление на по-голям брой успоредно свързани резистори се изразява с формулата

$$(58.9) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots$$

Пример 58.1. Намерете еквивалентното съпротивление между точките A и B на веригата от *фиг.58-3* а.

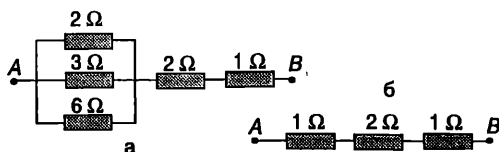
Решение. Ще решим задачата „стъпка по стъпка“. Най-напред ще определим еквивалентното съпротивление R_1 на трите успоредно свързани резистора:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{2 \Omega} + \frac{1}{3 \Omega} + \frac{1}{6 \Omega} = \frac{6}{6 \Omega} \text{ или } R_1 = 1 \Omega.$$

Следващата стъпка е да начертаям нова схема, в която трите успоредно свързани резистора са заменени с един резистор с еквивалентно съпротивление 1Ω . Тази схема съдържа три последователно свързани резистора (*фиг.58-3* б). Тяхното еквивалентно съпротивление е

$$R = 1 \Omega + 2 \Omega + 1 \Omega = 4 \Omega.$$

Фиг.58-3.



Работа на електричния ток

За да се поддържа насоченото движение на свободните заряди, т.е. протичането на електричен ток, вътре в проводника трябва да съществува електрично поле. Такова поле се създава след като проводникът се свърже към двата полюса на източник на ток – батерия, акумулатор и т.н. Силовите линии на полето са насочени от положителния към отрицателния полюс на източника. Потенциалът на електричното поле намалява по посока на силовите линии. Затова левият край на проводника от *fig.58-4* (точка *M*) има по-висок потенциал от десния край (точка *N*): $\varphi_M > \varphi_N$. Напрежението между двата края на проводника е равно на потенциалната разлика между точките *M* и *N*: $U = \varphi_M - \varphi_N$. За да се опростят разглежданията може да се приеме, че електричният ток се обуславя от движението на положителни заряди. Нека за време dt от точка *M* до точка *N* по проводника се пренася електричен заряд dq . При това електричните сили на полето извършват положителна работа $dA = dqU$. Ако се изрази зарядът чрез тока, $dq = Idt$, за работата на полето се получава

$$(58.10) \quad dA = UIdt.$$

Работата на електричните сили при протичане на ток се нарича *работа на тока*. Работата на тока в даден участък от веригата (например в участъка между точките *M* и *N* от електрическата верига на *fig.58-4*) е равна на произведението от напрежението U върху този участък, тока I и интервала от времето dt .

В резултат на работата на тока електричната потенциална енергия (електроенергията) намалява – тя се преобразува в друг вид енергия. Действително, в точка *M* (*fig.58-4*) зарядът dq има електрична потенциална енергия $W_M = dq\varphi_M$. Когато той премине в точка *N*, потенциалната му енергия намалява и става $W_N = dq\varphi_N$. На-

малението на електричната потенциална енергия на заряда е равно на работата на тока:

$$W_M - W_N = dq(\varphi_M - \varphi_N) = dqU = dA.$$

Закон на Джаул–Ленц

Как електронната теория обяснява нагряването на проводниците? Електричното поле ускорява електроните и тяхната електрична потенциална енергия се превръща в кинетична енергия на насоченото движение. Електроните обаче не се движат безпрепятствено в метала. Те се удрят в положителните йони и след всеки удар скоростта на насоченото им движение става нула: електроните предават кинетичната си енергия на йоните. След това те отново се ускоряват от полето, пак се удрят в йоните и т.н. В резултат на големия брой удари енергията на хаотичното топлинно движение на йоните около равновесните им положения (трептене) нараства. По този начин електричната енергия се превръща във вътрешна енергия. Температурата на проводника се повишава и той започва да отдава топлина на околната среда. (Например нагревателят на бойлера загрява водата, а електрическата печка – въздуха в стаята.) От закона за запазване на енергията следва, че количество топлина δQ , което се отделя в проводника, е равно на работата dA на тока:

$$(58.11) \quad \delta Q = dA = UIdt.$$

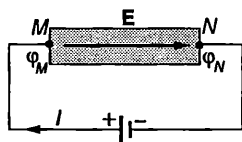
От закона на Ом се изразява напрежението чрез тока I и съпротивлението R на проводника, $U = RI$, и за отделеното количество топлина се получава

$$(58.12) \quad \delta Q = I^2 R dt.$$

Тази формула изразява математически закона на Джаул–Ленц:

Количеството топлина, отделено в проводник, по който тече ток, е равно на произведението от квадрата на тока, съпротивлението на проводника и времето за протичане на тока.

Фиг.58-4.



Мощност на тока

Работата на тока за единица време се нарича мощност на тока. От формула (58.10) за мощността на тока се получава

$$(58.13) \quad P = \frac{dA}{dt} = UI.$$

С помощта на закона на Ом $U = RI$ формулата за мощността на тока може да се запише още по два начина:

$$(58.14) \quad P = I^2 R;$$

$$(58.15) \quad P = \frac{U^2}{R}.$$

Формулата $P = I^2 R$ е удобно да се използва при последователно свързани проводници (консуматори), тъй като тогава през всички консуматори тече един и същ ток I . Когато консуматорите са свързани успоредно, по-удобна за пресмятане на мощността на тока е формулата $P = U^2/R$, защото напрежението U върху всички консуматори е еднакво.

Пример 58.2. Електрическа лампа с мощност $P = 100 \text{ W}$ работи при напрежение $U = 220 \text{ V}$. Определете: а) съпротивлението R на лампата; б) електроенергията, която лампата консумира за 24 часа.

Решение. а) $R = U^2/P = 484 \Omega$.

б) Консумираната електроенергия е равна на работата на тока:

$$A = Pt = (100 \text{ W})(86\,400 \text{ s}) = 8,64 \cdot 10^6 \text{ J}$$

или

$$A = Pt = (0,1 \text{ kW})(24 \text{ h}) = 2,4 \text{ kWh}.$$

В бита електроенергията се измерва в киловатчаса (kWh). Един киловатчас е електроенергията, която консумира потребител с мощност 1 kW за време 1 час:

$$1 \text{ kWh} = (1000 \text{ W})(3600 \text{ s}) = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}.$$

Пример 58.3. Токът през нагревател с постоянно съпротивление $R = 30 \Omega$ се изменя с течение на времето t по закона $I = ct$, където $c = 0,3 \text{ A/s}$. Определете количеството топлина, което ще се отдели в проводника за интервала време от $t_1 = 1 \text{ s}$ до $t_2 = 3 \text{ s}$.

Решение. Отделеното за безкрайно малък интервал от време dt количество топлина се изразява от закона на Джаул-Ленц $\delta Q = I^2 R dt$. Тъй като токът не е постоянен, отделеното за

интервала от време $t_2 - t_1$ количество топлина Q се определя чрез интегриране:

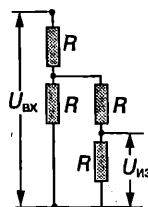
$$\begin{aligned} Q &= \int_{t_1}^{t_2} I^2 R dt = \int_{t_1}^{t_2} c^2 t^2 R dt = \\ &= \frac{c^2 R}{3} (t_2^3 - t_1^3) = 23,4 \text{ J}. \end{aligned}$$

Задачи

1. Два резистора, свързани последователно, имат общо съпротивление 20Ω . При успоредно свързване съпротивлението е $3,2 \Omega$. Определете съпротивлението на всеки резистор.

2. На колко равни части трябва да се разреже проводник със съпротивление 36Ω , така че при успоредното им свързване да се получи проводник със съпротивление 1Ω ?

3. Схемата от фиг.58-5 се нарича делител на напрежение. Определете колко пъти изходното напрежение $U_{из}$ е по-малко от входното напрежение $U_{вх}$.



Фиг.58-5.

4. Колко електроенергия консумира радиатор с мощност 2 kW за 8 часа?

5. Цветен телевизор консумира мощност 105 W . Колко електроенергия ще платите, ако в продължение на 1 месец гледате всеки ден средно по 4 часа телевизия? Цената на електроенергията вземете от последната сметка, която е платило семейството ви.

6. Компактдисково устройство черпи ток 300 mA при напрежение 9 V . Колко е консумираната от устройството мощност?

7. Лампа с мощност 40 W е предназначена за работа при напрежение 12 V . Две такива лампи се свързват последователно към акумулатор с напрежение 12 V . Колко е мощността на всяка лампа? Приемете, че съпротивлението на лампата е постоянно.

8. Бързовар със съпротивление 110Ω , по който тече ток 2 A , е потопен в съд с 1 kg вода. С колко градуса ще се повиши температурата на водата за 7 min ? Топлообменът със стените на съда и с околния въздух се пренебрегва. Специфичният топлинен капацитет на водата е $c = 4,2 \cdot 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.

9. Сноп от неутрони с енергия 16 MeV попада върху метална пластинка. Определете количеството топлина, което се отделя в пластинката, ако снопът е еквивалентен на токов импулс $I = 20 \mu\text{A}$ с продължителност $\tau = 1,0 \text{ ms}$.

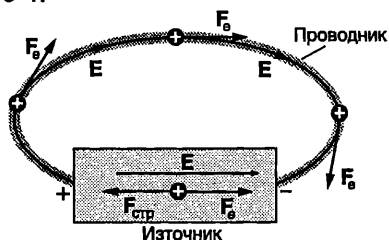
59. Електрически вериги

За поддържането на тока в затворена електрическа верига е необходим източник, който да преобразува някакъв друг вид енергия в електрична енергия. Сухите елементи (батерии) и акумулаторите преобразуват химичната енергия, генераторите – механичната енергия, а слънчевите батерии – светлинната енергия. Ще се спрем по-подробно на основните характеристики на източниците на електричен ток и ще обобщим закона на Ом за затворена електрическа верига.

Електродвижещо напрежение

На *фиг.59-1* схематично е показана електрическа верига, съставена от източник и еднороден проводник. Когато положителен заряд dq премине от положителния до отрицателния полюс на източника по външната част на веригата, електричните сили F_e на полето са насочени по посока на движението и извършват положителна работа, при което електричната потенциална енергия се превръща във вътрешна енергия: проводникът се загрява. За да се поддържа токът във веригата, след като достигне до отрицателния полюс на източника, зарядът dq трябва да се прехвърли отново на положителния полюс. Вътре в източника обаче електричните сили имат противоположна посока – те се противопоставят на преминаването на заряда през източника. Затова поддържането на тока във веригата е възможно само ако вътре в източника на електричните заряди действат допълнителни сили $F_{стр}$, чиято посока е противоположна на посоката на електричните сили (*фиг.59-1*). Прието е тези сили да се наричат *странични сили*.

Фиг.59-1.



Природата на страничните сили може да е различна. Например в батериите и акумулаторите това са сили, възникващи при химични реакции.

При пренасянето на електричния заряд dq вътре в източника страничните сили извършват положителна работа $dA_{стр}$ и възстановяват електричната потенциална енергия, която е имал зарядът dq преди да премине през проводника (*фиг.59-1*).

Отношението на работата на страничните сили $dA_{стр}$ за пренасяне на положителен заряд dq от отрицателния до положителния полюс вътре в източника към големината dq на този заряд се нарича *електродвижещо напрежение* (ЕДН) на източника:

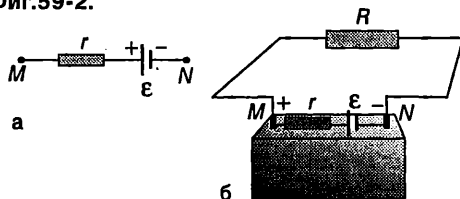
$$(59.1) \quad \mathcal{E} = \frac{dA_{стр}}{dq}.$$

Единицата за ЕДН е волт (V). Електродвижещото напрежение е $\mathcal{E} = 1 \text{ V}$, ако при пренасяне през източника на заряд 1 C страничните сили извършват работа 1 J .

Вътрешно съпротивление на източник

Ако свържем лампа за джобно фенерче към батерия, ще установим, че се нагрява не само лампата, но и батерията. При протичане на електричен ток в затворена верига количество топлина се отделя както в консуматорите, така и в самите източници. Това показва, че източниците също имат електрично съпротивление, което се нарича *вътрешно съпротивление* на източника и се бележи с r . За генератора r е съпротивлението на неговата намотка, а за батериите и акумулаторите – съпротивлението на химичните смеси или на електролитите, запълващи пространството между двата електрода. На електрическите схеми вътрешното съпротивление се представя като допълнителен резистор r , свързан последователно на източника (*фиг.59-2а*).

Фиг.59-2.



Свежите батерии, с които се запазва транзисторният радиоприемник или дистанционното управление на телевизора, имат малко вътрешно съпротивление (части от ома). Когато батерията старее и се изтощава, вътрешното ѝ съпротивление нараства до няколко ома. Акумулаторите имат по-малко вътрешно съпротивление от батериите ($0,001 \Omega - 0,1 \Omega$).

Закон на Ом за цялата верига

На *фиг.59-26* е показана затворена електрическа верига, съставена от източник с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r и от резистор със съпротивление R . Съпротивлението на проводниците, свързващи резистора с полюсите на източника, е много малко и може да се пренебрегне. Веригата се разделя на две части: външна част – в случая това са резисторът и съединителните проводници, и вътрешна част – източникът с неговото електродвижещо напрежение и вътрешно съпротивление. На *фиг.59-26* точките M и N (двата полюса на източника) свързват външната и вътрешната част от веригата. Ако за време dt през напречното сечение на проводниците преминава заряд dq , същият заряд преминава и през източника, при което страничните сили извършват работа

$$(59.2) \quad dA_{\text{стр}} = \mathcal{E} dq = \mathcal{E} Idt,$$

където зарядът dq е представен чрез тока I във веригата: $dq = Idt$.

При протичането на тока във външната и вътрешната част на веригата се отделя количество топлина, което се определя от закона на Джаул–Ленц

$$(59.3) \quad \delta Q = I^2 R dt + I^2 r dt.$$

Съгласно със закона за запазване на енергията $\delta Q = dA_{\text{стр}}$. Приравняват се десните страни на равенства (59.2) и (59.3), съкращава се на Idt и се получава

$$(59.4) \quad \mathcal{E} = IR + Ir.$$

Произведението от големината на тока и съпротивлението на определена част от веригата се нарича *паг на напрежението* върху тази част от веригата. Уравнение (59.4) показва, че сумата от падовете на напрежението върху външната част (RI) и вътрешната част (Ir) от затворена електрическа верига е равна на ЕДН

$\mathcal{E}$ на източника, свързан във веригата.

Уравнение (59.4) може да се запише във вида

(59.5)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}.$$

Тази зависимост се нарича закон на Ом за цялата верига: *Токът I в една електрическа верига е равен на отношението на електродвижещото напрежение $\mathcal{E}$ на източника към пълното съпротивление $R + r$ на веригата.*

Пример 59.1. Колко е максималният ток, който може да се черпи от акумулатор с ЕДН $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$ и вътрешно съпротивление $r = 0,01 \Omega$?

Решение. От закона на Ом за цялата верига (59.5) следва, че токът е максимален при $R = 0$, т.е. когато двата полюса на акумулатора се свържат с проводник с пренебрежимо малко съпротивление. Казваме, че във веригата е станало *късо съединение*. Токът при късо съединение се определя от вътрешното съпротивление на източника:

$$I_{\text{max}} = \frac{\mathcal{E}}{r} = \frac{12 \text{ V}}{0,01 \Omega} = 1200 \text{ A}.$$

При късо съединение източникът може да се повреди, а съединителните проводници – да се разтопят.

Пример 59.2. Консуматор със съпротивление R е свързан към източник с ЕДН $\mathcal{E}$ и вътрешно съпротивление r (*фиг.59-26*). Докажете, че мощността P на тока през консуматора е максимална при $R = r$.

Решение. Мощността на тока през консуматора е $P = I^2 R$. Изразяваме тока от закона на

Ом за цялата верига $I = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$ и получаваме

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R+r)^2}.$$

За да определим максимума на функция-та $P(R)$, намираме нейната първа производна и я приравняваме на нула:

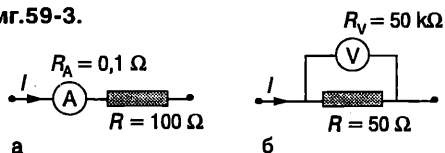
$$\frac{dP}{dR} = \frac{\mathcal{E}^2 (r-R)}{(R+r)^3} = 0,$$

откъдето получаваме, че мощността е максимална при $R = r$.

Електроизмервателни уреди

Електричният ток се измерва с *амперметър*, напрежението – с *волтметър*, а съпротивлението – с *омметър*. Амперметърът винаги се свързва последователно в електрическата верига, а волтметърът се свързва успоредно към тази част от веригата, чието напрежение ще се измерва. Амперметрите имат малко съпротивление, а волтметрите – голямо. В редица случаи съпротивлението на амперметъра е много по-малко от съпротивлението на резисторите, към които той е свързан последователно (фиг.59-3а). Тогава то може да се пренебрегне. Амперметър с пренебрежимо малко съпротивление, чието свързване в дадена електрическа верига не оказва влияние на токовете, които текат във веригата, се нарича *идеален амперметър*. Съпротивлението на *идеалния волтметър* е много по-голямо от съпротивлението на участъка от веригата, успоредно на който е свързан волтметърът (фиг.59-3б). Идеалният волтметър не променя напрежението върху дадения участък от веригата. Бихме могли още да кажем, че идеалният амперметър има нулево съпротивление, а съпротивлението на идеалния волтметър е безкрайно голямо. При решаване на задачи, в зависимост от конкретните данни, трябва да преценим дали може да разглеждаме амперметрите и волтметрите като идеални, или трябва да отчетем тяхното съпротивление.

Фиг.59-3.

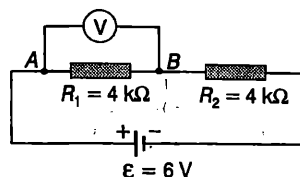


Пример 59.3. Колко е напрежението, което измерва волтметърът в електрическата верига, показана на фиг.59-4? Разгледайте три случая: а) волтметърът е идеален; б) съпротивлението на волтметъра е $R_V = 4 \text{ k}\Omega$; в) $R_V = 10 \text{ M}\Omega$.

Вътрешното съпротивление на източника се пренебрегва.

Решение. а) Идеалният волтметър има безкрайно голямо съпротивление, поради което включването му успоредно на резистора R_1 не променя съпротивлението между точките А и В от ве-

Фиг.59-4.



ригата. Тъй като двата последователно свързани резистора имат еднакво съпротивление, напрежението върху тях също е еднакво: $U_1 = U_2 = \varepsilon/2 = 3 \text{ V}$. Следователно идеалният волтметър ще измерва напрежение $U_1 = 3 \text{ V}$.

б) Разглеждаме волтметъра като резистор със съпротивление $R_V = 4 \text{ k}\Omega$, който е свързан успоредно на резистора R_1 . Еквивалентното съпротивление на двата резистора е

$$\frac{1}{R'_1} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V} = \frac{1}{4 \text{ k}\Omega} + \frac{1}{4 \text{ k}\Omega} = \frac{1}{2 \text{ k}\Omega}; R'_1 = 2 \text{ k}\Omega.$$

Общото съпротивление е

$$R = R'_1 + R_2 = 2 \text{ k}\Omega + 4 \text{ k}\Omega = 6 \text{ k}\Omega.$$

Токът във веригата е

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{6 \text{ V}}{6 \cdot 10^3 \Omega} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ A}.$$

Напрежението между точките А и В, т.е. напрежението, което показва волтметърът, определяме от закона на Ом

$$U_1 = R'_1 I = (2 \cdot 10^3 \Omega)(1 \cdot 10^{-3} \text{ A}) = 2 \text{ V}.$$

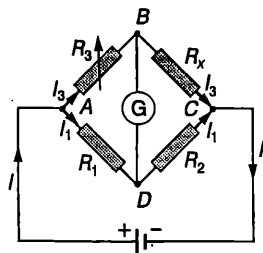
в) По същия начин пресмятаме еквивалентното съпротивление $R'_1 = 3998 \Omega$ между точките А и В. За показанието на волтметъра получаваме

$$U_1 = 2,9994 \text{ V} \approx 3 \text{ V}.$$

Следователно волтметърът със съпротивление $10 \text{ M}\Omega$ може да се смята за идеален, докато включването на другия волтметър води до съществени изменения на напреженията и тока в дадената верига. Съвременните цифрови волтметри имат съпротивление около $10 \text{ M}\Omega$ и в повечето случаи могат да се смятат за идеални. Стрелковите волтметри имат съпротивление от порядъка на няколко хиляди или няколко десетки хиляди ома (съпротивлението намалява при превключване на волтметъра на по-малък обхват). Това трябва да се има предвид при работа с такива уреди.

Пример 59.4. Уитстънов мост. Една от най-разпространените схеми за измерване на неизвестно съпротивление е Уитстъновият мост (фиг.59-5). Съпротивленията R_1 и R_2 са известни с голяма точност. Съпротивлението R_3 може да се изменя и големината му се подбира така,

Фиг. 59-5.



че токът през галванометъра G (чувствителен амперметър) да стане равен на нула. Определете неизвестното съпротивление R_x , ако $R_1 = 1035 \, \Omega$ и $R_2 = 9972 \, \Omega$. Токът през галванометъра става равен на нула при $R_3 = 958 \, \Omega$.

Решение. Падовете на напреженията върху резисторите R_3 и R_1 са равни на разликата в потенциалите съответно на точки A и B и на A и D :

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B \text{ и } U_{AD} = \varphi_A - \varphi_D.$$

Когато мостът е уравновесен, т.е. когато през галванометъра не тече ток, потенциалите на точки B и D са равни: $\varphi_D = \varphi_B$. Следователно тогава $U_{AB} = U_{AD}$. По аналогичен начин установяваме, че $U_{BC} = U_{DC}$. При уравновесен мост през резисторите R_1 и R_2 тече един и същ ток I_1 , а през резисторите R_3 и R_x тече ток I_3 . От закона на Ом и от горните две равенства между напреженията следват съотношенията

$$R_3 I_3 = R_1 I_1 \text{ и } R_x I_3 = R_2 I_1.$$

Разделяме почленно левите и десните страни на двете уравнения, съкращаваме токовете I_1 и I_3 и определяме неизвестното съпротивление R_x :

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_1} = 9,23 \, \text{k}\Omega.$$

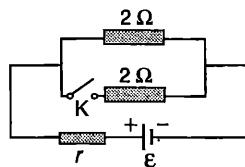
Задачи

- Слънчева батерия има ЕДН $2,2 \, \text{V}$. Колко е вътрешното съпротивление на батерията, ако при късо съединение през нея протича ток $1,1 \, \text{A}$?
- Към батерия с ЕДН $120 \, \text{V}$ е свързан резистор със съпротивление $1100 \, \Omega$. Колко е вътрешното съпротивление на батерията, ако токът през резистора е $0,1 \, \text{A}$?
- При включване на стартера от автомобилен акумулатор с ЕДН $\varepsilon = 12 \, \text{V}$ се черпи ток $I = 200 \, \text{A}$ и напрежението във външната част на веригата пада до $U = 10 \, \text{V}$. Колко е вътрешното съпротивление на акумулатора?

4. Към батерия с ЕДН $6 \, \text{V}$ е включена крушка със съпротивление $5 \, \Omega$, която консумира мощност $5 \, \text{W}$. Начертайте схема на електрическата верига и определете: а) тока във веригата; б) вътрешното съпротивление на батерията.

5. Два консуматора със съпротивление $R_1 = 4 \, \Omega$ и $R_2 = 5 \, \Omega$ са свързани последователно към източник с ЕДН $\varepsilon = 6 \, \text{V}$ и вътрешно съпротивление $r = 1 \, \Omega$. Начертайте схема на електрическата верига и определете мощността на тока през всеки консуматор.

6. При отворен ключ K (фиг. 59-6) от източника се черпи ток $1 \, \text{A}$. След затваряне на ключа токът през източника става $1,5 \, \text{A}$. Определете вътрешното съпротивление r и ЕДН ε на източника.



Фиг. 59-6.

7. Капацитет на акумулатор се нарича зарядът q , който преминава през веригата при разреждането на акумулатора. Ако времето на разреждане е t , а токът е I , то капацитетът на акумулатора е $q = It$ и се измерва в ампер-часа ($\text{A}\cdot\text{h}$).

Автомобилен акумулатор с ЕДН $\varepsilon = 12 \, \text{V}$ има капацитет $q = 200 \, \text{A}\cdot\text{h}$. Колко часа акумулаторът може да захранва двете лампи на фаровете на автомобила, всяка от които има мощност $P = 40 \, \text{W}$?

8. Определете ЕДН ε и вътрешното съпротивление r на акумулатор, ако при ток $I = 5 \, \text{A}$ мощността на тока във външната част от веригата е $P_1 = 57,5 \, \text{W}$, а при съпротивление на външната част от веригата $R = 1,4 \, \Omega$ мощността на тока в нея е $P_2 = 89,6 \, \text{W}$.

9. Определете вътрешното съпротивление на автомобилен акумулатор с ЕДН $\varepsilon = 12 \, \text{V}$. Известно е, че при включване на стартера от акумулатора се черпи ток $I = 70 \, \text{A}$ и напрежението във външната част от веригата (между клемите на акумулатора) става $U = 7,8 \, \text{V}$.

10. Определете максималната мощност, която може да се черпи от батерия с ЕДН $\varepsilon = 1,5 \, \text{V}$ и вътрешно съпротивление $r = 0,5 \, \Omega$.

60. Правила на Кирхоф

Токът и падовете на напрежението върху резисторите в прости електрически вериги могат да се определят с помощта на закона на Ом и правилата за комбинации от последователно и успоредно свързани резистори. При анализа на по-сложни вериги се използват още две правила, носещи името на германския физик Густав Роберт Кирхоф (1824–1887).

1. Правило за възловата точка: Сумата от токовете, които влизат в дадена възлова точка от една разклонена електрическа верига, е равна на сумата от токовете, излизайщи от същата точка.

2. Правило за контура: Алгебричната сума от падовете на напрежението на всички участъци от затворен токов контур е равна на алгебричната сума от електродвижещите напрежения на всички източници на електрична енергия, включени в този контур.

Възлови се наричат точките, в които се разклонява една електрическа верига. Възлова е например точка A от *фиг.60-1а*. Токът I_1 е насочен към точка A и внася в нея електричен заряд. Токовете I_2 и I_3 излизат от точка A и изнасят от нея електричен заряд. Тъй като в точка A не могат нито да се натрупват, нито да изчезват електрични заряди, трябва внесеният за единица време в точка A електричен заряд да е равен на изнесения от нея за същото време заряд, т.е. в сила е равенството

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Следователно правилото на Кирхоф за възловата точка е следствие от закона за запазване на електричния заряд.

Второто правило на Кирхоф е следствие от закона за запазване на енергията. Действително, да разгледаме например най-прост токов контур, съставен само от

един източник с ЕДН $\mathcal{E}$ и резистор със съпротивление R , в който тече ток I (*фиг.60-1б*). Електричен заряд q тръгва от точка M и прави една пълна обиколка на контура. Когато зарядът премине през резистора, електричната му потенциална енергия намалява с $q(RI)$, където $RI = U$ е падът на напрежението върху резистора: в резистора се отделя топлина. При преминаване през източника електродвижещите сили извършват положителна работа $q\mathcal{E}$ и възстановяват потенциалната енергия на заряда. От закона за запазване на енергията следва, че $qRI = q\mathcal{E}$ или $RI = \mathcal{E}$. Равенството $RI = \mathcal{E}$ изразява правилото на Кирхоф за токовия контур.

Прилагането на правилата на Кирхоф се извършва в следната последователност:

1. Начертава се схема на електрическата верига, определят се възловите точки и контурите, които ще се използват. Избират се посоки на обикаляне на контурите и предполагаеми посоки на токовете.

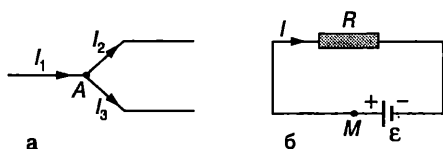
2. Ако при преминаване през резистор със съпротивление R посоката на обикаляне на контура съвпада с посоката на тока I през резистора, падът на напрежението RI върху резистора се приема за положителен. Ако посоката на обикаляне на контура е противоположна на посоката на тока, падът на напрежението върху резистора е отрицателен ($-RI$).

3. Ако при обикалянето на контура се преминава от отрицателния към положителния полюс на източник, неговото електродвижещо напрежение $\mathcal{E}$ се приема за положително, а при преминаване от положителния към отрицателния полюс – ЕДН се взема със знак минус ($-\mathcal{E}$).

4. Ако след извършване на числените пресмятания за някой от токовете се получи отрицателна числена стойност, това означава, че действителната посока на този ток е противоположна на първоначално избраната от нас предполагаема посока на тока. (В такъв случай трябва само да сменим посоката на този ток – всички останали резултати остават в сила.)

Следващите примери илюстрират прилагането на правилата на Кирхоф за анализ на електрическите вериги.

Фиг.60-1.



Пример 60.1. Последователно свързване на източници на ЕДН. Електрическа верига е съставена от два източника с електродвижещо напрежение $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ и вътрешно съпротивление съответно r_1 и r_2 , които са свързани последователно, и от резистор (консуматор) със съпротивление R . Определете тока I във веригата.

Решение. Схемата на електрическата верига е показана на *фиг.60-2*. В случая електрическата верига е проста – съставена е само от един токов контур. Във външната част на веригата токът тече от положителния към отрицателния полюс на източниците. Избираме посоката на обикаляне на контура да съвпада с посоката на тока и прилагаме правилото на Кирхоф за токовия контур:

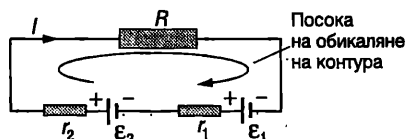
$$r_1 I + r_2 I + RI = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2,$$

откъдето определяме тока във веригата

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{r_1 + r_2 + R}.$$

От получения резултат и от закона на Ом за цялата верига $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$ следва изводът, че

два последователно свързани източника са еквивалентни на един източник с ЕДН $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ и вътрешно съпротивление $r = r_1 + r_2$. Такова свързване се използва, когато е необходимо по-голямо електродвижещо напрежение.



Фиг.60-2.

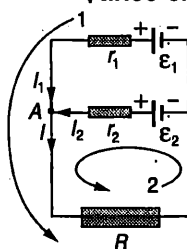
Пример 60.2. Успоредно свързване на източници на ЕДН. Два източника в електрическата верига, показана на *фиг.60-3*, са свързани успоредно. Определете тока през резистора със съпротивление R .

Решение. Ще приложим правилата на Кирхоф за възловата точка А и контурите 1 и 2. Посоките на токовете и посоките на обикаляне на двата контура са показани на *фиг. 60-3*.

За възловата точка А:

$$I_1 + I_2 = I.$$

Фиг.60-3.



За контура 1: $r_1 I_1 + RI = \mathcal{E}_1$.

За контура 2: $r_2 I_2 + RI = \mathcal{E}_2$.

От последните две уравнения изразяваме токовете I_1 и I_2 и ги заместваме в уравнението $I_1 + I_2 = I$. След необходимите алгебрични преобразования определяме тока I през резистора със съпротивление R :

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + (r_1 + r_2) R}.$$

Ако двата източника са еднакви ($\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}$ и $r_1 = r_2 = r$), за тока I се получава

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\frac{r}{2} + R}.$$

От получения резултат и от закона на Ом

за цялата верига $I = \frac{\mathcal{E}}{r + R}$ следва изводът, че

два успоредно свързани еднакви източника са еквивалентни на един източник със същото ЕДН $\mathcal{E}$, но с два пъти по-малко вътрешно съпротивление ($r/2$). Такова свързване се използва, когато е необходим по-голям ток.

Пример 60.3. Определете токовете, които текат в електрическата верига от *фиг.60-4*. Вътрешното съпротивление на източниците се пренебрегва. Направете числени пресмятания за $\mathcal{E}_1 = 3\text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 6\text{ V}$, $\mathcal{E}_3 = 12\text{ V}$ и $R = 10\ \Omega$.

Решение. Неизвестните токове са три. За определянето им са необходими три уравнения, които могат да се съставят с помощта на правилата на Кирхоф: например за възловата точка А и за контурите 1 и 2 (*фиг.60-4*). Избираме предполагаеми посоки на токовете и посока на обикаляне на контурите.

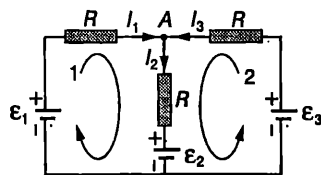
За възловата точка А: $I_1 + I_3 = I_2$.

За контура 1: $RI_1 + RI_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$.

За контура 2: $RI_3 + RI_2 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2$.

Решаваме получената система от три линейни уравнения с три неизвестни и получаваме

Фиг.60-4.



$$I_1 = \frac{2\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3}{3R}; \quad I_2 = \frac{\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3R};$$

$$I_3 = \frac{2\varepsilon_3 - \varepsilon_2 - \varepsilon_1}{3R}.$$

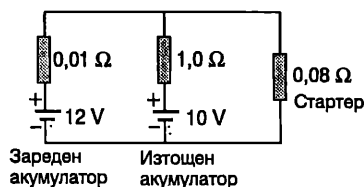
Заместваме с дадените в условието числени стойности и пресмятаме токовете:

$$I_1 = -0,4 \text{ A}; \quad I_2 = 0,1 \text{ A} \text{ и } I_3 = 0,5 \text{ A}.$$

Получената отрицателна стойност за тока I_1 показва, че действителната посока на този ток е противоположна на избраната на фиг.60-4 предполагаема посока. Всички останали резултати (числените стойности на токовете) остават в сила.

пи голям ток, а 1 е маломощен еталонен източник с точно зададено ЕДН, за каква цел може да се използва тази схема?

4. Изтощен автомобилен акумулатор се зарежда от акумулатора на друга кола (фиг.60-8). Определете токовете, които текат през стартера и през изтощения акумулатор.-



Фиг.60-8.

5. Електрическата змиорка (Electrophorus electricus), обитаваща реките на Южна Америка, убива рибата, с която се храни, с електрични импулси. Електричните органи на змиорката са биологични клетки, които са физиологични източници на ЕДН $\varepsilon = 0,15 \text{ V}$ с вътрешно съпротивление $r = 0,25 \Omega$. Тези източници са подредени в 140 реда, като всеки ред съдържа по 5000 еднакви източника (фиг.60-9).

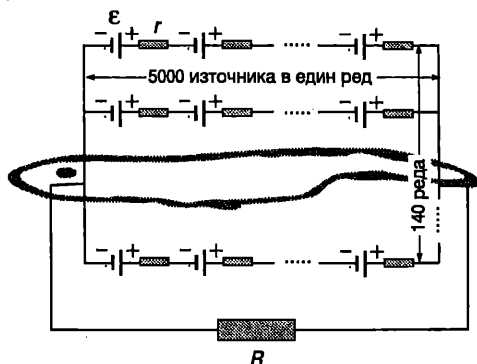
а) Определете електродвижещото напрежение между главата и опашката на змиорката.

б) Еквивалентното съпротивление на водата около змиорката е $R = 800 \Omega$. Определете тока, който тече между главата и опашката на змиорката.

в) Определете тока, който тече през всеки клон от веригата на фиг.60-9.

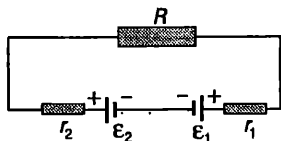
Указание. n на брой еднакви, успоредно свързани източника с ЕДН ε и вътрешно съпротивление r , са еквивалентни на един източник със същото ЕДН ε и n пъти по-малко вътрешно съпротивление (r/n).

Фиг.60-9.



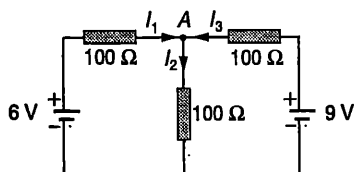
Задачи

1. Пресметнете тока в електрическата верига, показана на фиг. 60-5, ако $\varepsilon_1 = 6 \text{ V}$, $\varepsilon_2 = 9 \text{ V}$, $r_1 = r_2 = 1 \Omega$, $R = 4 \Omega$.



Фиг.60-5.

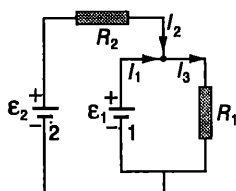
2. Определете токовете в електрическата верига, показана на фиг.60-6.



Фиг.60-6.

3. Определете токовете в електрическата верига, показана на фиг.60-7. Вътрешното съпротивление на източниците се пренебрегва. При какво условие падът на напрежението върху резистора със съпротивление R_1 е равен на електродвижещото напрежение ε_1 на първия източник? Ако от източника 2 може да се чер-

Фиг.60-7.



61. RC-вериги

Квазистационарни токове

Досега разглеждахме електрически вериги, в които текат постоянни токове. При постоянните токове електричното поле в проводниците не се изменя с течение на времето. Да допуснем, че в даден момент в точка A от електрическа верига електричното поле и токът се изменят скокообразно. Тези изменения се разпространяват много бързо (със скоростта на светлината c) и след време τ достигат всички точки от веригата. За верига с дължина $\ell = 1 \text{ m}$

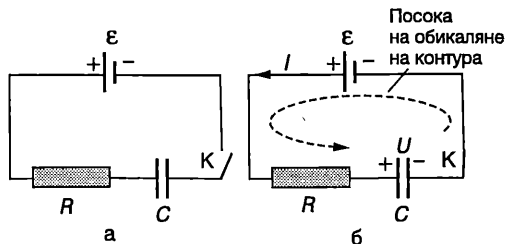
$$\tau = \frac{\ell}{c} = \frac{1 \text{ m}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} \approx 3 \cdot 10^{-9} \text{ s}.$$

В действителност изменението на токовете не става мигновено, а за някакъв интервал от време T . Когато е в сила неравенството $T \gg \tau$, токовете се наричат *квазистационарни*. Квазистационарните токове се изменят много бавно в сравнение със скоростта, с която тези изменения се предават по електрическата верига (например периодът на изменение на тока в електрическата мрежа в домовете ни е $T = 2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$). Затова в даден момент от времето квазистационарният ток има практически една и съща стойност във всички точки по дължината на един проводник, наречена *моментна стойност* на тока. Това дава възможност законите при постоянните токове (закон на Ом, правила на Кирхоф и др.) да се прилагат за моментните стойности на квазистационарните токове.

Като пример за квазистационарни токове ще разгледаме процесите на зареждане и разреждане на кондензатор.

Зареждане на кондензатор

Кондензаторът с капацитет C от електрическата верига, показана на *фиг.61-1а*, не е зареден. В момента $t = 0$ ключът K се затваря и във веригата протича ток, който зарежда кондензатора (*фиг.61-1б*). Ще обърнем внимание, че в пространството между електродите на кондензатора не преминават електрични заряди. Прехвър-



Фиг.61-1.

лянето на заряди от единия електрод на другия електрод, т.е. зареждането на кондензатора, става през съединителните проводници, резистора със съпротивление R и източника с ЕДН ε (вътрешното съпротивление на източника не се отчита). Да означим с I моментната стойност на тока, а с U – моментната стойност на напрежението на кондензатора. Прилагаме правилото на Кирхоф за токовия контур (*фиг.61-1б*):

$$(61.1) \quad RI + U = \varepsilon.$$

Забележка. Когато контурът съдържа кондензатор, напрежението на кондензатора се взема със знак плюс, ако при обикалянето на контура се преминава от положителния към отрицателния електрод на кондензатора. Казано по друг начин, при прилагането на правилото на Кирхоф падовете на напреженията върху резисторите и напреженията на кондензаторите от един токов контур се приемат за положителни, ако потенциалът намалява в посоката на обикаляне на контура, т.е. когато се преминава от точка с по-голям потенциал към точка с по-малък потенциал напрежението между двете точки е положително.

Напрежението U и зарядът q на кондензатора са свързани с познатото от електростатиката съотношение $q = CU$. От друга страна, $I = dq/dt$. Заместваме

$I = \frac{dq}{dt} = C \frac{dU}{dt}$ в уравнение (61.1) и получаваме

$$(61.2) \quad RC \frac{dU}{dt} + U = \varepsilon.$$

Въвеждаме нова променлива $u = U - \varepsilon$ и записваме уравнение (61.2) във вида

$$(61.3) \quad RC \frac{du}{dt} + u = 0.$$

Разделяме променливите

$$(61.4) \quad \frac{du}{u} = -\frac{dt}{RC}$$

и интегрираме:

$$(61.5) \quad u = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Константата A определяме от началното условие: в момента $t = 0$ напрежението на кондензатора е $U = 0$ и $u = -\varepsilon$. След заместване в уравнение (61.5) се получава $A = -\varepsilon$. Връщаме се към първоначалната променлива U и за напрежението на кондензатора окончателно получаваме

$$(61.6) \quad U = \varepsilon \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right].$$

Заместваме U от уравнение (61.6) в (61.1) и определяме зависимостта от времето на тока, зареждащ кондензатора:

$$(61.7) \quad I = \frac{\varepsilon - U}{R} = \frac{\varepsilon}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

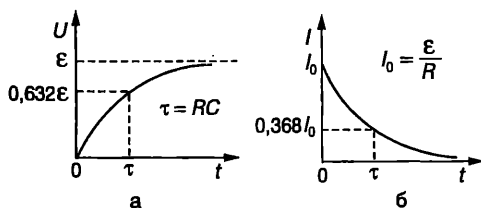
Графиките на функциите $U(t)$ и $I(t)$ са показани на фиг.61-2. Напрежението на кондензатора нараства от $U = 0$ в момента $t = 0$ до $U = \varepsilon$ при $t \rightarrow \infty$. Токът има максимална стойност $I = I_0 = \varepsilon/R$ в началния момент $t = 0$, след което намалява до нула по експоненциален закон.

Получените резултати показват, че зареждането на кондензатора не става мигновено, а се извършва с крайна скорост, която се определя от произведението

$$(61.8) \quad \tau = RC.$$

Това произведение има размерност на време и се нарича *времеконстанта* на веригата. За време τ токът се изменя от $I = I_0$ до $I = I_0 \exp(-1) = I_0/e = 0,368 I_0$, т.е. токът намалява $e = 2,71$ пъти. За същото време напрежението на кондензатора нараства от $U = 0$ до $U = \varepsilon(1 - \exp(-1)) = \varepsilon(1 - 1/e) = 0,632\varepsilon$, т.е. достига 63,2% от максималната си стойност ε .

Фиг.61-2.



Разреждане на кондензатор

Да разгледаме електрическа верига, съставена от кондензатор с капацитет C и резистор със съпротивление R (RC -верига). Кондензаторът е зареден предварително от източник с ЕДН ε до напрежение $U_0 = \varepsilon$. Ключът K е отворен (фиг.61-3а). В момента $t = 0$ ключът се затваря и кондензаторът започва да се разрежда през резистора. Да означим с I и U моментните стойности съответно на тока във веригата и на напрежението на кондензатора в произволен момент t . Прилагаме правилото на Кирхоф за токовия контур (фиг.61-3б):

$$(61.9) \quad RI - U = 0.$$

Ще обърнем внимание, че при обикалянето на контура преминаваме от отрицателния към положителния електрод на кондензатора, поради което напрежението на кондензатора U се взема със знак минус. В случая

$$I = -\frac{dq}{dt} = -C \frac{dU}{dt}.$$

Знакът минус показва, че зарядът на кондензатора намалява: $dq < 0$, а $I = -dq/dt > 0$. Заместваме тока I в уравнение (61.9), разделяме променливите, интегрираме и получаваме

$$(61.10) \quad U = A_1 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

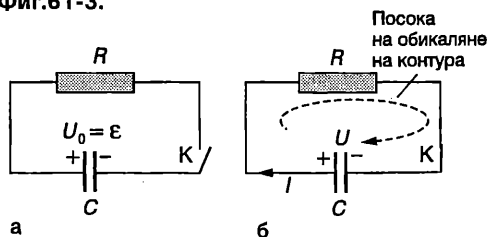
Константата A_1 определяме от началното условие: в момента $t = 0$ напрежението на кондензатора е $U = \varepsilon$.

Получаваме $A_1 = \varepsilon$ и

$$(61.11) \quad U = \varepsilon \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Заместваме U от уравнение (61.11) в (61.9) и определяме зависимостта на тока от времето:

Фиг.61-3.



(61.12)

$$I = \frac{U}{R} = I_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right),$$

където $I_0 = \mathcal{E}/R$ е токът във веригата в началния момент $t = 0$. Следователно при разреждането на кондензатора с капацитет C през резистор със съпротивление R напрежението върху кондензатора и токът във веригата намаляват с течение на времето по експоненциален закон с време-константа $\tau = RC$.

Пример 61.1. Определете количеството топлина Q , което се отделя в резистора при зареждането на кондензатора от електрическата верига, показана на *фиг.61-1*.

Решение. Ще решим задачата по два начина.

1. Ще използваме закона за запазване на енергията. Когато кондензаторът е зареден, неговото напрежение е $U_0 = \mathcal{E}$, а зарядът му е $q_0 = C\mathcal{E}$. Енергията на заредения кондензатор е $W = C\mathcal{E}^2/2$. При зареждането на кондензатора зарядът q_0 преминава през източника и електродвижещите сили извършват работа $A = q_0\mathcal{E} = C\mathcal{E}^2$. От закона за запазване на енергията следва равенството

$$A = W + Q \text{ или } C\mathcal{E}^2 = C\mathcal{E}^2/2 + Q,$$

откъдето определяме отделеното в резистора количество топлина:

$$Q = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2.$$

2. Отделеното за време dt количество топлина в резистора се определя от закона на Джаул-Ленц: $\delta Q = RI^2 dt$. Заместваме моментната стойност на тока I от уравнение (61.7) и интегрираме:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^\infty R \left(\frac{\mathcal{E}}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) \right)^2 dt = \\ &= \frac{\mathcal{E}^2}{R} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{2t}{RC}\right) dt = \frac{1}{2}C\mathcal{E}^2. \end{aligned}$$

Задачи

1. Определете времето за зареждане на кондензатор с капацитет $C = 100 \mu\text{F}$ през резистор със съпротивление $R = 100 \Omega$. Приемете, че процесът на зареждане практически е приключил след време 4τ , където τ е време-константата на веригата.

2. Кондензатор с капацитет C се разрежда през резистор със съпротивление R . Изразете чрез време-константата $\tau = RC$ на веригата времето, след което:

а) напрежението на кондензатора достига половината от началната си стойност;

б) енергията на кондензатора намалява 2 пъти.

3. Кондензаторът от електрическата верига, показана на *фиг.61-1*, има капацитет $C = 20 \mu\text{F}$, съпротивлението на резистора е $R = 2 \text{ k}\Omega$, ЕДН на източника е $\mathcal{E} = 12 \text{ V}$. Определете:

а) време-константата τ на веригата;

б) колко секунди след затварянето на ключа K напрежението на кондензатора ще достигне половината от максималната си стойност.

4. Кондензатор с капацитет C се зарежда през резистор със съпротивление R . Изразете чрез време-константата $\tau = RC$ на веригата времето t , след което напрежението върху кондензатора ще достигне 90% от максималната си стойност.

5. Ще наречем ефективност на начина на зареждане на кондензатор отношението $\eta = W_C/W$, където W е енергията, която се черпи от източника за времето на зареждане t_1 , а W_C – натрупаната за това време в кондензатора енергия. Ефективността η зависи от начина на зареждане.

А. Кондензатор с капацитет C се зарежда от източник с постоянно ЕДН $\mathcal{E}$. Съпротивлението на цялата верига е R (в R е включено и вътрешното съпротивление на източника).

а) При каква стойност на $\mathcal{E}$ кондензаторът ще се зареди до напрежение U_0 ($U_0 < \mathcal{E}$) за време t_1 ?

б) Определете ефективността η на зареждането.

Б. Кондензаторът се зарежда при постоянен ток I_0 до същото напрежение U_0 за същото време t_1 .

а) Определете големината на тока I_0 и закона $\mathcal{E}(t)$, по който трябва да се изменя ЕДН на източника.

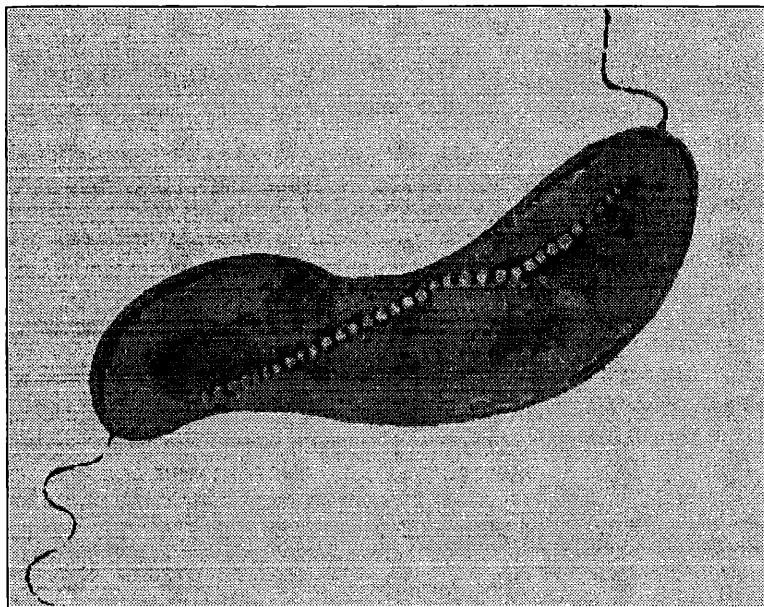
б) Колко е ефективността η при този начин на зареждане?

В. Изразете отношението $\frac{\eta(\mathcal{E} = \text{const})}{\eta(I = \text{const})}$ и

коментирайте характерните случаи. Какви изводи могат да се направят за ефективността на двата начина на зареждане?

Ако разполагате с N еднакви батерии с ЕДН $\mathcal{E}$, как ще постъпите, за да зарядите кондензатор до напрежение $U_0 \approx N\mathcal{E}$ с минимални топлинни загуби?

Електромагнитно взаимодействие



Магнитостатична бактерия с дължина около 1 μm , съдържаща кристалчета магнетит.

Тази глава е посветена на електромагнитните взаимодействия. Отначало ще разгледаме основните характеристики на постоянното магнитно поле и важни практически приложения на магнитните сили, действащи на заредени частици, които се движат в магнитно поле. След това ще се спрем на магнитното взаимодействие между постоянни токове и ще покажем как с помощта на закона на Био-Савар и принципа на суперпозицията се определя магнитното поле на проводник, по който тече ток. Ще формулираме закона на Ампер и ще го прилагаме за определяне на магнитни полета на токове в типични конфигурации с висока симетрия. Специално внимание ще отделим на явлението електромагнитна индукция и на неговото практическо приложение. Ще установим връзката между променливите електрични и магнитни полета и ще формулираме четирите уравнения на Максвел за електромагнитното поле във вакуум. Накрая, като използваме класически и квантови модели, ще обясним на качествено равнище магнитните свойства на веществата.

62. Магнитно поле

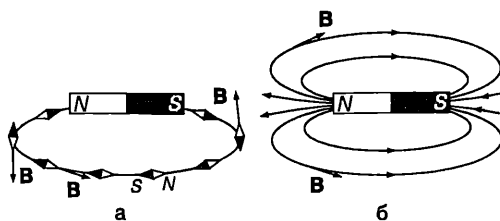
Още преди 3000 години в местността Магnezия (в Мала Азия) са открити късове от руда, които се привличат един към друг. Те получават името на тази местност и са наречени магнити. Всеки магнит има два полюса – северен (N) и южен (S). Магнитите взаимодействат със сили, подобно на електричните заряди: едноименните полюси се отблъскват, а разноименните се привличат. Магнитно действие има и електричният ток – намотка, по която тече ток, привлича железни предмети, подобно на постоянен магнит.

Досега изучавахме взаимодействието на наелектризираните тела, което се осъществява посредством електричното поле. По подобен начин магнитните взаимодействия също имат свой посредник – магнитното поле. Всеки магнит създава около себе си магнитно поле. На друг магнит, поставен в това поле, действат сили. Например магнитното поле на Земята действа на стрелката на компаса със сили, които я завъртат и ориентират в направление север–юг. По този начин магнитните сили не действат от разстояние, а непосредствено – те се пораждат от полето на мястото, където се намира магнитната стрелка, и са приложени върху нея.

Магнитна индукция

Фиг.62-1а илюстрира как с помощта на малка магнитна стрелка може да се очертае силова линия на магнитното поле на прав магнит. Обърнете внимание, че в различни точки от полето стрелката се ориентира по различен начин. Физичната величина, която характеризира магнитното поле във всяка точка от пространството, се нарича *магнитна индукция* и се означава с B . Подобно на интензитетата E на електричното поле, магнитната индукция B е векторна величина – има големина и посока. Посоката, която сочи северният полюс на малка магнитна стрелка, поставена в дадена точка от магнитното поле, се приема за посока на магнитната индукция B в тази точка от полето.

Математическите линии, които показ-



Фиг.62-1. Магнитно поле на прав магнит.

ват посоката на магнитната индукция B , се наричат *индукционни линии*: във всяка точка от магнитното поле векторът B е насочен по допирателната към индукционната линия, преминаваща през тази точка (фиг.62-1б).

Както знаем от електростатиката, интензитетът E на електричното поле в дадена точка се определя посредством силата F , която действа на пробен заряд q_0 , поставен в тази точка: $E = F/q_0$. По подобен начин чрез магнитната сила, действаща на движещ се електричен заряд, може да се даде определение на магнитната индукция. Опитно е установено, че:

1. Магнитни сили действат само на движещи се заряди.

2. Магнитната сила зависи от посоката на движение: тя е нула ($F = 0$), когато зарядът се движи успоредно на индукционните линии, и е максимална ($F = F_{\max}$), когато скоростта v на заряда е перпендикулярна на индукционните линии.

3. Максималната магнитна сила е пропорционална на големините на заряда q_0 и на скоростта му v : $F_{\max} \propto q_0 v$.

Следователно силата $F_{\max}$ зависи както от големината на заряда q_0 , така и от скоростта му v . Опитът обаче показва, че за дадена точка от полето отношението $F_{\max}/q_0 v$ е еднакво за всички заряди, т.е. не зависи от q_0 и от v . Това отношение характеризира магнитното поле в тази точка и по определение се приема за големина на магнитната индукция:

$$(62.1) \quad B = \frac{F_{\max}}{q_0 v}$$

Единицата за магнитна индукция се нарича *тесла* (Т). От формула (62.1) следва, че

$$1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{C} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}},$$

където е отчетено, че $1 \text{ C/s} = 1 \text{ A}$.

Магнитните полета на повърхността на неутронните звезди са около 10^8 T , а полето близо до голям електромагнит е от порядъка на 1 T . Магнитното поле на Земята е много по-слабо: магнитната му индукция в близост до земната повърхност е около $5 \cdot 10^{-5} \text{ T}$. Съвременните методи за медицинска диагностика позволяват да се изследват изключително слабите магнитни полета на сърцето и мозъка, чиято магнитна индукция е около 10^{-11} T .

Индукционните линии се чертаят така, че гъстотата им да е право пропорционална на големината на магнитната индукция. Там, където магнитното поле е силно, индукционните линии са разположени близо една до друга, а в областите със слабо поле те се раздалечават.

Магнитно поле, чиято индукция $\mathbf{B}$ има една и съща големина и посока във всички точки, се нарича *еднородно (хомогенно) поле*. Неговите индукционни линии са успоредни прави, разположени на еднакви разстояния една от друга.

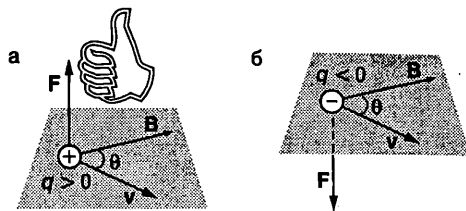
Магнитна сила

Магнитната сила $\mathbf{F}$, която действа на частица със заряд q , движеща се в магнитно поле, е

$$(62.2) \quad \mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}.$$

Това уравнение, от една страна, може да се разглежда като определение на величината магнитна индукция: индукцията $\mathbf{B}$ на магнитното поле в дадена точка от пространството се определя чрез измерване на магнитната сила $\mathbf{F}$, действаща на заредена частица, преминаваща със скорост $\mathbf{v}$ през тази точка. От друга страна, когато е известно магнитното поле, с помощта на векторното уравнение (62.2) се определя магнитната сила, действаща на заредена частица. Посоката на силата $\mathbf{F}$ съвпада с посоката на векторното произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, когато зарядът на частицата е положителен ($q > 0$), и е противоположна при отрицателен заряд ($q < 0$). Следователно магнитната сила винаги е перпендикулярна

както на скоростта $\mathbf{v}$ на частицата, така и на магнитната индукция $\mathbf{B}$ на полето: векторът $\mathbf{F}$ е перпендикулярен на равнината,



Фиг. 62-2.

зададена от векторите $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ (фиг. 62-2).

Фиг. 62-2 илюстрира как се прилага правилото на дясната ръка за определяне посоката на векторното произведение $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Големината на магнитната сила е

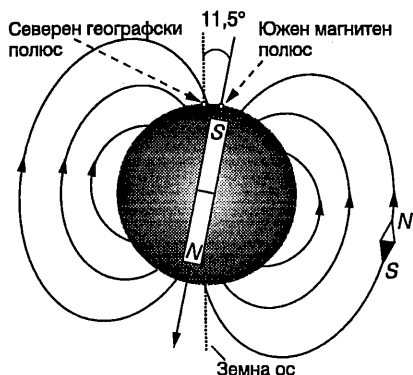
$$(62.3) \quad F = qvB \sin \theta,$$

където q е големината на електричния заряд, а θ – по-малкият ъгъл между векторите $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ (фиг. 62-2). Магнитната сила е максимална при $\theta = 90^\circ$, т.е. когато частицата се движи перпендикулярно на индукционните линии на магнитното поле ($\mathbf{v} \perp \mathbf{B}$). Тогава $F_{\max} = qvB$.

Магнитно поле на Земята

Английският физик Уилям Джилбърт (1544–1603) пръв установява, че над намагнитено метално кълбо магнитната стрелка се ориентира по същия начин, както стрелката на компаса в различни географски райони. Оттук той стига до извода, че самата Земя представлява един огромен магнит. Тъй като северният полюс на стрелката на компаса се привлича от южния магнитен полюс на Земята, можем да направим извода, че последният е разположен в близост до северния географски полюс (северният полюс на стрелката на компаса сочи географската посока север). Съвременните изследвания показват, че магнитните полюси на Земята са изместени на ъгъл $11,5^\circ$ от нейната ос на въртене (фиг. 62-3). Предполага се, че земното магнитно поле се поражда от електрични токове, които текат в течното ядро на Земята.

Някои животни използват магнитното поле на Земята за ориентирание. Напри-



Фиг.62-3. Магнитно поле на Земята.

мер опити с домашни гълъби показват, че те губят способността си да се ориентират в облачно време, ако към главите им се прикрепят малки постоянни магнити. Бактерии, които живеят в тинята, използват земното магнитно поле, за да определят посоката, в която трябва да плуват (надолу). Пренесени от северното в южното полукълбо, където посоката на вертикалната компонента на индукцията на земното магнитно поле е противоположна, бактериите вместо да плуват надолу към тинята, изплуват на повърхността. В някои органи на домашните гълъби и пчелите, както и в тинните бактерии, е установено наличието на малки магнитни частици, които се ориентират в магнитното поле на Земята, подобно на стрелката на компас.

Пример 62.1. Електрон се движи със скорост $v = 2.10^5 \text{ m/s}$, която е насочена под ъгъл $\theta = 30^\circ$ спрямо вектора на индукцията $\mathbf{B}$ на магнитното поле на Земята. Определете магнитната сила, която действа на електрона, и я сравнете със силата на тежестта $m_e g$.

Големината на магнитната индукция на земното магнитно поле е $B = 5.10^{-5} \text{ T}$. Зарядът на електрона е $e = 1.6.10^{-19} \text{ C}$, а масата му е $m_e = 9.1.10^{-31} \text{ kg}$.

Решение. $F = evB \sin \theta$;

$$F = (1.6.10^{-19} \text{ C})(2.10^5 \text{ m/s})(5.10^{-5} \text{ T})(0,5) = 8.10^{-19} \text{ N}.$$

$$\frac{F}{m_e g} = \frac{8.10^{-19} \text{ N}}{(9.1.10^{-31} \text{ kg})(9,8 \text{ m/s}^2)} \approx 9.10^{10}.$$

В разгледания пример магнитната сила, която действа на електрона в сравнително сла-

бото магнитно поле на Земята, е около 90 милиарда пъти по-голяма от силата на тежестта. Поради това движението на потоците от заредени частици (електрони и протони), които идват от Слънцето и навлизат в горните слоеве на земната атмосфера, се определя от магнитното поле на Земята, а не от гравитацията. При определени условия тези частици достигат и поплътните слоеве на атмосферата (главно около полюсите). Тяхното движение в атмосферата представлява електричен ток, чието магнитно поле се наслага към магнитното поле на Земята и предизвиква сложен комплекс от явления, каквито са *магнитните бури*. По време на магнитна буря се регистрират значителни изменения на магнитното поле в атмосферата. Особено силни са магнитните бури при повишена активност на Слънцето, когато върху неговата повърхност се появяват огромни петна.

Задачи

1. При какво условие заредена частица може да се движи праволинейно и равномерно в еднородно магнитно поле?
2. Частица със заряд 2.10^{-12} C се движи перпендикулярно на индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция $0,1 \text{ T}$. Колко е скоростта на частицата, ако ѝ действа магнитна сила 2.10^{-12} N ?
3. Във вакуумната камера на лабораторна постановка е създадено еднородно магнитно поле с индукция $0,2 \text{ T}$, която е насочена вертикално нагоре. В камерата попада протон с кинетична енергия $1,67 \text{ MeV}$, движещ се хоризонтално в посока изток – запад. Определете:
 - а) скоростта на протона;
 - б) големината и посоката на магнитната сила, действаща на протона;
 - в) колко пъти ускорението на протона е по-голямо от земното ускорение.
4. Електрон се движи в еднородно магнитно поле с индукция $\mathbf{B} = (0,1 \text{ T})\mathbf{i} + (0,2 \text{ T})\mathbf{j}$. Изразете чрез единичните вектори $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ на правоъгълна координатна система вектора на магнитната сила $\mathbf{F}$, действаща на електрона в точка от магнитното поле, през която той преминава със скорост $\mathbf{v} = (2.10^6 \text{ m/s})\mathbf{i}$.
5. Протон попада със скорост $\mathbf{v} = (2.10^6 \text{ m/s})\mathbf{i} + (4.10^6 \text{ m/s})\mathbf{j}$ в точка от магнитно поле, в която магнитната индукция е $\mathbf{B} = (0,1 \text{ T})\mathbf{i} - (0,2 \text{ T})\mathbf{j}$. Определете магнитната сила $\mathbf{F}$, действаща на протона.

63. Движение на заредени частици в магнитно поле

Ще разгледаме характерните особености на движението на заредени частици в еднородно магнитно поле и ще опишем принципа на действие на устройства с важно практическо значение, в които се използва това движение.

Лоренцова сила

В редица случаи снопове от частици със заряд q се движат със скорост $\mathbf{v}$ в област от пространството, в която има едновременно електрично поле с интензитет $\mathbf{E}$ и магнитно поле с индукция $\mathbf{B}$. Тогава на всяка частица от снопа действа както електрична сила $q\mathbf{E}$, така и магнитна сила $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Резултантната сила

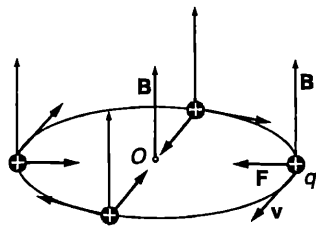
$$(63.1) \quad \mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

действаща на частицата, се нарича *лоренцова сила*, в чест на холандския физик Хендрик Лоренц (1853–1928).

Движение по кръгова орбита

Както е известно от механиката, равномерното движение по окръжност се извършва под действие на центростремителна сила, която е постоянна по големина и винаги е насочена към центъра на окръжността. Такава сила действа на частица със заряд q и маса m , чиято скорост $\mathbf{v}$ е перпендикулярна на вектора на магнитната индукция $\mathbf{B}$ на еднородно магнитно поле. Тъй като магнитната сила $\mathbf{F}$ винаги е насочена перпендикулярно на скоростта $\mathbf{v}$ на частицата, тя не извършва работа. Затова големината на скоростта и кинетичната енергия на частицата не се изменят. Не се изменя и големината на магнитната сила $F = qvB$. Силата $\mathbf{F}$ променя само посоката на скоростта: частицата описва окръжност (фиг.63-1). Заместваме центростремителната сила $F = qvB$ и центростремителното ускорение $a_n = v^2/r$ на частицата в уравнението на втория принцип на механиката $F = ma_n$:

$$qvB = m \frac{v^2}{r},$$



Фиг.63-1.

откъдето изразяваме радиуса r на окръжността

$$(63.2) \quad r = \frac{mv}{qB}.$$

Периодът на въртене (времето за едно завъртане) е равен на

$$(63.3) \quad T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}.$$

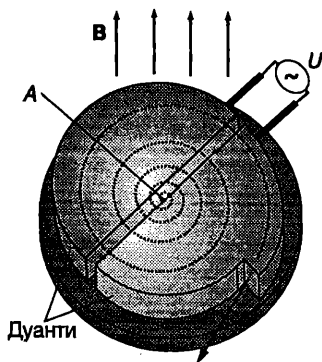
Честотата на въртене е

$$(63.4) \quad \nu_c = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}.$$

Следователно кръговото движение на заредена частица в еднородно магнитно поле се характеризира с една много важна особеност, която има голямо практическо значение: периодът T и честотата ν_c на въртене не зависят от скоростта (кинетичната енергия) на частицата, а се определят единствено от индукцията B на магнитното поле и отношението на заряда q към масата m на частицата, наречено *специфичен заряд* q/m на частицата. Честотата ν_c се нарича *циклотронна честота*, тъй като с такава честота се въртят по окръжност заредените частици в циклотроните – ускорители на заредени частици.

Циклотрон

Използва се за ускоряване на протони и йони. Принципатът на действие на циклотрона се илюстрира от фиг.63-2. Два кухи полуцилиндрични електрода (дуанти) са разположени на малко разстояние един от друг във вакуумна камера. Камерата е поставена между полюсите на голям електромагнит, който създава постоянно и еднородно магнитно поле, насочено перпендикулярно на равнината на дуантите. Към дуантите е приложено напрежение и в процепа се създава електрично поле, ко-



Фиг.63-2. Циклотрон.

ето ускорява йоните. Те се инжектират с пренебрежимо малка начална скорост в точка А в средата на процепа. Всеки йон, попаднал между дуантите, се ускорява от електричното поле и навлиза вътре в единия дуант, където електричното поле е нула. Там под действие на магнитното поле, чиято индукция B е перпендикулярна на скоростта v на йона, той описва полуокръжност и след време $T/2$ (T – период на въртене) отново попада в процепа. За да се извърши отново ускоряване, а не забавяне на йона, трябва за времето $T/2$, през което той се е движил вътре в дуанта, електричното поле да е променило посоката си на противоположната. Тогава при второто си преминаване през процепа йонът отново увеличава кинетичната си енергия и във втория дуант описва полуокръжност с по-голям радиус. Цикълът многократно се повтаря – йонът се движи по разширяваща се спирала, като при всяко преминаване през електричното поле увеличава кинетичната си енергия. На фиг.63-2 с пунктир е показана спиралата, описана от положителен йон (или от протон). В периферната част на камерата през специално прозорче, затворено с тънко метално фолио, йоните се извеждат извън ускорителя.

Принципно важно за работата на циклотрона е условието честотата ν , с която се изменят напрежението и електричното поле между дуантите, да е равна на циклотронната честота на въртене на йоните (или протоните) в магнитното поле на ускорителя:

$$\nu = \nu_c = \frac{qB}{2\pi m}$$

Тъй като циклотронната честота не зависи от скоростта (кинетичната енергия) на ускоряваните частици, циклотроните работят при постоянна честота на ускоряващото напрежение.

Протонен синхротрон

Циклотронът не може да се използва за ускоряване на заредени частици до скорости, близки до скоростта на светлината, тъй като тогава се проявяват релативистични ефекти: масата на частиците постепенно нараства, поради което тяхната циклотронна честота започва да намалява. Съществува още един проблем: за достигане на много големи енергии е необходим циклотрон с огромни размери. Например, за да се получат протони с енергия 500 GeV, трябва да се използва огромен магнит, чито полюси имат площ няколко квадратни километра! Тези два проблема се решават в съвременните ускорители на протони; наречени *протонни синхротрони*, като едновременно се променят както честотата на ускоряващото напрежение, така и големината на индукцията на магнитното поле. Тези изменения стават синхронизирани по такъв начин, че протоните, вместо по спирала, да се движат по окръжност с постоянен радиус. Това дава възможност силно магнитно поле да се създава с помощта на свръхпроводящи магнити само в тясна ивица около орбитата на протоните. Например ускоряващият кръг на протонния синхротрон в ЦЕРН (Европейска лаборатория по физика на елементарните частици) в Женева има дължина 7 km. На него се ускоряват протони до енергия 500 GeV ($5 \cdot 10^{11}$ eV).

Пример 63.1. В циклотрон се ускоряват протони. Магнитното поле е с индукция $B = 1,0$ T. Преди да напуснат ускорителя протоните се движат по орбита с максимален радиус $R = 0,50$ m. Определете: а) максималната кинетична енергия $E_{k\max}$ на протоните; б) броя на обиколките; в) времето за ускоряване.

При всяко преминаване през процепа между дуантите кинетичната енергия на протона нараства с $\Delta E_k = 40$ keV.

Решение. а) Връзката между радиуса на орбитата r и скоростта на протона v се изразява с уравнение (63.2): $r = \frac{mv}{qB}$. Кинетичната енергия на протона е $E_k = mv^2/2$. Изразяваме скоростта v от първото уравнение и я заместваме във второто. Получаваме

$$E_k = \frac{q^2 B^2 r^2}{2m}$$

Кинетичната енергия е максимална, когато протонът се движи по орбита с максимален радиус, т.е. при $r = R$. Тогава

$$E_{k \max} = \frac{(1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 (1.0 \text{ T})^2 (0.50 \text{ m})^2}{2(1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg})} = 1.9 \cdot 10^{-12} \text{ J} = 12 \text{ MeV}.$$

б) За един оборот протонът два пъти преминава през ускоряващото електрично поле между дуантите и получава кинетична енергия $2\Delta E_k$. Броят на оборотите е

$$n = \frac{E_{k \max}}{2\Delta E_k} = \frac{12 \cdot 10^6 \text{ eV}}{2(40 \cdot 10^3 \text{ eV})} = 150 \text{ оборота}.$$

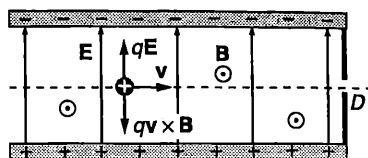
в) Периодът на въртене е

$$T = \frac{2\pi m}{qB} = 6.55 \cdot 10^{-8} \text{ s}.$$

Периодът T не зависи от енергията на протоните и остава постоянен по време на ускоряването. Следователно времето за ускоряване е $\tau = nT = 9.8 \mu\text{s}$.

Селектор на скорости

В редица случаи при физичните изследвания и в технологиите е необходимо използването на снопове от заредени частици, които се движат с точно определена скорост v_0 . Формирането на такива снопове се постига с устройства, наречени *селектори на скорости*. В селектора частици със заряд q преминават през област от пространството, в която едновременно са създадени еднородно електрично поле и еднородно магнитно поле. Векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ са взаимноперпендикулярни и са насочени така, че електричната сила $q\mathbf{E}$ и магнитната сила $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ да отклоняват частиците в противоположни посоки. Принципът на действие на селектора на скорости се илюстрира от *фиг.63-3*. Заре-



Фиг.63-3. Селектор на скорости. Знакът $\odot$ показва, че магнитната индукция $\mathbf{B}$ е насочена към нас, перпендикулярно на равнината на чертежа.

ден плосък кондензатор е поставен в еднородно магнитно поле. Магнитната индукция $\mathbf{B}$ е насочена към нас, перпендикулярно на равнината на чертежа, а частиците се движат по оста на кондензатора. Посоките на двете сили, действащи на всяка от заредените частици, са показани на фигурата. През тесния процеп D на изхода на селектора ще преминат само онези частици, които през цялото време се движат праволинейно и равномерно по оста. Това са частиците, за които лоренцовата сила е нула:

$$\mathbf{F}_L = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0,$$

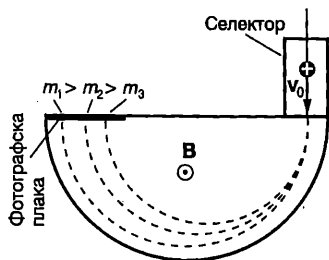
откъдето следва, че $qE = qvB$. Следователно през селектора ще преминат само частиците със скорост

$$(63.5) \quad v = v_0 = \frac{E}{B}.$$

За частиците със скорост $v < v_0$ електричната сила е по-голяма от магнитната сила и те се отклоняват към отрицателния електрод на кондензатора. Обратно, частиците със скорост $v > v_0$ са подложени на действието на по-голяма магнитна сила и се отклоняват в противоположната посока.

Масспектрометър

Друго важно приложение на магнитното поле е в масспектрометрите, с които се определя масата на различни йони. Те се използват за извършване на химичен анализ и контрол при технологичните процеси, при получаването на нови материали и др. Принципът на действие на един вид масспектрометър се илюстрира от *фиг.63-4*. Успореден сноп, съдържащ йони с различни маси и скорости, преминава през селектор на скорости, който пропуска само йоните с определена скорост v_0 . Тези йони навлизат във вакуумна камера, поставе-



Фиг.63-4. Масспектрометър.

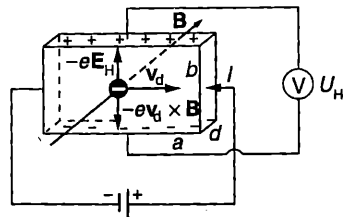
на в еднородно магнитно поле. Магнитната индукция $\mathbf{B}$ е перпендикулярна на скоростта $\mathbf{v}_0$. (Векторът $\mathbf{B}$ е насочен към нас, перпендикулярно на равнината на чертежа.) Под действието на магнитната сила йоните описват полуокръжности с радиус

$$r = \frac{mv_0}{qB} \text{ и попадат върху фотографска пла-$$

ка. Да предположим, че всички йони имат еднакъв заряд q . Тъй като скоростите им също са равни, йоните ще опишат полуокръжности, чиито радиуси са пропорционални на тяхната маса: $r = Cm$, където $C = v_0/(qB)$ е константа, еднаква за всички йони от снопа. Следователно йоните с различни маси ще попаднат на различни места върху плаката. Така по разположението на линиите, които се получават след проявяването на фотографската плака, може да се определи масата на различни йони от снопа.

Ефект на Хол

През 1879 г. американският физик Едвин Хол (1855–1938) поставя образец от злато в магнитно поле и установява, че при протичане на ток през образца между противоположните му странични стени възниква електрично напрежение. Това явление, което е свързано с действието на магнитната сила върху движещи се електрични заряди, е наречено *ефект на Хол*. Днес ефектът на Хол се прилага широко за изследване свойствата на полупроводниците и на металите. Чрез него се извършва контрол на качеството на полупроводниковите материали, предназначени за производство на прибори. Ефектът на Хол се използва също за измерване индукцията на магнитни полета.



Фиг.63-5. Ефект на Хол.

На фиг.63-5 е показана схема на опитна постановка за наблюдаване ефекта на Хол. Полупроводников кристал, например с n -тип проводимост, е поставен в еднородно магнитно поле (между полюсите на постоянен магнит). Образецът има форма на правоъгълен паралелепипед с дължини на ръбовете a , b и d . При протичане на постоянен ток I през образца дрейфовата скорост $\mathbf{v}_d$ на свободните електрони е насочена перпендикулярно на магнитната индукция $\mathbf{B}$. Под действие на магнитната сила $-\mathbf{e}\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}$ електроните се отклоняват надолу и долната стена на кристала се зарежда отрицателно. Върху горната стена остава некомпенсиран положителен заряд. Така между двете срещуположни стени на образца възниква електрично напрежение, наречено *холово напрежение* U_H , което се измерва с волтметър. Опитът показва, че холовото напрежение е пропорционално на тока I и на индукцията B на магнитното поле и е обратнопропорционално на дебелината d на образца (d е дължината на ръба, който е успореден на магнитното поле):

$$(63.6) \quad U_H = R_H \frac{IB}{d}.$$

Коефициентът на пропорционалност R_H характеризира свойствата на материала, от който е изготвен образецът, и се нарича *коефициент на Хол*.

За да определим коефициента на Хол, ще отчетем, че некомпенсираните електрични заряди създават в образца електрично поле, подобно на полето на зареден кондензатор. Неговият интензитет е

$$E_H = \frac{U_H}{b}.$$

На токовете носители действа електрична сила с големина eE_H , чиято посока е противоположна на посоката на

магнитната сила (фиг.63-5). Големината на магнитната сила е $e v_d B$. Натрупването на заряди се прекратява, когато двете сили се урівновесят:

$$(63.7) \quad e E_H = e \frac{U_H}{b} = e v_d B.$$

Токът през напречното сечение $S = bd$ на образеца е (вж. уравнение (52.2) на стр.43)

$$(63.8) \quad I = e n v_d b d.$$

От уравнение (63.8) изразяваме дрейфовата скорост v_d , замествама я в уравнение (63.7) и определяме холското напрежение

$$(63.9) \quad U_H = \frac{IB}{e n d}.$$

Приравняваме десните страни на уравнения (63.9) и (63.6) и изразяваме коефициента на Хол

$$(63.10) \quad R_H = \frac{1}{e n}.$$

Следователно коефициентът на Хол е обратнопропорционален на концентрацията n на свободните токови носители.

Пример 63.2. При изследване на ефекта на Хол за германиев кристал с n -тип проводимост е измерено холово напрежение $U_H = 15 \mu V$. Токът през образеца е $I = 10 \text{ mA}$, а индукцията на магнитното поле е $B = 0,20 \text{ T}$. Дебелината на образеца (фиг.63-5) е $d = 2,0 \text{ mm}$. Определете коефициента на Хол R_H и концентрацията n на свободните електрони.

Решение. Коефициентът на Хол се определя от уравнение (63.6):

$$R_H = \frac{U_H d}{IB} = \frac{(15 \cdot 10^{-6} \text{ V})(2 \cdot 10^{-3} \text{ m})}{(10 \cdot 10^{-3} \text{ A})(0,2 \text{ T})} = 1,5 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}.$$

Концентрацията на свободните електрони е

$$n = \frac{1}{e R_H} = 4,2 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}.$$

Задачи

1. Заредена частица, която първоначално е в покой, се ускорява от напрежение $U = 1500 \text{ V}$, след което навлиза в еднородно магнитно поле

с индукция $B = 0,03 \text{ T}$. Скоростта на частицата е насочена перпендикулярно на магнитната индукция $\mathbf{B}$. Определете специфичния заряд q/m на частицата, ако в полето тя започва да се движи по окръжност с радиус $r = 26 \text{ cm}$.

2. Протони се ускоряват в циклотрон до максимална кинетична енергия 20 MeV . Каква максимална кинетична енергия могат да получат в този ускорител йони със заряд k пъти по-голям от заряда на протона и с k пъти по-голяма маса?

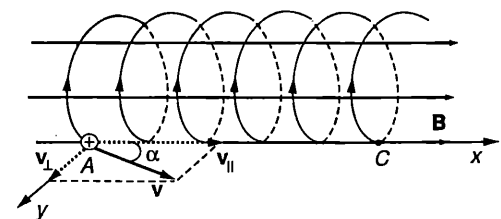
3. Какъв трябва да е радиусът на циклотрон, предназначен за ускоряване на протони до кинетична енергия 20 MeV при циклотронна честота 30 MHz ?

4. В масспектрометър попадат едноразрядни йони, ускорени от напрежение $U = 500 \text{ V}$. Йоните се движат перпендикулярно на еднородно магнитно поле с индукция $B = 0,25 \text{ T}$ и описват полуокръжност с радиус $r = 8,0 \text{ cm}$. Определете масата на йоните.

5. Частица със заряд q и маса m преминава през точка A от еднородно магнитно поле със скорост $\mathbf{v}$, която е насочена под ъгъл α спрямо индукционните линии на полето. При какви стойности на магнитната индукция B на полето частицата ще премине през точка C , разположена на разстояние L от точка A ? Точките A и C лежат на една и съща индукционна линия.

Указание. Разложете скоростта $\mathbf{v}$ на две компоненти: едната успоредна ($\mathbf{v}_{||}$), а другата – перпендикулярна ($\mathbf{v}_{\perp}$) на магнитната индукция $\mathbf{B}$ (фиг.63-6). Частицата извършва сложено движение: под действие на магнитната сила се върти равномерно по окръжност със скорост $v_{\perp}$ и едновременно с това се движи с постоянна скорост $v_{||}$. В резултат на тези две движения тя описва винтова линия (фиг.63-6), като при всяко пълно завъртане пресича линията AC . Частицата ще попадне в точка C , ако времето за изминаването на разстоянието L с постоянна скорост $v_{||}$ е равно на времето за n (цяло число) пълни завъртания.

Фиг.63-6.



64. Магнитни сили, действащи на проводник, по който тече ток

Ще определим магнитната сила F , която действа на праволинеен проводник с дължина L и напречно сечение S (фиг.64-1), по който тече ток I . Проводникът се намира в еднородно магнитно поле с индукция B . За нагледност на чертежа останалите части от електрическата верига не са показани на фиг.64-1. Ще смятаме, че свободните токови носители имат положителен заряд q_0 и се движат с постоянна скорост v_d (дрейфова скорост). На всеки токов носител действа магнитна сила $q_0 v_d \times B$. Магнитната сила, действаща на целия проводник, е

$$(64.1) \quad F = Nq_0 v_d \times B,$$

където N е общият брой на токовете носители в проводника. Той е равен на произведението на обема LS на проводника и концентрацията n на свободните токови носители: $N = nLS$. Токът през напречното сечение на проводника е $I = nq_0 v_d S$ (вж. уравнение (52.2) на стр. 43), откъдето изразяваме големината на дрейфовата скорост $v_d = \frac{I}{nq_0 S}$. Това уравнение се за-

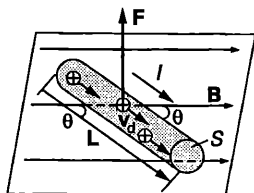
писва във векторна форма: $v_d = \frac{I}{nq_0 S} \frac{L}{L}$,

където L е вектор с модул, равен на дължината L на проводника. Векторът L има същата посока, както дрейфовата скорост на положителните заряди v_d , т.е. посоката на тока (фиг.64-1). Заместваме N и v_d в уравнение (64.1) и получаваме

$$(64.2) \quad F = IL \times B.$$

Посоката на силата F се определя по правилото на дясната ръка. Големината ѝ е

Фиг.64-1.

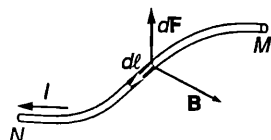


(64.3)

$$F = ILB \sin \theta,$$

където θ е ъгълът между векторите L и B , т.е. ъгълът, който проводникът сключва с индукционните линии на еднородното магнитно поле. Магнитната сила е максимална, $F_{\max} = ILB$, при $\theta = 90^\circ$, т.е. когато проводникът е перпендикулярен на индукционните линии. Магнитната сила е равна на нула, когато проводникът е успореден на индукционните линии (при $\theta = 0$).

За да се определи магнитната сила, действаща на проводник с произволна форма, поставен в нееднородно магнитно поле, проводникът мислено се разделя на много малки елементи. Всеки от тях се разглежда като праволинеен проводник с дължина $d\ell$, поставен в еднородно поле с магнитна индукция B . (Тъй като дължината $d\ell$ на елемента е много (безкрайно) малка, изменението на полето на разстояние



Фиг.64-2.

$d\ell$ не се отчита.) От уравнение (64.2) следва, че силата dF , действаща на безкрайно малък елемент от проводника (фиг.64-2), е

$$(64.4) \quad dF = I d\ell \times B.$$

Магнитната сила F , действаща на целия проводник, е векторна сума от силите, приложени към всички малки елементи, на които е разделен проводникът, т.е. тя се определя чрез интегриране на уравнение (64.4):

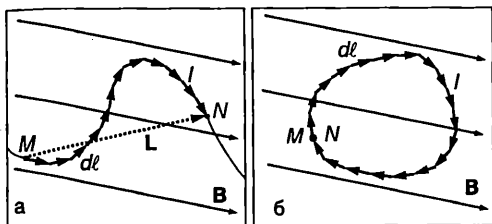
$$(64.5) \quad F = I \int_M^N d\ell \times B,$$

където M и N са двете крайни точки на проводника.

Пример 64.1. а) Проводник с произволна форма, по който тече ток I , е поставен в еднородно магнитно поле с индукция B . Изразете магнитната сила F , която действа на участък MN от проводника, чрез вектора L , свързващ началната точка M и крайната точка N на този

участък (фиг.64-3а).

б) Определете магнитната сила, действаща на затворен токов контур с произволна форма, поставен в еднородно магнитно поле.



Фиг.64-3.

Решение. а) Магнитната сила $\mathbf{F}$, действаща на участъка MN от проводника, се определя от уравнение (64.5). Тъй като магнитното поле е еднородно ($\mathbf{B} = \text{const}$), векторът $\mathbf{B}$ може да се изнесе извън интеграла:

$$\mathbf{F} = \left(I \int_M^N d\mathbf{l} \right) \times \mathbf{B}.$$

Интегралът $\int_M^N d\mathbf{l}$ е равен на векторната сума

от всички вектори $d\mathbf{l}$, изразяващи безкрайно малките елементи, на които е разделен участъкът MN от проводника. Съгласно с правилото за събиране на вектори тази сума е вектор с начало в точка M и край в точка N , т.е.

$\int_M^N d\mathbf{l} = \mathbf{L}$. Заместваме интегралът с $\mathbf{L}$ и получаваме

$$\mathbf{F} = I \mathbf{L} \times \mathbf{B}.$$

Следователно на участък MN от проводник с произволна форма, поставен в еднородно магнитно поле, действа същата сила, каквато би действала на участък MN от праволинеен проводник, по който тече същият ток I .

б) Ще използваме получения в точка а) резултат. Затвореният токов контур може да се разглежда като участък MN от проводник, за който крайната точка N съвпада с началната точка M (фиг.64-3б). В този случай $\mathbf{L} = 0$ и $\mathbf{F} = 0$.

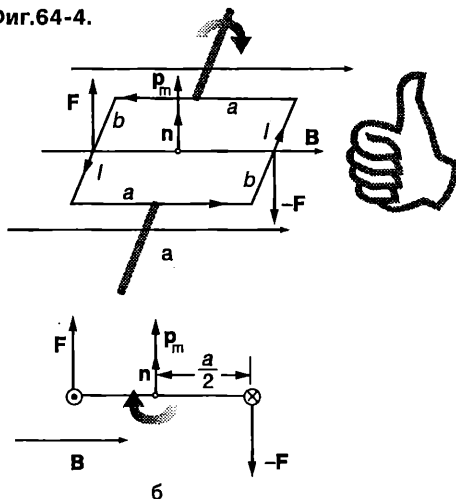
Следователно резултантната магнитна сила, действаща на затворен токов контур с произволна форма, поставен в еднородно магнитно поле, е равна на нула.

Въртящ момент на магнитните сили, действащи на проводникова рамка, по която тече ток

Магнитните сили намират важни практически приложения. Например под тяхното действие се въртят роторите на електромоторите. На фиг.64-4а е показан опростен модел на електромотор: правоъгълна проводникова рамка, по която тече ток I , е поставена в еднородно магнитно поле с индукция $\mathbf{B}$ (между полюсите на постоянен магнит). Рамката може да се върти около централната си ос. Страните на рамката с дължини a са успоредни на индукционните линии на магнитното поле, поради което съгласно с уравнение (64.2) не им действат магнитни сили. Страните с дължини b са перпендикулярни на индукционните линии. На тях действат магнитни сили $\mathbf{F}$ и $-\mathbf{F}$ с противоположни посоки и еднаква големина $F = IbB$. Магнитните сили $\mathbf{F}$ и $-\mathbf{F}$ образуват двойка сили (вж. част 1, §15), която се стреми да завърти рамката. Ще характеризираме ориентацията на рамката спрямо магнитното поле с помощта на единичен вектор $\mathbf{n}$, който е перпендикулярен на равнината на рамката. Посоката на вектора $\mathbf{n}$ се определя по следното правило: *поставяме дясната си ръка така, че свитите пръсти да сочат посоката на тока по рамката. Тогава опънатият палец сочи посоката на единичния вектор $\mathbf{n}$* (фиг.64-4а).

На фиг.64-4а и фиг.64-4б е показана една и съща ориентацията на рамката (ко-

Фиг.64-4.

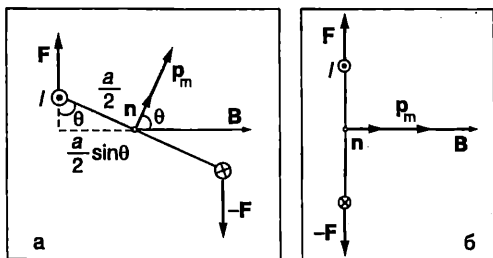


гато векторите $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$ са взаимно перпендикулярни, но са използвани две различни проекции – „поглед под ъгъл отгоре“ и „поглед отстрани“. Големината на въртящия момент на двойката сили е (фиг.64-4б)

$$M = Fa = l b B a = I S B,$$

където $S = ab$ е площта на рамката. Двойката сили завърта рамката. Когато ъгълът между векторите $\mathbf{n}$ и $\mathbf{B}$ е θ , въртящият момент на магнитните сили е (фиг. 64-5а)

$$M = F a \sin \theta = I S B \sin \theta.$$



Фиг.64-5.

Въртящият момент на магнитните сили става равен на нула при $\theta = 0$, т.е. когато рамката застане перпендикулярно на индукционните линии (фиг.64-5б). Проводниковите рамки (ротори) на електромоторите преминават през това равновесно положение по инерция, след което токът сменя посоката си, така че магнитните сили винаги да въртят рамката в една и съща посока. Устройството, което сменя посоката на тока при всяко полузавъртане на рамката, се нарича *колектор*.

Въртящият момент на магнитните сили, действащи на рамката, може да се запише във векторна форма:

$$(64.6) \quad \mathbf{M} = I S \mathbf{n} \times \mathbf{B}.$$

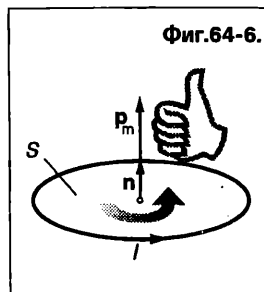
Величината

$$(64.7) \quad \mathbf{p}_m = I S \mathbf{n}$$

се нарича *магнитен момент* на токовата рамка. В SI единицата за магнитен момент е *ампер-метър на квадрат* ($\text{A} \cdot \text{m}^2$). Следователно въртящият момент на магнитните сили е равен на векторното произведение на магнитния момент на токовата рамка и индукцията на магнитното поле:

$$(64.8) \quad \mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}.$$

Ще обърнем внимание, че въртящият момент на магнитните сили, действащи на токова рамка, се изразява аналогично на въртящия момент, с който еднородно електрично поле действа на електричен дипол: $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$. Подобно на разгледания случай на правоъгълна проводникова рамка всеки затворен контур (с произволна форма) се характеризира с магнитен момент. За плосък контур големината на магнитния момент е равна на произведението от площта S на контура и тока I , който тече по него: $p_m = SI$. Посоката на вектора $\mathbf{p}_m$ се определя по правилото на дясната ръка (фиг.64-6).



Фиг.64-6.

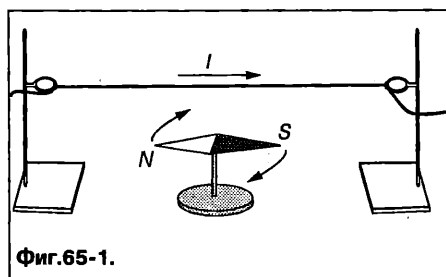
Задачи

1. По праволинеен проводник с дължина 0,5 m тече ток $I = 20$ A. Проводникът сключва ъгъл 45° с индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция $B = 0,3$ T. Определете магнитната сила, действаща на проводника.
2. Проводник с дължина $L = 0,4$ m лежи върху оста x на правоъгълна координатна система. По проводника тече ток $I = 50$ A, който е насочен в положителната посока на оста x. Проводникът е поставен в еднородно магнитно поле с индукция $\mathbf{B} = (0,2 \text{ T})\mathbf{j} + (0,1 \text{ T})\mathbf{k}$. Определете големината на магнитната сила, действаща на проводника.
3. Дълъг праволинеен проводник лежи на оста x на правоъгълна координатна система. По проводника тече ток $I = 5$ A, насочен в положителната посока на оста x. Проводникът се намира в магнитно поле с индукция $\mathbf{B} = a\mathbf{i} + b\mathbf{xj}$, където $a = 0,02$ T, $b = 0,01$ T/m. Определете магнитната сила, която действа на участъка от проводника, разположен между точките $x_1 = 1$ m и $x_2 = 2$ m.
4. Намотка има 50 навивки, всяка от които е правоъгълник с размери 5 cm x 8 cm. По намотката тече ток 10 A. Определете: а) магнитния момент на една навивка и магнитния момент на цялата намотка; б) максималната стойност на въртящия момент, действащ на намотката в еднородно магнитно поле с индукция 0,05 T.

65. Магнитно поле на постоянен ток

Опит на Оерстед

Първото експериментално доказателство за връзката между електричеството и магнетизма получава датският физик Ханс Кристиан Оерстед (1777–1851), който през 1819 г. открива магнитното действие на електричния ток. Оерстед поставя праволинеен проводник успоредно на стрелката на компас. Когато по него се пусне ток, магнитната стрелката се отклонява от направлението север–юг и застава перпендикулярно на проводника (фиг.65-1). След прекъсване на тока стрелката се връща в началното си положение. Опитът на Оерстед показва, че електричният ток създава магнитно поле, което е подобно на полетата на постоянните магнити.



Фиг.65-1.

Закон на Био–Савар

След откритието на Оерстед френските физици Жан Батист Био (1774–1862) и Феликс Савар (1791–1841) извършват серия от експерименти и установяват връзката между индукцията на магнитното поле в дадена точка от пространството (във вакуум) и тока, който създава това поле. За да се определи магнитното поле на проводник, по който тече ток, използва се принципът на суперпозицията. Отначало ще припомним как в електростатиката с помощта на този принцип се определя електричното поле на наелектризирано тяло във вакуум. Тялото мислено се разделя на много голям (безкраен) брой малки елементи, които се разглеждат като точкови заряди dq . Интензитетът dE на електричното поле

на точков заряд dq в точка P (фиг.65-2а) се определя от закона на Кулон

$$(65.1) \quad dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2},$$

където r е разстоянието от заряда dq до точка P . Това уравнение се записва във векторна форма

$$(65.2) \quad d\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \mathbf{r}_0,$$

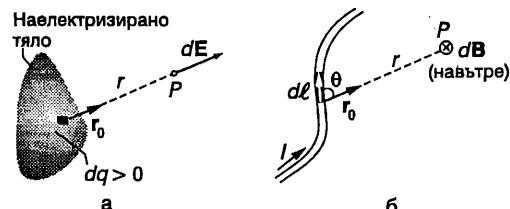
където $\mathbf{r}_0$ е единичен вектор, насочен от заряда dq към точка P (фиг.65-2а). Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на електричното поле на зареденото тяло е векторна сума от интензитетите на полетата на всички малки елементи (точкови заряди), на които то е разделено.

Аналогичен подход се използва, за да се определи индукцията на магнитното поле на проводник, по който тече ток I . Проводникът се разделя мислено на малки части. Всяка част се характеризира с вектор $d\ell$, чийто модул е равен на нейната дължина $d\ell$, а посоката му съвпада с посоката на тока през нея. Произведението $I d\ell$ се нарича *токов елемент*. Био и Савар установяват, че индукцията $d\mathbf{B}$ на магнитното поле, което създава токов елемент $I d\ell$ в точка P , разположена на разстояние r от него (фиг.65-2б), се изразява с уравнението

$$(65.3) \quad d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell \times \mathbf{r}_0}{r^2},$$

където $\mathbf{r}_0$ е единичен вектор, насочен от токовия елемент към точката P . Посоката

Фиг.65-2. а) Елемент със заряд dq създава в точка P електростатично поле с интензитет $d\mathbf{E}$. б) Токов елемент $I d\ell$ създава в точка P магнитно поле с индукция $d\mathbf{B}$. Векторът $d\mathbf{B}$ е насочен перпендикулярно на равнината на чертежа – посоката му е от нас към чертежа.



на вектора $d\mathbf{B}$ съвпада с посоката на векторното произведение $d\ell \times \mathbf{r}_0$.

Величината μ_0 е универсална константа, наречена *магнитна константа*. Нейната стойност в SI е

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Т} \cdot \text{м/А} \approx 1,26 \cdot 10^{-6} \text{ Т} \cdot \text{м/А}.$$

Модулът (големината) на вектора $d\mathbf{B}$ е

$$(65.4) \quad dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \sin\theta}{r^2},$$

където θ е по-малкият ъгъл между векторите $d\ell$ и $\mathbf{r}_0$ (фиг.65-26). Векторното уравнение (65.3) и съответстващото му скалярно уравнение (65.4) изразяват *закона на Био–Савар*. Направеното разглеждане показва, че съществува аналогия между закона на Кулон от електростатиката и закона на Био–Савар за магнитното поле. Токовите елементи, на които мислено се разделя проводник, по който тече ток, създават магнитно поле, а точковите заряди, от които е съставено наелектризирано тяло – електрично поле. Индукцията на магнитното поле на токов елемент намалява обратнопропорционално на квадрата на разстоянието r до елемента (уравнение (65.4)), тъй както интензитетът на електричното поле на точков заряд намалява обратнопропорционално на квадрата на разстоянието r до заряда (уравнение (65.1)). Големината на индукцията dB е право пропорционална на големината на токовия елемент (произведението на тока I и дължината $d\ell$ на разглежданата част от проводника), $dB \propto Id\ell$, а интензитетът на електричното поле – на големината на точковия заряд, $dE \propto dq$.

Съгласно с принципа на суперпозицията индукцията $\mathbf{B}$ на магнитното поле в точка P (фиг.65-26) е векторна сума (интеграл) от индукциите на полетата на всички токови елементи, на които е разделен проводникът:

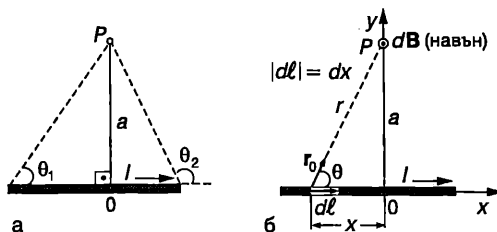
$$(65.5) \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{Id\ell \times \mathbf{r}_0}{r^2}.$$

Пример 65.1. Магнитно поле на праволинеен ток. На фиг.65-3а е показан праволинеен проводник, по който тече постоянен ток I . Определете индукцията на магнитното поле в

точка P . Дадени са ъглите θ_1 и θ_2 и разстоянието a от точка P до проводника.

Решение. Избираме координатна система с ос x , успоредна на проводника. Точка P лежи на оста y (фиг.65-3б). Разглеждаме токов елемент $Id\ell$. Той създава магнитно поле с индукция $d\mathbf{B}$, която е насочена по посока на векторното произведение $d\ell \times \mathbf{r}_0$, т.е. перпендикулярно на равнината xy – от чертежа към нас. Същата посока има магнитната индукция на всички токови елементи, на които е разделен проводникът. Следователно векторът на магнитната индукция $\mathbf{B}$ на полето в точка P е насочен от чертежа към нас, а модулът му е равен на сумата (интеграл) от модулите на индукциите на полетата на всички токови елементи. В случая $|d\ell| = dx$ (фиг.65-3б) и уравнение (65.4) за модула на вектора $d\mathbf{B}$ се записва във вида

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx \sin\theta}{r^2}.$$



Фиг.65-3.

За да интегрираме това уравнение, трябва да изразим променливите r и x чрез променливата θ . От правоъгълния триъгълник на фиг.65-3б изразяваме разстоянието r от токовия елемент до точка P :

$$r = \frac{a}{\sin\theta}.$$

Координатата x на точката, в която се намира началото на разглеждания токов елемент, е $x = -a \cot\theta$. Диференцираме двете страни на това равенство и получаваме

$$dx = \frac{a}{\sin^2\theta} d\theta.$$

Заместваме r и dx в уравнението за dB :

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin\theta d\theta.$$

Интегрираме това уравнение в граници от θ_1 до θ_2 (фиг.65-3а) и определяме големината на магнитната индукция на полето, което създава токът, течащ по целия проводник:

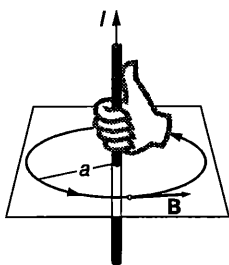
$$(65.6) \quad B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2).$$

Уравнение (65.6) може да се използва за определяне магнитното поле на тока, течащ по праволинеен участък от проводник с произволна дължина. Специално внимание ще отделим на случая, когато праволинейният проводник е безкрайно дълъг. Тогава $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$, $\cos 0 - \cos \pi = 2$ и уравнение (65.6) получава вида

$$(65.7) \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}.$$

Следователно магнитната индукция на полето на тока, течащ по безкраен праволинеен проводник, има постоянна големина във всички точки от пространството, намиращи се на еднакво разстояние a от проводника. Индукционните линии са концентрични окръжности, лежащи в равнини, перпендикулярни на проводника. Проводникът преминава през центъра на тези окръжности.

Фиг.65-4.

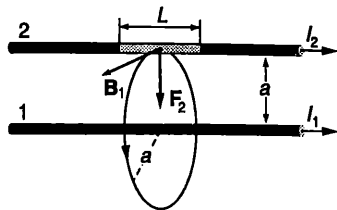


Пример 65.2. Два дълги успоредни праволинейни проводника са разположени на разстояние $a = 1$ m един от друг. По тях текат токове $I_1 = I_2 = 1$ A с еднакви посоки. Определете силата, с която първият проводник действа на участък с дължина $L = 1$ m от втория проводник.

Решение. Взаимодействието между двата проводника се осъществява посредством магнитното поле. Можем да разсъждаваме по следния начин. Токът от първия проводник създава магнитно поле, чиято индукция на разстояние a от него, т.е. на мястото, където се намира вторият проводник, е (вж. пример 65.1)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}.$$

Посоката на вектора B_1 определяме по правилото на дясната ръка: той е насочен перпендикулярно на проводника 2 (фиг.65-5). За всички точки от проводника 2 магнитната индукция B_1 има еднаква големина и е перпендикулярна на проводника. Следователно на участъка с дължина L от проводника 2 ще действа същата сила, както ако е поставен пер-



Фиг.65-5.

пендикулярно на индукционните линии на еднородно поле с индукция B_1 :

$$F_2 = B_1 I_2 L = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi a};$$

$$F_2 = \frac{(4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A})(1 A)(1 A)(1 m)}{2\pi(1 m)} = 2 \cdot 10^{-7} N.$$

Посоката на силата F_2 определяме по правилото на дясната ръка: силата F_2 е насочена към проводника 1 (фиг.65-5). Съгласно с третия принцип на механиката двата проводника взаимодействат с равни по големина и противоположни по посока сили. В случая това са сили на привличане.

Взаимодействието между постоянните токове се използва, за да се даде определение на единицата ампер (A), която е една от основните единици в SI:

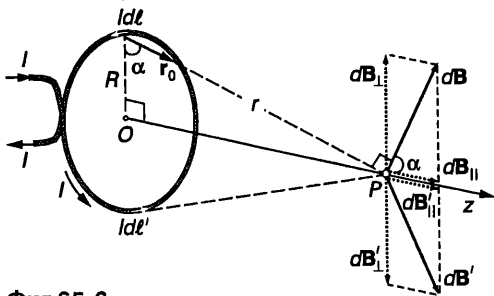
Един ампер (1 A) е постоянен ток, който при протичане по два дълги успоредни праволинейни проводника, поставени на разстояние 1 m един от друг във вакуум, създава между тях взаимодействие със сила $2 \cdot 10^{-7}$ N на всеки метър дължина от проводниците.

Магнитно поле на кръгов ток

На фиг.65-6 е показан проводник с форма на окръжност с радиус R , по който тече постоянен ток I . Ще приложим закона на Био–Савар, за да определим индукцията на магнитното поле на тока в точка P от оста z , която е перпендикулярна на окръжността и преминава през нейния център O . Тъй като векторите r_0 и $d\ell$ са взаимно перпендикулярни ($\theta = 90^\circ$), уравнение (65.4) за индукцията на магнитното поле на токовия елемент $I d\ell$ има вида

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\ell}{r^2},$$

където r е разстоянието от токовия елемент до точка P . (Всички точки от окръжността се намират на еднакво разстояние r от точка P .)



Фиг.65-6.

Векторът $d\mathbf{B}$ сключва ъгъл α с оста z . Той може да се разложи на две компоненти: $d\mathbf{B}_{||}$, която е успоредна на оста z , и $d\mathbf{B}_{\perp}$ — перпендикулярна на оста z . На всеки токов елемент Idl съответства огледално симетричен спрямо центъра O на окръжността токов елемент Idl' . Той създава в точка P магнитно поле, чиято индукция $d\mathbf{B}'$ има същата големина, както $d\mathbf{B}$, и сключва същия ъгъл α с оста z . Компонентите $d\mathbf{B}_{\perp}$ и $d\mathbf{B}'_{\perp}$ имат еднакви големина и противоположни посоки, поради което взаимно се компенсират. Затова индукцията $\mathbf{B}$ на магнитното поле на кръговия ток в точка P е насочена по оста z . Големината на $\mathbf{B}$ е равна на сумата (интеграл) от големините $dB_{||} = dB \cos \alpha$ на успоредните на оста z компоненти на магнитните полета на всички токови елементи, на които е разделен кръговият ток:

$$B = \oint dB \cos \alpha.$$

От правоъгълния триъгълник на фиг. 65-6 изразяваме $\cos \alpha = R/r$. (Двата ъгъла, означени на чертежа с α , са равни, тъй като са ъгли с взаимно перпендикулярни рамена.) Заместяваме dB и $\cos \alpha$ и пресмятаме интеграла

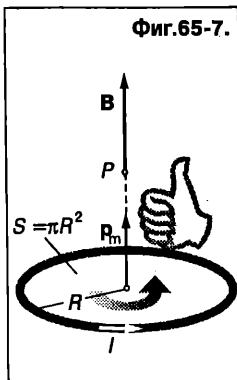
$$(65.8) \quad B = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} \oint dl = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3} (2\pi R) = \frac{\mu_0 IR^2}{2r^3}.$$

Индукцията на магнитното поле в центъра O на окръжността (при $r = R$) е

$$(65.9) \quad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Посоката на вектора $\mathbf{B}$ съвпада с посоката на магнитния момент $\mathbf{p}_m$ на кръговия ток (фиг.65-7). След като отчетем, че $p_m = IS = I\pi R^2$ (вж. §64), записваме уравнение (65.8) във векторна форма:

Фиг.65-7.

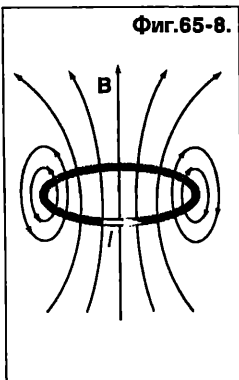


(65.10)

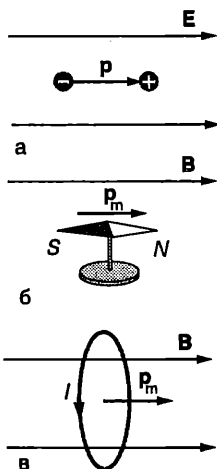
$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mathbf{p}_m}{2\pi r^3}.$$

Следователно индукцията на магнитното поле на кръговия ток намалява обратнопропорционално на куба на разстоянието r до проводника ($B \propto 1/r^3$). По подобен начин се изменя полето на електричен дипол: $E \propto 1/r^3$ (вж. §50). Индукционните линии на полето на кръгов ток са показани на фиг. 65-8. Те са подобни на силовите линии на електричното поле на електричния дипол (фиг. 50-2 на стр.35). Освен това магнитното поле на кръговия ток е подобно на полето на къс прав магнит (вж. фиг. 62-1 на стр.80). Магнитната стрелка и късият прав магнит, които имат два противоположни магнитни полюса (северен N и южен S), разположени близо един до друг, са примери за магнитни диполи. Кръговият ток също е магнитен дипол, защото има следните свойства:

Фиг.65-8.



Фиг.65-9. а) Електричните сили ориентират електричния дипол по посока на електричното поле. По подобен начин магнитните сили ориентират по посока на магнитното поле магнитните диполи: б) магнитна стрелка; в) проводник, по който тече кръгов ток.



1. Създава поле на магнитен дипол.
2. В магнитно поле под действие на

въртящия момент на магнитните сили се ориентира така, че магнитният му момент $\mathbf{p}_m$ да е насочен по посока на индукцията на външното магнитно поле (фиг. 65-9в).

Както ще видим в §68, кръгови токове текат в атомите. Тези токове определят магнитните свойства на веществата.

Закон на Ампер

В електростатиката установихме (вж. §46, стр.19), че циркуляцията на електростатичното поле по произволен затворен контур

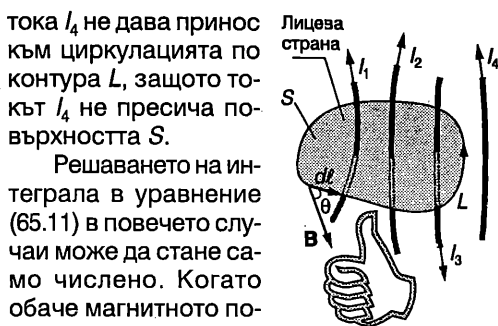
L е равна на нула: $\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Френският

физик Андре-Мари Ампер (1775–1836) пръв установява връзката между циркуляцията на постоянното магнитно поле и токовете, които създават това поле. Законът на Ампер гласи:

Циркуляцията по произволен затворен контур L (амперов контур) на индукцията $\mathbf{B}$ на постоянното магнитно поле във вакуум е равна на произведението на магнитната константа μ_0 и пълния ток I , пресичащ произволна повърхност S , ограничена от контура L :

$$(65.11) \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I.$$

Фиг.65-10 показва как се прилага законът на Ампер. Отначало се избира амперовият контур L и повърхност S , ограничена от този контур. Избира се посока на обикаляне на контура, т.е. посока на елементарните вектори $d\mathbf{l}$. По правилото на дясната ръка се определя коя е лицевата страна на повърхността S : свитите пръсти сочат посоката на обикаляне на контура, а опънатия палец е насочен от опаката към лицевата страна на S . След това се пресмятат скаларните произведения $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B d\mathbf{l} \cos \theta$ и се сумират (пресмята се интегралът в уравнение (65.11)). Токовете, които пресичат повърхността S от опаката към лицевата страна, се вземат със знак плюс, а токовете, насочени от лицевата към опаката страна на S – със знак минус. В случая $I = I_1 + I_2 - I_3$. Ще обърнем внимание, че магнитното поле на

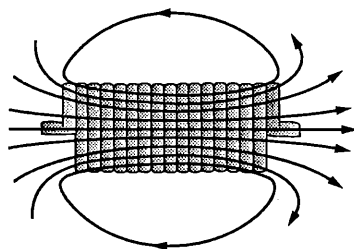


Фиг.65.10.

Пример 65.3. Магнитно поле на соленоид.

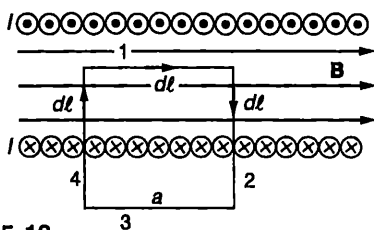
По цилиндрична намотка (соленоид) тече постоянен ток I (фиг.65-11). Определете индукцията на магнитното поле вътре в намотката. Дължината на намотката е ℓ , а броят на навивките ѝ е N . Дължината на намотката е много по-голяма от диаметъра на напречното ѝ сечение.

Решение. Когато броят на навивките е голям



Фиг.65-11.

и те са разположени плътно една до друга, магнитното поле вътре в соленоида е силно и приблизително еднородно. Полето извън соленоида е много по-слабо и може да не се отчита. Затова ще смятаме, че в соленоида полето е еднородно, а извън него е равно на нула. Колкото по-дълъг е соленоидът и колкото по-плътно са разположени намотките му, толкова по-точно се изпълнява това условие. Напречно сечение на такъв соленоид е показано на фиг.65-12. За да определим индукцията B на еднородното магнитно поле в соленоида, ще използваме закона на Ампер. Избираме амперов контур с форма на квадрат със страна a (фиг.65-12). Частите от квадрата, които са извън соленоида, нямат принос в циркуляцията, защото там $\mathbf{B} = 0$. Част от страните 2 и 4 на квадрата са



Фиг.65-12.

разположени вътре в соленоида, но те също нямат принос в циркулацията, тъй като за тях векторите $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ са взаимно перпендикулярни и скаларното им произведение е нула: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$. Циркулацията се определя само от страната 1, където векторите $\mathbf{B}$ и $d\mathbf{l}$ са успоредни: $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bdl$. Следователно

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{квадрат}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B \int_{\text{страна 1}} d\mathbf{l} = Ba.$$

Броят на навивките, пресичащи квадрата, е $\frac{N}{\ell}a$, където отношението $\frac{N}{\ell}$ е равно на броя на навивките на единица дължина от соленоида (плътност на навивките). По всяка навивка тече ток I и тези токове присичат повърхността, ограничена от контура (квадрата), от лицевата към опаката страна. Затова общият ток през тази повърхност е $\frac{N}{\ell}al$. От закона на Ампер следва равенството

$$Ba = \mu_0 \frac{N}{\ell} al,$$

откъдето определяме индукцията на магнитното поле в соленоида

$$(65.12) \quad B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I.$$

Следователно индукцията на магнитното поле в дълъг соленоид е пропорционална на тока I , който тече по соленоида, и на плътността на неговите навивки $\frac{N}{\ell}$.

Задачи

1. Когато по дълго праволинейно нервно влакно преминава токов импулс, на разстояние 1 mm от влакното е измерено магнитно поле с индукция $1 \cdot 10^{-10}$ Т. Колко ампера е токът през влакното?

2. а) По кръгов проводник с радиус $R = 1$ cm тече ток $I = 10$ А. Пресметнете индукцията на

магнитното поле на тока в центъра на кръга.

б) Съгласно с модела на Бор електронът в атома на водорода обикаля около протона със скорост $v = 2,2 \cdot 10^6$ m/s по кръгова орбита с радиус $r_B = 5,3 \cdot 10^{-11}$ m. Определете индукцията на магнитното поле на електрона в центъра на орбитата.

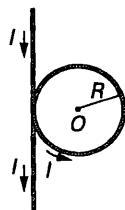
3. По соленоид, който има по 100 навивки на 1 cm дължина, тече ток 10 А. Пресметнете индукцията на магнитното поле в соленоида.

4. В соленоид с по 200 навивки на 1 cm дължина е поставен втори соленоид с по-малък диаметър, който има 100 навивки на 1 cm дължина. Осите на двата соленоида съвпадат. По двата соленоида тече ток 10 А. Определете индукцията на магнитното поле в малкия соленоид, ако токовете по двата соленоида имат: а) еднакви посоки; б) противоположни посоки.

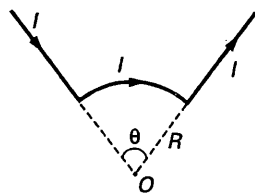
5. По проводник, съставен от два дълги праволинейни участъка и от окръжност с радиус R (фиг.65-13), тече ток I . Определете големината и посоката на индукцията на магнитното поле на тока в центъра O на окръжността.

6. Проводник има два праволинейни участъка и участък с форма на дъга от окръжност с радиус R и централен ъгъл θ (фиг.65-14). По проводника тече ток I . Определете индукцията на магнитното поле в центъра O на окръжността.

Указание. Използвайте закона на Био-Савар. Докажете, че токът от праволинейните участъци на проводника не създава магнитно поле в точка O .



Фиг.65-13.



Фиг.65-14.

7. По дълъг цилиндричен проводник с радиус R тече постоянен ток I , който е разпределен равномерно в напречното сечение на цилиндъра (плътността на тока е константа). Определете индукцията на магнитното поле на тока на разстояние a от оста на цилиндъра. Разгледайте два случая: а) $a > R$; б) $a < R$.

Указание. Полето има осева симетрия: индукционните линии са концентрични окръжности, чиито центрове лежат на оста на цилиндъра. За амперови контури изберете две индукционни линии с радиуси $a_1 > R$ и $a_2 < R$. Отчетете, че само част от тока пресича повърхността, ограничена от контура с радиус a_2 .

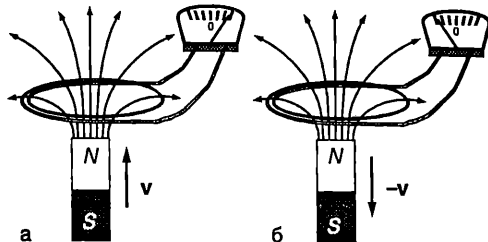
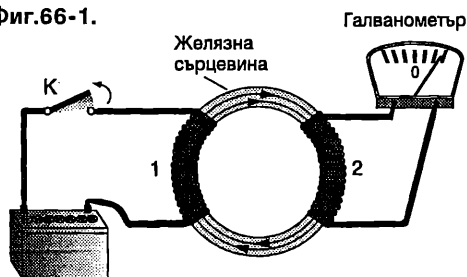
66. Електромагнитна индукция

Опитът на Оерстед и изследванията на Био, Савар и Ампер показват, че електричният ток създава магнитно поле. Фарадей, който е убеден в "единството на природните сили", стига до извода, че трябва да съществува и обратното явление – магнитно поле да предизвика протичане на електричен ток по проводник. „Да се превърне магнетизмът в електричество“, така Фарадей формулира в своя дневник задачата, над която работи в продължение на десет години. През 1831 г. той открива принципно ново явление – явлението електромагнитна индукция, което показва неразривната връзка между електричеството и магнетизма. Откритието на Фарадей има огромно значение за науката и техниката. На електромагнитната индукция се основава действието на много уреди – на електрическите генератори в съвременните електроцентрали, на трансформаторите и др.

Опити на Фарадей

Фарадей провежда многобройни опити, с цел да получи електричен ток с помощта на магнитно поле. Първият от тях е показан на *фиг.66-1*. Намотката 1 е свързана към източник на ток, а намотката 2 – към галванометър. Нулата на галванометъра е разположена по средата на скалата, така че в зависимост от посоката на тока стрелката се отклонява наляво или надясно. Отначало Фарадей навива намотките около дървено колело, което впоследствие заменя с желязна сърцевина. Сърцевината усилва магнитното поле, създадено от първата намотка, и концентрира индукционните му линии, при което те преминават и през втората намотка. Незави-

Фиг.66-1.



Фиг.66-2.

симо, че втората намотка се намира в силно магнитно поле, по нея не тече ток и стрелката на галванометъра е на нулата. Фарадей обаче забелязва, че стрелката за кратко време рязко се отклонява в една посока при затварянето на ключа K , т.е. в момента на пускане на тока през първата намотка. Същото отклонение, само че в противоположната посока, се наблюдава при прекъсване на електрическата верига (*фиг.66-1*). Фарадей стига до извода, че постоянното магнитно поле не предизвиква протичане на ток през втората намотка. Ток протича само когато полето се променя – нараства в момента на включване на тока или намалява при прекъсване на веригата.

Друг опит е показан на *фиг.66-2*. Когато постоянният магнит се вкарва бързо в намотката, по нея протича ток и стрелката на галванометъра се отклонява (*фиг.66-2a*). При изваждане на магнита от намотката също протича ток, само че в противоположната посока (*фиг.66-2б*). Ток не тече, ако магнитът е неподвижен. Този опит също показва, че ток протича, само когато намотката се намира в променливо магнитно поле: при приближаване на магнита полето нараства, а при отдалечаването му – намалява.

Явлението, при което поради промяна на магнитното поле в един затворен проводников контур (намотка) протича ток, се нарича *електромагнитна индукция*, а самият ток – *индуциран ток*. Електродвижещото напрежение, което поражда индуцирания ток, се нарича *индуцирано ЕДН*.

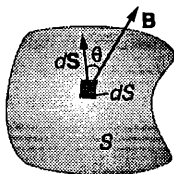
Магнитен поток

Индуцираното ЕДН се определя от изменението на една от характеристиките на магнитното поле, наречена *магнитен*

поток. Магнитният поток се дефинира по аналогичен начин (вж. §45), както потокът на интензитета на електричното поле (електричен поток). На *фиг.66-3* е показан малък елемент с площ dS от повърхност S с произволна форма. Индукцията на магнитното поле на повърхността на елемента dS е B . По определение магнитният поток през елемента dS е

$$d\Phi_B = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = B dS \cos\theta,$$

където $d\mathbf{S}$ е перпендикулярен на повърхността вектор, чиято големина е равна на площта dS на елемента. Страната, от която излиза векторът $d\mathbf{S}$, се приема за лицева страна на повърхността. Магнитният поток е положителен ($d\Phi_B > 0$) при $\theta < 90^\circ$, т.е. когато индукционните линии прободат повърхността от опаката към лицевата страна. Магнитният поток е отрицателен ($d\Phi_B < 0$), когато индукционните линии са насочени от лицевата към опаката страна. Магнитният поток Φ_B през цялата повърхност S е



Фиг.66-3.

$$(66.1) \quad \Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

В частния случай, когато повърхността е част от равнина, а магнитното поле е еднородно, магнитният поток през площ S от равнината е (*фиг.66-4а*)

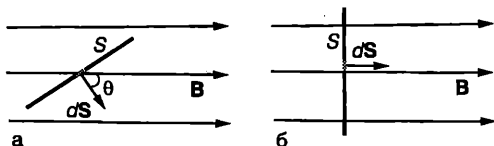
$$(66.2) \quad \Phi_B = BS \cos\theta.$$

Магнитният поток е максимален при $\theta = 0$, т.е. когато повърхността е перпендикулярна на индукционните линии (*фиг.66-4б*). Тогава

$$(66.3) \quad \Phi_B = BS.$$

Единицата за магнитен поток се нарича *вебер* (Wb). От уравнение (66.3) следва, че $1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$.

Фиг.66-4.



Закон на Фарадей

Когато в опита, показан на *фиг.66-2а*, магнитът се приближава към намотката, броят на индукционните линии, които я прободат, нараства. Следователно нараства магнитният поток през напречното сечение на намотката. Когато магнитът се отдалечава (*фиг.66-2б*), магнитният поток през намотката намалява. Опитът показва, че индуцираният ток и индуцираното ЕДН нарастват, ако магнитът се движи с по-голяма скорост v , т.е. когато магнитният поток през намотката се променя по-бързо. Изменението на магнитния поток през намотката за време dt е $d\Phi_B$. Отношението $d\Phi_B/dt$, т.е. първата производна на магнитния поток по времето, се нарича *скорост на изменение на магнитния поток*.

Фарадей обобщава резултатите от различните опити и формулира следния закон, наречен в негова чест закон на Фарадей:

Големината на индуцираното в проводников контур ЕДН е равно на скоростта, с която се изменя магнитният поток през повърхността, заградена от контура.

Законът на Фарадей се изразява с уравнението

$$(66.4) \quad \mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt},$$

където знакът минус е следствие от правилото на Ленц, което ще разгледаме по-нататък. Когато ЕДН се индуцира в намотка с N на брой еднакви навивки, през всяка от които преминава един и същ магнитен поток, законът на Фарадей се изразява с уравнението

$$(66.5) \quad \mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Пример 66.1. Цилиндрична намотка с радиус R има N навивки. Оста на намотката е успоредна на индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция B_0 . В момента $t = 0$ полето започва да намалява по експоненциалния закон $B = B_0 e^{-ct}$, където c е константа. Определете индуцираното в намотката ЕДН

като функция на времето t .

Решение. Магнитният поток през напречното сечение на намотката е

$$\Phi_B = BS = B_0 e^{-ct} \pi R^2.$$

Индуктираното ЕДН определяме от закона на Фарадей (66.5)

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = N\pi R^2 c B_0 e^{-ct}.$$

Следователно индуцираното ЕДН е максимално, $\mathcal{E}_{\max} = N\pi R^2 c B_0$, в началния момент $t = 0$, в който започва да се изменя магнитното поле, а след това намалява по същия експоненциален закон, както магнитната индукция B .

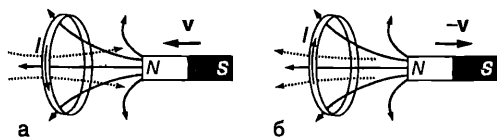
Правило на Ленц

Руският физик от германски произход Емил Ленц (1804–1865) установява общо правило, което позволява да се определи посоката на индуцирания ток:

Посоката на индуцирания ток в затворен проводников контур е такава, че магнитното поле на тока се противопоставя на изменението на магнитния поток, което поражда този ток. Индуцираният ток винаги се стреми да запази първоначалния магнитен поток през контура.

Ще поясним правилото на Ленц с два примера. Когато магнитът от *фиг.66-5а* се приближава към металния пръстен, магнитният поток през пръстена нараства. В пръстена се индуцира ток, чиято посока съгласно с правилото на Ленц е такава, че магнитното поле на тока да се противопостави на това нарастване. Следователно индукционните линии на магнитното поле на тока трябва да са насочени срещу индукционните линии на полето на постоянния магнит. На *фиг.66-5* индукционните линии на магнитното поле на тока са представени с пунктир. Посоката на тока I , която отговаря на това изискване, се оп-

Фиг.66-5.



ределя по правилото на дясната ръка (вж. *фиг.65-7* и *фиг.65-8* на стр.94). При отдалечаване на магнита (*фиг.66-5б*) магнитният поток през пръстена намалява. Съгласно с правилото на Ленц индуцираният ток се стреми да поддържа постоянен първоначалния магнитен поток, т.е. противопоставя се на намаляването му. Затова индукционните линии на полето на тока имат същата посока както индукционните линии на полето на магнита. Следователно сега посоката на тока е противоположна на посоката на тока от първия случай.

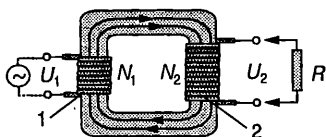
Има и други формулировки на правилото на Ленц. По-общо бихме могли да кажем, че съгласно с правилото на Ленц резултатът от електромагнитната индукция противодейства на промените, които я предизвикват.

Трансформатор

Трансформаторът е устройство, с помощта на което се увеличава или се намалява амплитудата на променливо напрежение. Той се състои от затворена желязна сърцевина, на която са надянати две намотки с различен брой навивки (*фиг.66-6*). Едната намотка се нарича *първична*, а другата – *вторична*. Първичната намотка се свързва към източника на променливо напрежение, а към вторичната намотка се включва потребителят. Действието на трансформатора се основава на явлениято електромагнитна индукция. При протичане на променлив ток в първичната намотка възниква променливо магнитно поле, което индуцира напрежение във вторичната намотка. Трансформаторите се конструират така, че почти всички индукционни линии на магнитното поле да се затварят вътре в желязната сърцевина, т.е. да пресичат вторичната намотка. Тогава магнитният поток Φ_B през напречните сечения на двете намотки е еднакъв. Индуцираните в двете намотки електродвижещи напрежения се изразяват от закона на Фарадей (66.5):

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt}; \quad \mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt},$$

където N_1 и N_2 е броят на навивките съответно в първичната (1) и вторичната (2)



Задачи

Фиг. 66-6. Трансформатор.

намотки. От правилото на Кирхоф за токовия контур следват равенствата

$$(66.6) \quad \mathcal{E}_1 = U_1 + r_1 I_1; \quad \mathcal{E}_2 = U_2 + r_2 I_2,$$

където U_1 е напрежението на входа на трансформатора, U_2 – напрежението на изхода, r_1 е съпротивлението на първичната намотка, r_2 – на вторичната намотка, а I_1 и I_2 са съответно токовете през двете намотки. За повечето технически трансформатори е в сила неравенството $r_1 I_1 \ll \mathcal{E}_1$ и падът на напрежението $r_1 I_1$ може да се пренебрегне. Ще се ограничим с разглеждане на частния случай, когато към вторичната намотка не е включен консуматор (трансформаторът работи на празен ход). Тогава $I_2 = 0$ и уравнения (66.6) получават вида

$$\mathcal{E}_1 = -N_1 \frac{d\Phi_B}{dt} = U_1; \quad \mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\Phi_B}{dt} = U_2.$$

Делим почленно двете уравнения и получаваме

$$(66.7) \quad \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

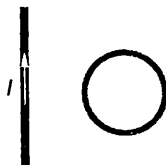
Когато $N_2 > N_1$, изходното напрежение U_2 е по-голямо от входното напрежение U_1 . Такъв трансформатор се използва за повишаване на напрежението. Обратно, понижаващите трансформатори имат вторични намотки с по-малък брой навивки ($N_2 < N_1$) и при тях $U_2 < U_1$.

Трансформаторите намират широко приложение в енергетиката и в техниката. В електроснабдяването се използват силови трансформатори, предназначени за големи мощности – десетки и стотици MW. Трансформаторите, които захранват радиоелектронната апаратура с енергия от градската мрежа, се наричат мрежови трансформатори. В различни радиотехнически устройства се използват високочестотни трансформатори, които преобразуват напрежения с честоти над 50 Hz.

✓ 1. Пръстен с радиус 0,01 m е поставен перпендикулярно на индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция 0,1 T. Колко е големината на магнитния поток през пръстена?

✓ 2. Магнитният поток през проводников контур се изменя с постоянна скорост от $\Phi_1 = -0,1$ Wb до $\Phi_2 = 0,3$ Wb за време $\tau = 0,1$ s. Колко е индуцираното ЕДН?

3. Проводников контур и дълъг праволинеен проводник, по който тече ток, лежат в една равнина (фиг. 66-7). Определете посоката на индукцирания в контура ток, ако контурът: а) се отдалечава от проводника; б) се приближава към проводника.



Фиг. 66-7.

✓ 4. Пръстен с диаметър $d = 2$ cm и съпротивление $R = 0,01 \Omega$ е поставен перпендикулярно на индукционните линии на еднородно магнитно поле. За време $\tau = 0,02$ s индукцията на полето равномерно намалява от $B = 0,2$ T до нула. Определете: а) индуцираното в пръстена ЕДН; б) индукцирания ток.

5. Намотка с $N = 200$ навивки и напречно сечение $S = 10$ cm² е поставена в еднородно магнитно поле, чиято индукция се изменя със скорост $dB/dt = 0,2$ T/s. Индукционните линии са перпендикулярни на напречното сечение на намотката. Колко е индуцираното в намотката ЕДН?

✓ 6. Магнитният поток през напречното сечение на намотка с 10 еднакви навивки се изменя с постоянна скорост 0,5 Wb/s. Определете индукцирания ток, ако съпротивлението на намотката е 2 Ω .

7. Тънък кръгов проводник с радиус $a = 10$ cm и съпротивление $R = 3,14 \Omega$ е поставен перпендикулярно на индукционните линии на еднородно магнитно поле с индукция $B = 0,1$ T. Пресметнете електричния заряд, който ще премине през напречното сечение на проводника, ако индукцията на магнитното поле намалява до нула.

8. На входа на трансформатор е подадено напрежение 220 V от електрическата мрежа. Колко е напрежението на изхода на трансформатора, ако вторичната му намотка има 10 пъти по-малко навивки, отколкото първичната намотка?

67. Индуктивност. Енергия на магнитното поле

Самоиндукция

На *фиг.67-1* е показана намотка с N навивки, по която тече ток. Той създава магнитно поле и магнитен поток Φ_B през напречното сечение на намотката. Ако токът I се изменя с течение на времето, магнитният поток Φ_B също се изменя и в намотката се индуцира ЕДН. Явлението, при което промяната на тока в един проводник индуцира ЕДН в същия проводник, се нарича *самоиндукция*.

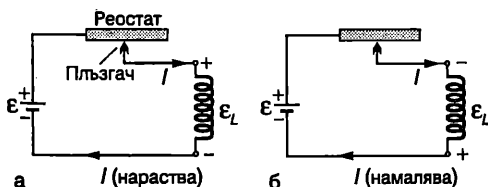
Самоиндукцията също се описва от закона на Фарадей. Магнитният поток Φ_B през намотката е право пропорционален на индукцията B на магнитното поле, а индукцията B от своя страна е право пропорционална на тока I , който създава магнитното поле. Следователно, съгласно със закона на Фарадей, самоиндуцираното ЕДН ε_L е пропорционално на скоростта dI/dt , с която се изменя токът:

$$(67.1) \quad \varepsilon_L = -N \frac{d\Phi_B}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Коефициентът на пропорционалност L се нарича *индуктивност* на проводника. Индуктивността зависи от размерите и формата на проводника, както и от магнитните свойства на средата, в която той се намира. (Трябва да се подчертае, че индуктивността не зависи от тока.) От уравнение (67.1) индуктивността на намотката може да се изрази чрез магнитния поток Φ_B през напречното ѝ сечение, броя N на навивките и тока I :

$$(67.2) \quad L = \frac{N\Phi_B}{I}.$$

Фиг.67-1.



От уравнение (67.1) индуктивността на намотката се изразява също така чрез индуцираното ЕДН и скоростта на изменение на тока:

$$(67.3) \quad L = \left| \frac{\varepsilon_L}{dI/dt} \right|.$$

Единицата за индуктивност се нарича *хенри* (Н) в чест на американския физик Джоузеф Хенри (1797–1878), който независимо от Фарадей открива закона за индуцираното ЕДН.

Съгласно с уравнение (67.3)

$$1 \text{ Н} = 1 \text{ V} \cdot \text{s/A}.$$

Индуктивността на даден проводник е $L = 1 \text{ Н}$, ако при промяна на тока със скорост $dI/dt = 1 \text{ A/s}$ в него се самоиндуцира напрежение $\varepsilon_L = 1 \text{ V}$.

Може да се направи аналогия между индуктивността на проводниците и масата на телата. Както знаем от механиката, колкото масата m е по-голяма, толкова тялото е по-инертно и по-трудно може да се промени неговата скорост. По подобен начин, колкото индуктивността L на един проводник е по-голяма, толкова по-бавно се променя токът през него.

Ще обърнем внимание, че уравнение то за самоиндуцираното напрежение

$$(67.4) \quad \varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

е в сила не само за намотка, но и за всеки проводник, токът през който се изменя с течение на времето. Съединителните проводници и резисторите в една електрическа верига обаче имат много малка индуктивност, затова тяхното ЕДН на самоиндукция се пренебрегва.

Както вече отбелязахме, чрез знака минус в уравненията, изразяващи закона на Фарадей, се отчита правилото на Ленц. За да изясним този въпрос, ще разгледаме електрическата верига от *фиг.67-1*. Когато плъзгачът на реостата се премества наляво, съпротивлението на реостата намалява, а токът във веригата расте. В намотката се самоиндуцира ЕДН ε_L , което съгласно с правилото на Ленц се противопоставя на нарастването на тока. Ако разглеждаме намотката като източник на ток с ЕДН ε_L , неговият положителен по-

люс трябва да е свързан с положителния полюс на външния източник. Такъв „на срещено“ свързан източник намалява тока във веригата и има отрицателно ЕДН ($\mathcal{E}_L < 0$). Същото следва и от уравнение (67.4). Действително, когато токът нараства, първата му производна по времето е положител-

на. Тогава $\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt} < 0$. Когато токът във веригата намалява (фиг.67-16), съгласно с правилото на Ленц индуцираното в намотката ЕДН $\mathcal{E}_L$ се противопоставя на това намаляване, т.е. то поддържа тока във веригата. В този случай можем да разглеждаме намотката като източник с ЕДН $\mathcal{E}_L$, чийто отрицателен полюс е свързан към положителния полюс на външния източник и по този начин този допълнителен източник усилва тока във веригата (електродвижещото му напрежение е положително: $\mathcal{E}_L > 0$). Когато токът намалява, първата му производна е отрицателна и от уравнение (67.4) също следва, че $\mathcal{E}_L > 0$.

Пример 67.1. Индуктивност на соленоид. Определете индуктивността на соленоид с дължина $\ell = 20$ см и напречно сечение $S = 2$ см², който има $N = 500$ навивки.

Решение. Тъй като дължината на соленоида е много по-голяма от диаметъра му и плътността на навивките е голяма, магнитното поле, което се създава вътре в соленоида при протичане на ток I по навивките му, е приблизително еднородно. Индукцията му е (вж. пример 65.3)

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I.$$

Магнитния поток през произволно напречно сечение на соленоида, т.е. през всяка негова навивка, е

$$\Phi_B = BS = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} IS.$$

Индуктивността на соленоида определяме от уравнение (67.2):

$$(67.5) \quad L = \frac{N\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}; \quad L = 0,31 \text{ мН.}$$

Направените пресмятания са за случая, когато соленоидът се намира във вакуум (или във въздух). Индуктивността на соленоида многократно нараства, когато в него се постави желязна сърцевина.

Енергия на магнитното поле

При затваряне на ключа К токът в електрическата верига от фиг.67-2 не достига мигновено максималната си стойност. Причина за постепенното му нарастване е самоиндуцираното в намотката ЕДН

$\mathcal{E}_L = -L \frac{dI}{dt}$, което съгласно с правилото на Ленц се противопоставя на нарастването на тока. Токовият източник с ЕДН $\mathcal{E}$ трябва да извърши допълнителна работа за преодоляване на това противодействие и за създаване на тока. Затова само част от енергията, която се черпи от източника, се преобразува в джаулова топлина в резистора, а останалата част се натрупва в намотката. За да анализираме преобразуването на енергията количествено, ще приложим правилото на Кирхоф за токовия контур: $\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = RI$. Заместваме $\mathcal{E}_L$ и записваме това уравнение във вида

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt}.$$

Умножаваме двете страни на уравнение-то по $I dt$ и получаваме

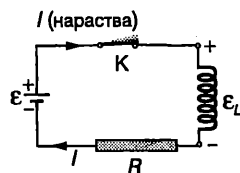
$$(67.6) \quad \mathcal{E} I dt = RI^2 dt + L I dI.$$

Това уравнение изразява закона за запазване на енергията: енергията $\mathcal{E} I dt$, която се черпи за време dt от източника, е равна на сумата от отделеното в резистора за същото време количество топлина $\delta Q = RI^2 dt$ и енергията $dW_B = L I dI$, натрупана в намотката при увеличаване на тока с dI за време dt . Цялата енергия, която се натрупва в намотката при нарастване на тока от нула до I , е

$$W_B = \int_0^{W_B} dW_B = \int_0^I L I dI;$$

$$(67.7) \quad W_B = \frac{1}{2} L I^2.$$

Следователно енергията W_B е пропорционална на квадрата на тока I , Фиг.67-2.



който тече по намотката, така както енергията на зареден кондензатор е право пропорционална на квадрата на заряда q на кондензатора: $W_E = q^2/2C$ (вж. уравнение (49.8) на стр.33). В електростатиката (вж. §49) обърнахме внимание на факта, че енергията на заредения кондензатор всъщност е енергия на неговото електрично поле. Аналогично, енергията на тока през намотка (проводник) с индуктивност L е енергия на магнитното поле, което този ток създава. Плътността на енергията на електричното поле w_E е право пропорционална на квадрата на интензитета E на полето. Във вакуум $w_E = \epsilon_0 E^2/2$ (вж. уравнение (49.10) на стр.33). Доказва се, че плътността на енергията на магнитното поле w_B (енергията на единица обем от пространството, в което има поле) е право пропорционална на квадрата на магнитната индукция B на полето. За магнитно поле във вакуум

$$(67.8) \quad w_B = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

където μ_0 е магнитната константа.

Пример 67.2. Докажете, че обемната плътност на енергията на магнитното поле на тока, течащ по дълъг соленоид, се изразява с уравнение (67.8).

Решение. Индуктивността на соленоида се из-

разява с уравнение (67.5): $L = \frac{\mu_0 N^2 S}{\ell}$. Магнит-

ното поле в соленоида е приблизително едно-

родно, а индукцията му се изразява с уравне-

ние (65.12): $B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$. Заместваме L и I от тези две уравнения в уравнение (67.7) за енергията на магнитното поле на тока и след елементарни преобразования получаваме

$$W_B = \frac{B^2}{2\mu_0} S \ell,$$

където $S \ell$ е обемът на соленоида, т.е. обемът от пространството, заето от еднородното магнитно поле на тока. Следователно плътността на енергията на магнитното поле на тока е

$$w_B = \frac{W_B}{S \ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

1. Токът през намотка с индуктивност $L = 0,5$ H намалява равномерно от $I_1 = 10$ A до $I_2 = 2$ A за време $\tau = 0,1$ s. Колко е самоиндуцираното ЕДН?

2. Колко е енергията на магнитното поле на ток $I = 10$ A, течащ по намотка с индуктивност $L = 0,6$ H?

3. Токът през намотка нараства два пъти. Как се изменя: а) индукцията на магнитното поле на тока; б) магнитният поток през намотката; в) индуктивността на намотката; г) енергията на магнитното поле на тока?

4. Токът в намотка нараства с постоянна скорост 50 A/s. Колко е индуктивността на намотката, ако в нея се самоиндуцира напрежение 25 V?

5. Колко метра тънък проводник е необходим за изготвяне на соленоид с дължина $\ell = 25$ cm и индуктивност $L = 1$ mH? Дължината на соленоида е много по-голяма от диаметъра на напречното му сечение.

6. Когато в дадена намотка тече ток 5 A, енергията на магнитното поле на тока е 0,5 J. Колко е индуктивността на намотката?

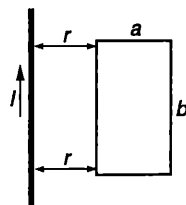
7. Когато в намотка тече ток 2 A, енергията на магнитното поле на тока е 1 J. При какъв ток магнитното поле има енергия 16 J?

8. По безкрайно дълъг праволинеен проводник тече ток I . Определете обемната плътност на енергията на магнитното поле на тока на разстояние a от проводника. Проводникът е във вакуум.

9. При какъв интензитет E плътността на енергията на електрично поле във вакуум е равна на плътността на енергията на магнитно поле с индукция $B = 0,1$ T също във вакуум?

10. Безкрайно дълъг праволинеен проводник и правоъгълна проводникова рамка лежат в една равнина, както е показано на фиг.67-3. Покажете, че когато токът по проводника се изменя с течение на времето t по закона $I = I_0 e^{-t/\tau}$ (I_0 и τ са константи), в рамката се индуцира електродвижещо напрежение с големина

$$|\mathcal{E}| = \frac{\mu_0 b I}{2\pi t} \ln\left(1 + \frac{a}{r}\right).$$



68. Уравнения на Максвел

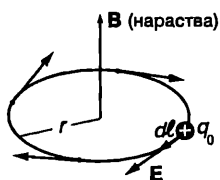
През 60-те години на XIX век британският физик Джеймс Кларк Максвел (1831–1879) обобщава откритите опитно закономерности за електричните и магнитните явления и създава единна теория на електромагнитното поле. Теорията на Максвел се изразява математически с четири уравнения, чиято роля в електродинамиката (науката, която изучава електричните и магнитните явления) е подобна на ролята на принципите на Нютон в класическата механика.

Вихрово електрично поле

Опитите на Фарадей доказват, че променливото магнитно поле индуцира ЕДН в проводников контур. Каква е физичната природа на електродвижещите сили, които привеждат в насочено движение свободните заряди и поддържат протичането на индуцирания ток? Опитът показва, че тези сили не зависят нито от веществото на проводника, нито от неговата температура и не са свързани със специфични промени в свойствата на проводника. Те се определят единствено от изменението на магнитното поле. Като анализира явлението електромагнитна индукция, Максвел прави извода, че електродвижещите сили по своята природа са електрични сили, т.е. че *променливото магнитно поле създава електрично поле*.

За да илюстрираме свойствата на това индуцирано електрично поле, ще разгледаме кръгов проводник с радиус r , поставен перпендикулярно на индукционните линии на магнитно поле с цилиндрична симетрия (фиг.68-1). Такова поле може да се създаде, например, между полюсите на електромагнит или в дълъг соленоид. Центърът на проводника лежи върху оста на симетрия. Магнитното поле се изменя с течение на времето и съгласно със закона на Фарадей в проводника се индуцира ЕДН. Токите носители извършват насочено

Фиг.68-1.



движение под действие на индуцираното електрично поле. От симетрията следва, че интензитетът E на електричното поле е насочен по допирателната към кръговия контур. Да разгледаме пробен заряд q_0 , който извършва елементарно преместване $d\ell$. Електричното поле действа на пробния заряд със сила $q_0 E$, която е насочена по посока на преместването $d\ell$ и извършва положителна работа $q_0 E \cdot d\ell = q_0 E d\ell$. Работата на електричните сили за пренасяне на заряда q_0 по затворения кръгов контур е

$$(68.1) \quad A = q_0 \oint E \cdot d\ell = q_0 E (2\pi r).$$

Следователно работата на силите на индуцираното електрично поле при пренасянето на пробния заряд по затворен контур е различна от нула, което показва, че тези сили (за разлика от електростатичните сили) не са консервативни, а полето не е потенциално.

От друга страна, работата за пренасяне на заряд q_0 по токовия контур може да се изрази чрез индуцираното ЕДН:

$$(68.2) \quad A = q_0 \mathcal{E}.$$

Приравняваме десните страни на уравнения (68.1) и (68.2) и получаваме

$$(68.3) \quad \mathcal{E} = \oint E \cdot d\ell.$$

Уравнението показва, че индуцираното в кръговия проводник ЕДН е равно на работата на електричните сили за пренасяне на единица заряд по проводника. Този резултат остава в сила за проводников контур с произволна форма, поставен в променливо магнитно поле. Заместваем $\mathcal{E}$ от уравнение (68.3) в закона на Фарадей за електромагнитната индукция

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} \text{ и получаваме}$$

$$(68.4) \quad \oint E \cdot d\ell = - \frac{d\Phi_B}{dt}.$$

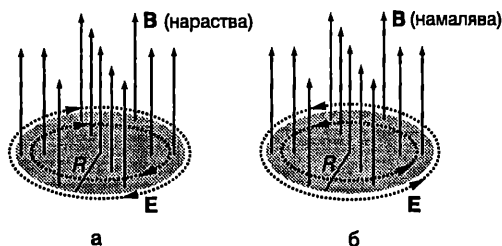
В частния случай, когато проводников контур се намира в променливо магнитно поле, интегралът в лявата част на уравнение (68.4) изразява индуцираното в проводника ЕДН. В общия случай обаче за пресмятането на този интеграл не е необ-

ходим проводник. Както вече беше отбелязано (вж. част, 1 стр.137 и част 2, стр.19), той се нарича циркулация на полето. На закона на Фарадей се дава следната обща формулировка: *Циркулацията на интензитета на индуцираното електрично поле по произволен затворен контур L е равна на взетата с обратен знак скорост на изменение на магнитния поток през произволна площ, заградена от контура L :*

$$(68.5) \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

И така, същността на явлениято електромагнитна индукция е в това, че всяко променливо магнитно поле поражда електрично поле. За разлика от електростатичното поле индуцираното електрично поле е *вихрово*: циркулацията му е различна от нула. Неговите силови линии не започват от положителните заряди и не завършват в отрицателните заряди, както силовите линии на електростатичното поле, а са затворени криви, които обхващат променливия магнитен поток, създаващ електричното поле (фиг.68-2). Ако във вихрово електрично поле се постави проводников контур, в него се индуцира ЕДН и протича ток. Индуцирането на ток обаче е само една от проявите на електромагнитната индукция. За възникването на вихрово електрично поле съвсем не е необходимо наличието на проводници.

Фиг.68-2. Силовите линии на вихровото електрично поле са затворени криви. Те обхващат индукционните линии на променливото магнитно поле, което създава електричното поле. Посоката им може да се определи с помощта на правилото на Ленц. Мислено заменяме силовата линия с токов контур. В контура се индуцира ток, чието магнитно поле се противопоставя на изменението на външното поле (вж. фиг.66-5 на стр. 99). Посоката на силовата линия на вихровото електрично поле съвпада с посоката на индуцирания ток.



Пример 68.1. В цилиндрична област с радиус $R = 10$ cm е създадено еднородно магнитно поле. Индукционните линии на полето са успоредни на оста на цилиндъра (фиг.68-2). Индукцията на полето се изменя с постоянна скорост $dB/dt = 0,5$ T/s. Определете интензитета на вихровото електрично поле на разстояния $r = 5$ cm и $r = 15$ cm от оста на цилиндъра.

Решение. От симетрията следва, че силовите линии на вихровото електрично поле са концентрични окръжности, чиито центрове лежат на оста на цилиндъра (фиг.68-2). Големината на интензитета е постоянна за всички точки от дадена силова линия. Циркулацията на вихровото електрично поле по затворен контур, съвпадащ със силова линия с радиус r , е

$$\oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = E(2\pi r).$$

При $r < R$ магнитният поток през площта, ограничена от кръговия контур, е $\Phi_B = B(\pi r^2)$. Когато $r > R$, магнитният поток е $\Phi_B = B(\pi R^2)$. Заместваем циркулацията и магнитния поток в уравнение (68.5), изпускаме знака минус, който носи информация за посоката на вектора $\mathbf{E}$ (отчита правилото на Ленц) и за големината на интензитета E на вихровото електрично поле на разстояние $r < R$ получаваме

$$E(2\pi r) = \frac{d}{dt}(B\pi r^2) = \pi r^2 \frac{dB}{dt}; \quad E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Следователно върху оста на цилиндъра интензитетът на вихровото електрично поле е $E = 0$ и нараства по линеен закон с увеличаване на разстоянието r до оста ($E \propto r$).

При $r = 0,05$ m, $E = 12,5$ mV/m.

За големината на E извън цилиндъра получаваме

$$E(2\pi r) = \frac{d}{dt}(B\pi R^2) = \pi R^2 \frac{dB}{dt}; \quad E = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}.$$

Извън цилиндъра интензитетът на вихровото електрично поле намалява обратнопропорционално на разстоянието r до оста на цилиндъра ($E \propto 1/r$). При $r = 0,15$ m, $E = 16,7$ mV/m.

Ток на отместване

Като изхожда от схващането за симетрия в природата и нейните закони, Максвел изказва хипотезата, че трябва да съществува и обратното на електромагнитната индукция явление: *Всяко изменящо се с времето електрично поле създава магнитно поле.*

Ще илюстрираме това явление със следния пример: плосък кондензатор с

кръгли електроди се зарежда от ток I . Записваме закона на Ампер за кръговия контур L от *фиг.68-3а*

$$(68.6) \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I,$$

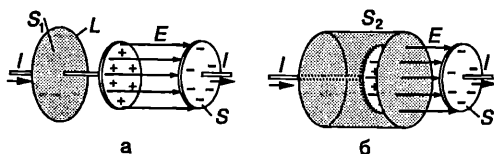
където токът I пробоща кръга S_1 , заграден от окръжността L .

Ще припомним, че законът на Ампер налага едно единствено изискване за повърхността, токът през която определя циркулацията на магнитното поле – тя трябва да е ограничена от избрания контур L . В случая можем да изберем тази повърхност така, че тя да не се пресича от тока I . Една такава възможност е показана на *фиг.68-3б*, където повърхността S_2 има форма на цилиндър, едната основа на който е разположена между електродите на кондензатора, а другият край е отворен и съвпада с контура L . Ако сега приложим закона на Ампер за същия контур L , но използваме повърхността S_2 , ще получим, че циркулацията на вектора на магнитната индукция $\mathbf{B}$ е нула, а не $\mu_0 I$, защото повърхността S_2 не се пресича от тока I . От друга страна обаче, повърхността S_2 се пресича от силовите линии на променливото електрично поле, което се създава вътре в кондензатора.

Максуел предполага, че така както съществуват два източника на електрични полета – електрични заряди и променливи магнитни полета, магнитните полета също имат два вида източници: токове и променливи електрични полета. Той обобщава закона на Ампер, като добавя в дясната страна на уравнение (68.6) още един член $I_{от}$, наречен *ток на отместване*, който отразява приноса на променливото електрично поле:

$$(68.7) \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 (I + I_{от}).$$

Ще отбележим, че терминът „ток на Фиг.68-3.



отместване“ произтича от теорията на ефира – невидима субстанция, за която се е смятало, че запълва цялото световно пространство. Макар и напълно отхвърлена от съвременната физика като несъстоятелна, тази теория изиграва положителна роля за развитието на науката през XIX век. Отделни термини от нея са се запазили и до днес, но в тях се влага съдържание, което няма нищо общо с хипотетичния ефир. (Например радиокомента-торът съобщава, че програмата се излъчва в ефира.) Затова, когато говорим за ток на отместване, трябва да помним, че не става дума за действителен ток, а за променливо електрично поле, което, подобно на реалните токове, създава магнитно поле.

В случая (*фиг.68-3*) бихме могли условно да кажем, че токът на проводимост I , който тече по съединителните проводници, се продължава от тока на отместване $I_{от}$ вътре в кондензатора. Условието за непрекъснатост на пълния ток $I_n = I + I_{от}$ изисква двата тока да са равни: $I_{от} = I$.

Ще установим връзката между големината на интензитета E на електричното поле вътре в кондензатора и тока I , който го зарежда. За плосък въздушен кондензатор (вж. пример 48.2 на стр.28)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0 S},$$

където $\sigma = q/S$ е повърхнинната плътност на заряда върху електродите, q е зарядът на кондензатора, а S е площта на всеки един от електродите. Токът, който зарежда кондензатора, е

$$I = \frac{dq}{dt} = \epsilon_0 S \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

където $\Phi_E = SE$ е потокът на интензитета E на еднородното електрично поле (електричен поток) през напречното сечение S на кондензатора. Тъй като извън кондензатора електричното поле е нула, същата стойност има и потокът на електричното поле през повърхността S_2 (*фиг.68-3б*). Следователно

$$(68.8) \quad I_{от} = I = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}.$$

Полученият резултат може да се обобщава за ток на отместване през произвол-

на повърхност: токът на отместване през дадена повърхност във вакуум е равен на скоростта, с която се изменя с течение на времето електричният поток през тази повърхност, умножена по електричната константа ϵ_0 .

Заместваме тока на отместване $I_{от}$ от уравнение (68.8) в (68.7) и получаваме уравнението на обобщения закон на Ампер

$$(68.9) \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right),$$

който отразява хипотезата на Максвел, че освен токовете, източници на магнитни полета са и променливите електрични полета.

Пример 68.2. Плосък кондензатор с кръгли електроди с радиус R се зарежда от ток I (фиг.68-3).

а) Определете индукцията на магнитното поле B в кондензатора като функция на разстоянието r от оста на симетрия.

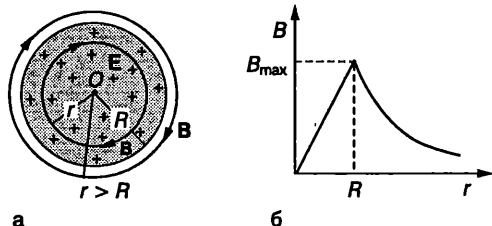
б) Пресметнете максималната стойност на B , ако $I = 1$ А и $R = 0,1$ m.

Решение. Електричното поле вътре в кондензатора е еднородно. Като отчетем симетрията и използваме аналогията между реалния ток и тока на отместване, стигаме до извода, че магнитното поле в кондензатора е подобно на магнитното поле в еднороден цилиндър, по който тече ток с постоянна плътност. Магнитните индукционни линии са концентрични окръжности, перпендикулярни на вектора на интензитета $\mathbf{E}$, чиито центрове лежат върху оста на симетрия O (фиг.68-4а). Определяме циркуляцията на магнитното поле по окръжност с радиус r , съвпадаща с магнитна индукционна линия (фиг.68-4а):

$$\oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B(2\pi r).$$

Скоростта на изменение на електричния поток през кръга с радиус $r < R$ е

Фиг.68-4.



$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \pi r^2 \frac{dE}{dt} = \pi r^2 \frac{I}{\epsilon_0 \pi R^2},$$

където сме отчели, че $E = \frac{q}{\epsilon_0 \pi R^2}$ и $I = dq/dt$.

Заместваме циркуляцията на магнитното поле и скоростта на изменение на електричния поток в уравнение (68.9) и като отчетем, че токът I , който зарежда кондензатора, не пресича кръга с радиус r , получаваме

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r.$$

При $r > R$:

$$\frac{d\Phi_E}{dt} = \pi R^2 \frac{dE}{dt} = \frac{I}{\epsilon_0}; \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Следователно вътре в кондензатора индукцията на магнитното поле B нараства при отдалечаване от оста на симетрия, достига максималната си стойност при $r = R$, след което намалява при $r > R$ (фиг.68-4б).

$$\text{б) } B_{\max} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} = 2 \cdot 10^{-6} \text{ Т.}$$

Ще отбележим, че индуцираното магнитно поле е слабо. Освен това само за много кратко време може да се поддържа такъв ток. Например, когато през кондензатора тече променлив ток с амплитуда 1 А, получената стойност $B_{\max}$ е равна на амплитудата на магнитното поле в кондензатора, което се изменя по същия закон, както токът. Променливо магнитно поле с такава малка амплитуда е трудно да бъде регистрирано. Ако в кондензатора се постави магнитна стрелка, поради нейната инертност и неизбежните сили на триене, тя няма да се отклонява.

Уравнения на Максвел

За вакуум уравненията на Максвел са:

$$(68.10) \quad \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0};$$

$$(68.11) \quad \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0;$$

$$(68.12) \quad \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt};$$

$$(68.13) \quad \oint_L \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \left(I + \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \right).$$

Уравнение (68.10) е обобщение на закон на Гаус от електростатиката:

Потоъкът на интензитета на електричното поле през произволна затворена повърхност S е равен на отношение на заряд q , намиращ се в обема, заграден от повърхността S , и електричната константа ϵ_0 .

Вихровите електрични полета не дават принос в потока на интензитета, защото техните силови линии са затворени криви – те или не пресичат повърхността S , или я пресичат два пъти: веднъж от опаката към лицевата страна и след това в обратната посока.

Уравнение (68.11) изразява закона на Гаус за магнитното поле:

Потоъкът на магнитната индукция през произволна затворена повърхност S е равен на нула.

Този резултат е следствие от факта, че не съществуват магнитни заряди. Всички магнитни полета са вихрови. Ако имаше магнитни заряди, щяха да съществуват магнитни полета, чиито индукционни линии започват от положителните магнитни заряди и завършват в отрицателните магнитни заряди. Тогава уравнение (68.11) би имало аналогичен вид на уравнение (68.10), само че вместо електричния заряд в дясната му страна щеше да влиза магнитният заряд.

Уравнение (68.12) описва математически явлението електромагнитна индукция:

Циркулацията на електричното поле по произволен затворен контур L е равна на взетата със знак минус скорост на изменение на магнитния поток през произволна повърхност, ограничена от контура L .

Това уравнение изразява връзката между вихровото електрично поле и неговия източник – изменящо се с течение на времето магнитно поле.

Последното уравнение изразява обобщения закон на Ампер:

Циркулацията на магнитното поле по произволен затворен контур L е равна на сумата от тока на проводимост I

и тока на отместване $I_{от} = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$, умножена по магнитната константа μ_0 .

То дава връзката между магнитното поле и неговите източници – токовете и променливите електрични полета.

Електромагнитно поле

Електричното поле и магнитното поле съществуват самостоятелно само ако не се изменят с течение на времето. Променливите полета са взаимно свързани: променливото магнитно поле поражда променливо електрично поле, което от своя страна създава променливо магнитно поле и т.н. Следователно в цялото пространство, в което става изменение на полетата, едновременно съществуват както електрични полета, така и магнитни полета, които взаимно се поддържат. Тези полета са неразривни части от единно цяло, наречено *електромагнитно поле*. Всяка точка от електромагнитното поле се характеризира с векторните величини интензитет E и магнитна индукция B . Електромагнитното поле е материален обект, който притежава енергия. Електромагнитната енергия е разпределена в цялото пространство, в което се простира полето. Тя е сума от електричната и от магнитната му енергия. Когато полетата се променят с времето, става преобразуване на електрична енергия в магнитна енергия и обратно.

Уравненията на Максвел не само правилно описват всички известни по времето на Максвел електрични и магнитни явления, но и с тяхна помощ Максвел предсказва съществуването на принципно нови, неизвестни по онова време явления. Непосредствено следствие от уравненията на Максвел е съществуването на електромагнитни вълни, които се разпространяват във вакуум със скоростта на светлината $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Освен това Максвел доказва, че светлината също е електромагнитна вълна. Както ще видим по-нататък, всички следствия от теорията на Максвел получават блестящо експериментално потвърждение.

69. Магнитни свойства на веществата

Магнитен диполен момент на атома

Ще започнем изучаването на магнетизма на атомите с опростен класически модел, съгласно с който електроните извършват кръгово движение около неподвижното атомно ядро. На *фиг.69-1* схематично е показан електрон, който се движи със скорост v по окръжност с радиус r . Времето за една обиколка (период на въртене) е $T = 2\pi r/v$. Ефективният ток, свързан с орбиталното движение на електрона, е равен на заряда на електрона e , разделен на периода на въртене T :

$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}.$$

Магнитният диполен момент на този ефективен кръгов ток (вж. стр.90) е

$$(69.1) \quad \mathbf{p}_m = \boldsymbol{\mu} = I \mathbf{S} \mathbf{n} = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 \mathbf{n} = \frac{1}{2} evr \mathbf{n}.$$

От друга страна, моментът на импулса на електрона спрямо точка O (атомно ядро) е

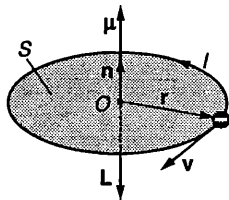
$$(69.2) \quad \mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = -mv\mathbf{m},$$

където m е масата на електрона. От уравнения (69.1) и (69.2) получаваме

$$(69.3) \quad \boldsymbol{\mu} = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}.$$

Знакът минус показва, че векторите $\boldsymbol{\mu}$ и $\mathbf{L}$ имат противоположни посоки (*фиг.69-1*). Двата вектора са перпендикулярни на равнината на орбитата.

Разгледаният модел обаче има сериозни недостатъци. Класическата физика, преди да бъдат въведени квантовите представи, не е в състояние да обясни нито орбиталното движение на електроните, *Фиг.69-1*.



нито самото съществуване на атомите. От нейните закони например следва, че електроните трябва непрекъснато да излъчват електромагнитни вълни, в резултат на което да загубят своята енергия и след кратък интервал от време да паднат върху атомното ядро. Разбирането на природата на магнетизма става възможно едва след създаването на квантовата механика. Оказва се, че магнетизмът, както и самото съществуване на атомите и молекулите, е *квантов ефект*. Съгласно с квантовата механика състоянието на електрона в атома също се характеризира с орбитален момент на импулса $\mathbf{L}$ и орбитален магнитен момент $\boldsymbol{\mu}$. В квантовата теория обаче терминът „орбитален“ не изразява характера на движението на електроните – те не обикалят около ядрото подобно на планетите около Слънцето. Връзката между $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\mu}$ също се изразява с уравнение (69.3), само че между квантовомеханичните величини и техните класически аналози има две принципино важни различия:

1. Самите вектори $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\mu}$ не могат да бъдат измерени. Възможно е да се измерят само техните проекции върху дадена ос, която е прието да се означава със z . Оста z може да се избере произволно. Когато атомът е във външно магнитно поле, обикновено се приема оста z да е насочена по посока на неговата магнитна индукция $\mathbf{B}_0$.

2. Проекциите L_z и μ_z на орбиталния момент на импулса и на орбиталния магнитен момент на електрона се квантуват. Стойностите на L_z са целочислено кратни

на $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,06 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, където h е константата на Планк:

$$(69.4) \quad L_z = m_\ell \hbar, \quad m_\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \ell,$$

където m_ℓ е магнитното квантово число, а ℓ – орбиталното квантово число (вж. §55).

Записваме проекцията на векторното уравнение (69.3) върху оста z и като отчетем квантуването на L_z получаваме

$$(69.5) \quad \mu_z = -\frac{e}{2m} m_\ell \hbar = -m_\ell \mu_B.$$

Величината

$$(69.6) \quad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,27 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}$$

се нарича *магнетон на Бор*.

Освен орбитален момент на импулса и орбитален магнитен диполен момент електроните имат също така *собствен (спинов) момент на импулса $\mathbf{S}$* (или за по-кратко *спин*) и свързан с него *спинов магнитен диполен момент μ_s* . Спинът е една от фундаменталните вътрешни характеристики на електрона, подобно на масата и електричния заряд. Съгласно с квантовата теория $\mathbf{S}$ и μ_s са свързани с уравнението

$$(69.7) \quad \mu_s = -\frac{e}{m} \mathbf{S},$$

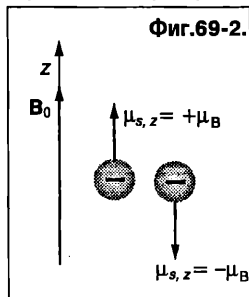
където e и m са съответно зарядът и масата на електрона. Подобно на орбиталните моменти спиновите моменти също се квантуват. Проекцията на спина $\mathbf{S}$ върху произволна ос z може да има само две стойности:

$$(69.8) \quad S_z = \pm \frac{\hbar}{2}.$$

Съответните стойности на z -компонентата на спиновия диполен магнитен момент на електрона са

$$(69.9) \quad \mu_{s,z} = -\frac{e}{m} S_z = \mp \frac{e\hbar}{2m} = \mp \mu_B.$$

На *фиг.69-2*. схематично са показани два електрона, които се намират във външно магнитно поле. Спиновият магнитен момент на единия електрон е $+\mu_B$, което означава, че z -компонентата на вектора μ_s е насочена в положителната посока на оста z . За втория електрон $\mu_{s,z} = -\mu_B$: неговата z -компонента на спиновия магнитен диполен момент е насочена в отрицателната посока на оста z . Условно се казва, че спиновият магнитен диполен момент на единия електрон е насочен „нагоре“, а на другия – „надолу“. В многоелектронните атоми електроните образуват двойки с противоположни спинове. По този начин техните собствените магнитни моменти взаимно се компенсират. Редица атоми обаче съдържат и „несдвоенни“ електрони. Например атомите с нечетен брой елек-



трони имат поне един некомпенсиран спинов магнитен диполен момент. Пълният магнитен момент на атома е векторна сума от орбиталните и от спиновите магнитни диполни моменти на всичките му електрони.

Протоните и неутроните също имат магнитни диполни моменти, но те са много по-малки от магнитния момент на електрона. Затова в повечето случаи магнитният диполен момент на атомните ядра може да се пренебрегне: магнетизмът на атомите се дължи почти изцяло на техните електрони.

Намагнитеност на веществата

Всяко вещество, поставено във външно магнитно поле, се намагнитва в една или в друга степен, т.е. създава свое собствено магнитно поле, което се наслажда към външното магнитно поле. Магнитното състояние на веществата се описва с векторната физична величина *намагнитеност $\mathbf{M}$* . По определение намагнитеността на малък от макроскопична гледна точка обем ΔV от веществото (в обема ΔV се съдържат много голям брой атоми) е равна на отношението на общия магнитен момент на всички атоми от този обем към самия обем ΔV :

$$(69.10) \quad \mathbf{M} = \frac{1}{\Delta V} \sum_{i=1}^n \mu_i,$$

където μ_i е магнитният момент на i -тия атом, а n е броят на атомите в обема ΔV .

Ще разгледаме като пример соленоид с дължина L и N на брой навивки, по които тече ток I . Когато соленоидът е разположен във вакуум, индукцията на магнитното поле на тока в соленоида е (вж.

пример 65.3 на стр.95): $B_0 = \mu_0 \frac{N}{L} I$. Ако пространството вътре в соленоида се запълни с магнитно вещество, то създава собствено магнитно поле, чиято магнитна индукция $\mathbf{B}_1$ може да се изрази чрез намагнитеността на веществото: $\mathbf{B}_1 = \mu_0 \mathbf{M}$. Резултантното магнитно поле вътре в соленоида е

$$(69.11) \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 + \mu_0 \mathbf{M}.$$

Освен с магнитната индукция $\mathbf{B}$, магнитното поле се характеризира с още една векторна физична величина, наречена

интензитет на магнитното поле $\mathbf{H}$. По определение величините $\mathbf{B}$, $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ са свързани със съотношението

$$(69.12) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}).$$

В SI намагнитеността $\mathbf{M}$ и интензитетът на магнитното поле $\mathbf{H}$, които имат еднаква размерност, се измерват в единици *ампер на метър* (A/m).

Във вакуум $\mathbf{M} = 0$ и $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 = \mu_0 \mathbf{H}$. Тогава големината на интензитета на магнитното поле в соленоида е $H = B_0/\mu_0 = IN/L$. Следователно интензитетът на магнитното поле зависи от плътността на навивките N/L на соленоида и от тока I , но не зависи от това дали соленоидът е във вакуум или е запълнен с магнитно вещество, т.е. $\mathbf{H}$ характеризира единствено магнитното поле на тока през соленоида. Магнитната индукция $\mathbf{B}$ на полето обаче се променя при внасяне на магнитно вещество в соленоида. Както се вижда от уравнение (69.12), $\mathbf{B}$ се състои от две части: $\mu_0 \mathbf{H}$ – отчитаща приноса на магнитното поле на тока (външно магнитно поле), и $\mu_0 \mathbf{M}$ – дължаща се на намагнитването на веществото.

Магнитна възприемчивост

За редица вещества намагнитеността $\mathbf{M}$ е право пропорционална на интензитета на магнитното поле $\mathbf{H}$:

$$(69.13) \quad \mathbf{M} = \chi \mathbf{H}.$$

Коефициентът на пропорционалност χ (χ) е безразмерна величина, наречена *магнитна възприемчивост*, която характеризира магнитните свойства на веществото. В *парамагнитните вещества* векторите $\mathbf{M}$ и $\mathbf{H}$ имат еднакви посоки, т.е. собственото магнитно поле на веществото усилва външното магнитно поле. Затова тяхната магнитна възприемчивост е положителна ($\chi > 0$). *Диамагнитните вещества* са с отрицателна магнитна възприемчивост ($\chi < 0$): тяхното собствено магнитно поле отслабва външното поле. Стойностите на магнитната възприемчивост за някои вещества са дадени в табл. 69.1.

Заместваме $\mathbf{M}$ от уравнение (69.13) в (69.12) и получаваме

$$(69.14) \quad \mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H}.$$

Безразмерната величина

$$(69.15)$$

$$\mu_r = 1 + \chi$$

се нарича *относителна магнитна проницаемост* на веществото. За парамагнитните вещества $\mu_r > 1$, а за диамагнитните вещества $\mu_r < 1$. Произведението от относителната магнитна проницаемост μ_r и магнитната константа (магнитната проницаемост на вакуума) μ_0 се нарича *магнитна проницаемост* μ_m на веществото

$$(69.16) \quad \mu_m = \mu_r \mu_0.$$

Чрез магнитната проницаемост уравнение (69.14) се записва във вида

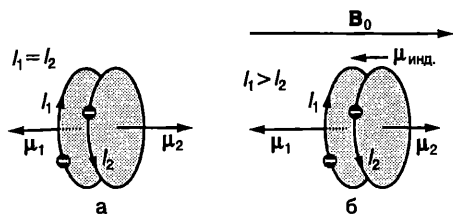
$$(69.17) \quad \mathbf{B} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H} = \mu_m \mathbf{H}.$$

Таблица 69.1. Магнитна възприемчивост на някои вещества при температура 300 K.

Парамагнитни вещества	χ
Хром	$2,7 \cdot 10^{-4}$
Калций	$1,9 \cdot 10^{-5}$
Алуминий	$2,3 \cdot 10^{-5}$
Волфрам	$6,8 \cdot 10^{-5}$
Диамагнитни вещества	χ
Мед	$-9,8 \cdot 10^{-6}$
Бисмут	$-1,66 \cdot 10^{-5}$
Диамант	$-2,2 \cdot 10^{-5}$
Злато	$-3,6 \cdot 10^{-5}$

Диамагнетизъм

Атомите на диамагнитните вещества нямат постоянен магнитен момент. Когато обаче образец от диамагнитно вещество се постави в магнитно поле, неговите атоми получават *индуциран* магнитен диполен момент, насочен срещу полето. Магнитното поле на тези индуцирани магнитни диполи е много слабо и води само до незначително намаляване на резултантното магнитно поле във веществото. Диамагнетизмът се обяснява от квантовата теория. На качествено равнище идея за това как възникват индуцираните атомни диполни моменти може да се получи с помощта на класическия модел на кръговите атомни токове. На *фиг.69-3а* схематично са показани два електрона, принадлежащи на един и същ атом, които се движат по кръгови орбити. В отсъствие на външно магнитно поле ефективните токове, свързани с орбиталното движение на електроните, са

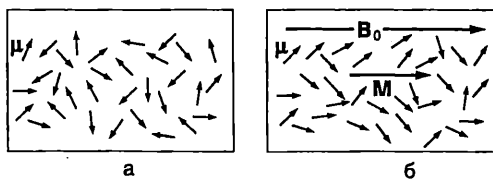


Фиг.69-3.

еднакви, но имат противоположни посоки. Орбиталните магнитни диполни моменти на двата електрона също са равни по големина и с противоположни посоки, поради което взаимно се компенсират: магнитният диполен момент на атома е нула. При включване на магнитното поле, в резултат на явлениято електромагнитна индукция, двата кръгови тока се променят (фиг. 69-3б). Съгласно с правилото на Ленц токът I_1 , чието собствено магнитно поле е насочено срещу външното магнитно поле, нараства, а токът I_2 – намалява: двата тока чрез своите магнитни полета се противопоставят на нарастването на външното магнитно поле от нула до B_0 . Магнитният диполен момент μ_1 на тока I_1 също нараства, докато магнитният диполен момент μ_2 на тока I_2 намалява. Атомът получава индуциран магнитен момент $\mu_{\text{инд}} = \mu_1 + \mu_2$, чиято посока е противоположна на посоката на външното магнитно поле.

Парамагнетизъм

В атомите на парамагнитните вещества спиновите и орбиталните магнитни моменти на електроните не се компенсират напълно, а събрани векторно дават резултантен магнитен диполен момент μ , чиято големина не се изменя с течение на времето и не зависи от външното магнитно поле. Постоянният магнитен диполен момент μ на атомите (молекулите или йоните) може да се дължи на орбиталното движение на електроните (орбитален парамагнетизъм), на собствените магнитни моменти на електроните (спинов парамагнетизъм) или на магнитните моменти на атомните ядра (ядрен парамагнетизъм). Атомните магнитни диполи на парамагнитните вещества взаимодействат много слабо помежду си и в отсъствие на външно магнитно поле са ориентирани напълно хаотично (фиг.69-4а). Тяхното резултантно



Фиг.69-4. а) В отсъствие на магнитно поле атомните диполни моменти μ на парамагнитните вещества са насочени хаотично. б) Атомните диполи се ориентират преимуществено по посока на външното магнитно поле.

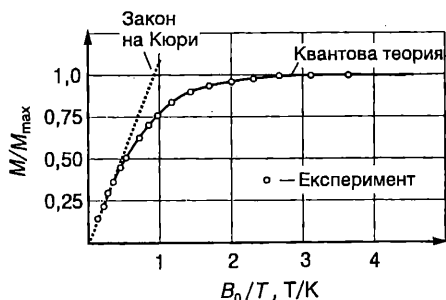
магнитно поле е нула, т.е. в отсъствие на външно поле парамагнитните материали не са намагнитени. Когато парамагнитно вещество се постави в магнитно поле с индукция B_0 , магнитните сили завъртат атомните магнитни диполи и ги ориентират по посока на полето. На ориентиращото действие на магнитното поле се противопоставя ефектът от хаотичното топлинно движение на атомите, което предизвиква разориентиране на диполите. Затова атомните магнитни диполни моменти μ само частично се ориентират по посока на B_0 (фиг.69-4б).

През 1895 година френският физик Пиер Кюри (1859–1906) експериментално установява, че намагнитеността M на парамагнитните вещества е пропорционална на индукцията на външното магнитно поле B_0 и е обратно пропорционална на абсолютната температура T на изследваното вещество:

$$(69.18) \quad M = C \frac{B_0}{T}.$$

Това уравнение е известно като *закон на Кюри*. Константата C се нарича *константа на Кюри*. При много ниски температури или при много силни полета, т.е. когато отношението B_0/T е голямо, законът на Кюри престава да е в сила. При такива условия разориентиращото действие на топлинното движение е много слабо и практически всички атомни магнитни моменти се ориентират по посока на външното магнитно поле: намагнитеността на парамагнитното вещество достига определена максимална стойност $M_{\text{max}} = n\mu$, където n е концентрацията на магнитните атоми, а μ е магнитният диполен момент на един атом. Казва се, че веществото е намагнитено до *насищане*. Типична зави-

симост на M от B_0/T за парамагнитна сол, чиито магнитни свойства се определят от съдържащите се в нея йони на хрома, е показана на *fig.69-5*. Вижда се, че законът на Кюри е в сила само при малки стойности на отношението B_0/T . Кривата, която правилно описва намагнитването на парамагнитната сол при всички стойности на B_0/T , се получава от квантовата теория на парамагнетизма.

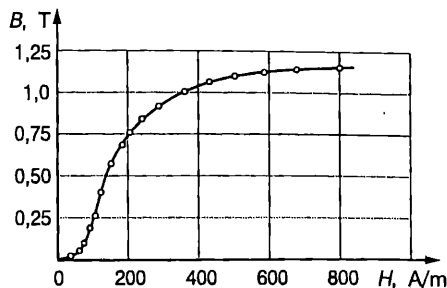


Фиг.69-5. Крива на намагнитване на парамагнитната сол калиево-хромов сулфат.

Феромагнетизъм

При стайна температура и относително слаби външни полета намагнитването на парамагнитните и диамагнитните вещества е малко и те оказват незначително влияние на магнитното поле, в което се намират. При същите условия желязото, кобалтът, никелът и някои други вещества се намагнитват много по-силно. Тези вещества се наричат *феромагнитни* (от лат. *ferrum* – желязо). Характерно за феромагнитните вещества е, че след премахване на външното поле те остават намагнитени – превръщат се в постоянни магнити.

Свойствата на феромагнитните вещества могат да се изследват, ако пръстен от такова вещество (например желязо) се постави в намотка, по която тече ток. Чрез промяна на тока I се изменя интензитетът H на магнитното поле ($H \propto I$) и се измерва индукцията B на полето във феромагнитното вещество. Подобни експериментални данни са представени на *fig.69-6*. От графиката се вижда, че зависимостта на B от H е нелинейна: при големи стойности на H магнитната индукция B във феромагнитното вещество нараства все по-бавно – на-

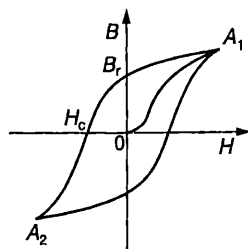


Фиг.69-6. Крива на намагнитване на феромагнитно вещество (желязо).

магнитването на веществото постепенно достига насищане. Тъй като съгласно с уравнение (69.17) $B = \mu_r \mu_0 H$, може да се направи изводът, че относителната магнитна проницаемост μ_r на феромагнитните вещества не е константа, а зависи от магнитното поле. Максималните стойности на μ_r за феромагнитните вещества са много големи: $\mu_{r, \max} = 10^3 - 10^6$.

След като пръстенът от феромагнитно вещество се намагнити до насищане (крива OA_1 на *fig.69-7*), да започнем да намаляваме тока I през намотката (интензитетът H на магнитното поле). Опитът показва, че B се изменя по друга крива: наблюдава се характерно за феромагнитните вещества изоставане в изменението на B и при премахване на външното поле веществото остава намагнитено. Това явление се нарича *хистерезис* (от гр. *хистерезис* – запазване, оставане). Стойността $B = B_r$ на магнитната индукция на полето във феромагнитното вещество след премахване на външното поле (при $H = 0$) се нарича *остатъчна магнитна индукция*. За да продължи да намалява B , трябва да се промени посоката на тока, т.е. да се приложи магнитно поле, чиито интензитет H има противоположна посока. Стойността на H , при която B намалява до нула, се нарича *коерцитивна сила* H_c . След това веществото започва да се пренамагнитва, т.е. да се намагнитва в обратна посока (посоката на B е противоположна

Фиг.69-7. Хистерезисна крива.



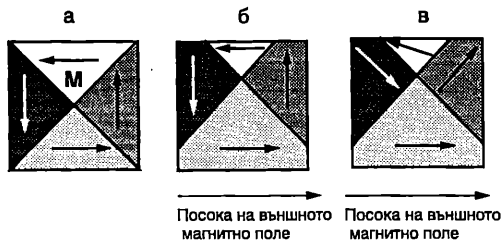
на първоначалната), докато достигне насищане (точка A_2). След намаляване на тока (на H) и промяна на посоката му пръстеният отново се намагнитва в първоначалната посока до насищане (точка A_1), но това става по друга крива. Затворената крива от *фиг. 69-7* характеризира феромагнитното вещество и се нарича *хистерезисна крива*.

В зависимост от стойността на коерцитивната сила феромагнитните материали се разделят на две групи. Материалите с малка коерцитивна сила се наричат *магнитно меки*. Те лесно се пренамагнитват и затова намират приложение в трансформаторите и в други електротехнически устройства, използващи променливи магнитни полета. Материалите с голяма коерцитивна сила и голяма остатъчна индукция се наричат *магнитно твърди*. От тях се правят постоянни магнити.

При повишаване на температурата способността на феромагнитните вещества да се намагнитват постепенно намалява. Намалява тяхната магнитна проникваемост и хистерезисът. При определена температура T_K , наречена *температура на Кюри*, феромагнитните свойства напълно изчезват. Ако се нагрее до температура, по-висока от температурата на Кюри, феромагнитното вещество се превръща в парамагнитно. Различните феромагнитни вещества имат различна температура на Кюри: например за желязото $T_K = 770^\circ\text{C}$, а за никела $T_K = 360^\circ\text{C}$.

Магнитни домени

Ще се спрем накратко на обяснението на феромагнетизма. Атомите на желязото и на другите елементи с феромагнитни свойства имат постоянен магнитен диполен момент (спинов, орбитален или едновременно спинов и орбитален). Причината за феромагнетизма е специфичен квантов ефект, наречен *обменно взаимодействие*. Обменното взаимодействие се дължи на спина на електрона. Във феромагнитните материали обменното взаимодействие между електрони от съседни магнитни атоми води до подреждане на техните магнитните моменти: магнитните диполни моменти на големи групи от атоми, нарече-



Фиг.69-8. Магнитни домени.

ни *магнитни домени*, се ориентират в една и съща посока.

Обикновено магнитните домени имат обем между 10^{-12} m^3 и 10^{-18} m^3 и съдържат от 10^{17} до 10^{21} атома. Всеки домен се характеризира със свой вектор на намагнитеността M . Посоката на M определя магнитната ориентация на домена. Когато веществото не е намагнитено, отделните домени са ориентирани хаотично (*фиг.69-8а*). Да поставим ненамагнитен образец във външно поле (например в намотка, по която тече ток). Експериментално и теоретично е доказано, че при увеличаване на интензитета H на полето се извършват два процеса:

1. В слаби полета (малки стойности на H) нарастват размерите на домовете, които са ориентирани по посока на външното поле за сметка на домовете с противоположна ориентация (*фиг.69-8б*).
2. В силни полета (големи стойности на H) цели домени се завъртат и постепенно се насочват по посока на външното магнитно поле (*фиг.69-8в*).

Когато всички домени се ориентират по посока на външното магнитно поле, образецът е намагнитен до насищане. При премахване на външното поле отново възникват отделни домени, но повечето от тях запазват ориентацията си и образецът остава намагнитен – магнитното поле в образца се характеризира с остатъчната индукция B_r (*фиг.69-7*).

При повишаване на температурата на феромагнитно вещество настъпва момент (при температурата на Кюри T_K), когато топлинното движение разрушава подреждането на атомните диполни моменти – магнитните домени изчезват и веществото преминава от феромагнитно в парамагнитно състояние.

ВЪЛНИ И ЧАСТИЦИ

Трептения, в най-общ смисъл, се наричат движенията на тела и частици или измененията на физични величини (полета), за които е характерна определена степен на повтаряемост с течение на времето. Вълнов процес е разпространението на трептенията в пространството или тяхното поддържане в ограничена пространствена област. Най-голямо значение за живота и практическата дейност на човека имат механичните и електромагнитните трептения и вълни. Човешкото ухо възприема като звук разпространяващите се механични трептения (периодични изменения) на налягането на въздуха, предизвикани от различни източници (гласови органи на хора и животни, музикални инструменти, от транспорта и др.). Високочестотните трептения на електромагнитното поле човешкото око възприема като светлина. Чрез слуха и зрението получаваме по-голямата част от непосредствената информация за околната среда. За трептенията и вълните с различна физична природа са характерни някои общи свойства и закономерности. Затова например много от резултатите, получени при изследването на механичните трептения и вълни, могат да се използват в радиотехниката и оптиката. Вълнови явления – отражение, пречупване, интерференция, дифракция, поляризация и дисперсия – се наблюдават както при механичните вълни, така и при електромагнитните вълни (радиовълни, светлинни вълни и др.).

Класическата вълнова теория обаче не е в състояние да обясни всички свойства на светлината. За да опишат количествено топлинното излъчване на телата и фотоелектричния ефект, в началото на XX век Планк и Айнщайн изказват хипотезата, че светлинната енергия се излъчва, разпространява и поглъща на отделни порции (кванти), които получават названието фотони. В едни явления (интерференция, дифракция) светлината се проявява като вълна, а в други (фотоефект, ефект на Комптън) – като частица. През 20-те години на XX век подобна двойственост (вълна–частица) е открита и в свойствата на електроните и на другите микрочастици. Свойствата на лъчението, на атомите, ядрата и елементарните частици най-пълно и точно се описват от съвременната квантова физика, която преодолява ограничеността на представите за класическите вълни и частици. Докато за класическата физика съчетаването на вълнови и корпускуларни свойства в един и същ обект е логически противоречиво, за квантовата физика това са прояви на една физична същност.

Механични трептения и вълни



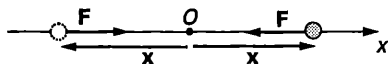
Фенек – най-малката лисица с най-големите уши. Поради голямото напречно сечение на ушите лисицата фенек улавя звукови вълни с много малък интензитет.

В тази глава най-напред ще анализираме основните закономерности на хармоничните трептения, които възникват при малки отклонения на механична система от равновесното ѝ положение и ще дадем прости примери за такива системи. След това ще се спрем на влиянието на силите на триене и съпротивление, които водят до загуба на енергия и затихване на трептенията. Ще покажем, че периодични външни сили предизвикват принудени трептения, чиято амплитуда рязко нараства при определени честоти на изменение на външната сила и ще дадем различни примери за такива резонансни явления. Между трептенията и вълновите явления има пряка връзка: трептят източниците на вълни и частиците на материалната среда, в която се разпространяват механичните вълни. Специално внимание ще отделим на разпространението на звукови вълни във въздуха, на източниците и приемниците на звук и инфразвук. Накрая ще разгледаме ефекта на Доплер и основните характеристики на ударните вълни.

70. Хармонично трептене

Да разгледаме материална точка (частица) с маса m , която може да се движи само по оста x . В началото O на оста тя се намира в положение на устойчиво равновесие, а при отклонение от него възниква сила F , която е правопропорционална на отклонението x и е насочена към равновесното положение (фиг.70-1):

$$(70.1) \quad F = -kx \quad \text{или} \quad F = -kx,$$



Фиг.70-1.

където k е положителна константа ($k > 0$), а F и x са x -компонентите на векторите F и x . Тъй като движението се извършва само по оста x и векторните величини, които го характеризират (силата F , отклонението x , скоростта v и ускорението a), също са насочени по тази ос, по-нататък под сила F , отклонение x , скорост v и ускорение a ще разбираме проекциите (x -компонентите) на съответните векторни величини.

Силата F се стреми да върне материалната точка в равновесното положение, поради което ще я наричаме *въръщаща сила*. За F се използва също терминът *квазиеластична сила*, тъй като големината ѝ се изменя по същия закон, както на силите, възникващи при еластични деформации на твърдите тела. Представката „квази“ показва, че по своята природа силата F може и да не е свързана с еластичните свойства на телата.

Записваме уравнението на втория принцип на механиката за движението на материалната точка

$$(70.2) \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Полагаме $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ и получаваме

$$(70.3) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Уравнение (70.3) е линейно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти (вж. стр.287). Неговото решение е

$$(70.4) \quad x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

където $A > 0$ и φ_0 са константи, чиито стойности се определят от началните условия.

Следователно отклонението x на материалната точка от равновесното ѝ положение се изменя с времето по хармоничен (синусов) закон. Такова движение се нарича *хармонично трептене*.

Уравнение (70.3) се нарича уравнение на *хармоничен осцилатор* и описва движението на механична система, извършваща хармонично трептене.

Аргументът $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$ на синусовата функция в уравнение (70.4) се нарича *фаза на трептене*, а константата φ_0 – *начална фаза*: φ_0 е фазата на трептене в момента $t = 0$, избран за начален (от който започва отчитането на времето). Уравнение (70.4) се записва също така във вида

$$(70.5) \quad x = A \sin \varphi.$$

От уравнение (70.5) следва, че по абсолютна стойност отклонението е максимално при $|\sin \varphi| = 1$. Тогава $|x|_{\max} = A$. Следователно константата A е равна на големината на максималното отклонение от равновесното положение и се нарича *амплитуда на трептене*.

Хармоничното трептене е периодично движение. Нека в началния момент $t = 0$ частицата се намира в равновесното си положение $x = 0$. След това тя се отклонява и достига точка $x = A$, променя посоката на движението си, преминава през точка $x = 0$, достига максималното си отклонение $x = -A$ (фиг.70-1) и отново се връща в равновесното си положение. Така частицата извършва един пълен цикъл на трептене, след което движението се повтаря. Времето T за извършване на един цикъл се нарича *период на трептене*. За време T фазата на трептене нараства с 2π (синусът е периодична функция с период 2π), т.е.

$$\omega_0(t + T) + \varphi_0 = \omega_0 t + \varphi_0 + 2\pi,$$

откъдето изразяваме периода T :

(70.6)

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Величината ω_0 , която е свързана с периода на трептене чрез равенство (70.6), се нарича кръгова честота на трептене. Реципрочната стойност на периода T се нарича честота на трептене:

(70.7)

$$\nu_0 = \frac{1}{T} \quad [s^{-1} \text{ или } Hz]$$

Честотата ν_0 е равна на броя на трептенията, които се извършват за единица време, т.е. тя показва колко пъти се повтаря цикълът на трептене за една секунда. Измерва се в единици s^{-1} или Hz (херц). ($1 s^{-1} = 1 Hz$). Например честотата $\nu_0 = 100 Hz$ означава, че за време $t = 1 s$ се извършват 100 трептения. От уравнения (70.6) и (70.7) определяме връзката между честотата ν_0 и кръговата честота ω_0 :

(70.8)

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0$$

Скорост и ускорение

Скоростта v и ускорението a при хармоничното трептене се определят като се пресметнат първата и втората производна на отклонението x по времето t :

(70.9)

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2});$$

(70.10)

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \omega_0^2 A \sin(\omega_0 t + \varphi_0 + \pi).$$

От уравнения (70.9) и (70.10) се вижда, че при хармонично трептене скоростта v и ускорението a се изменят по хармоничен закон със същата кръгова честота ω_0 , както отклонението x . Максималните стойности на скоростта и ускорението са

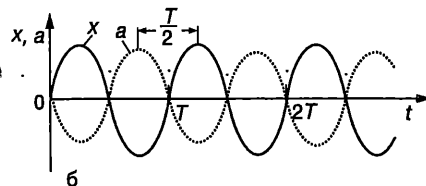
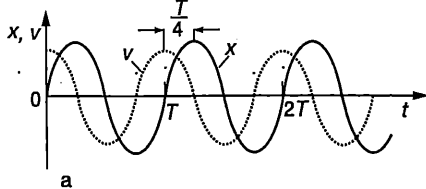
(70.11)

$$v_{\max} = \omega_0 A;$$

(70.12)

$$a_{\max} = \omega_0^2 A.$$

Графично функциите $x(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ се представят със синусоиди. Сравняването на уравнения (70.4) и (70.9) показва, че скоростта изпреварва по фаза отклонени-



Фиг.70.2.

ето с $\pi/2$. Това означава, че максимумите на скоростта настъпват с една четвърт от периода ($T/4$) по-рано от максимумите на отклонението (фиг.70-2а). Скоростта е максимална ($v_{\max} = \omega_0 A$), когато частицата преминава през равновесното си положение ($x = 0$), и става нула ($v = 0$) при максималното отклонение ($x = \pm A$), където се променя посоката на движение.

Между ускорението a и отклонението x има фазова разлика π , т.е. те са в *противофаза*. Това означава, че a и x едновременно стават нула и едновременно достигат максималните си стойности, но винаги, когато отклонението е положително ($x > 0$), ускорението е отрицателно ($a < 0$) и обратно (фиг.70-2б). Следователно ускорението, подобно на връщащата сила, винаги е насочено към равновесното положение (векторите x и a имат противоположни посоки). Този извод следва непосредствено и от уравнението на втория принцип на механиката (70.2).

Пример 70.1. Материална точка извършва хармонично трептене по закона $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$. Определете амплитудата A и началната фаза φ_0 на трептене, ако в началния момент $t = 0$ отклонението е $x = x_0$, а скоростта е $v = v_0$.

Решение. В уравненията за отклонението $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ и за скоростта $v = \omega_0 A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ полагаме $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$ и получаваме

$$x_0 = A \sin \varphi_0; \quad v_0 = \omega_0 A \cos \varphi_0.$$

Делим почленно двете страни на тези равенства и определяме началната фаза φ_0 :

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{x_0 \omega_0}{v_0}.$$

За да определим амплитудата, представяме двете равенства във вида

$$\frac{x_0}{A} = \sin \varphi_0; \quad \frac{v_0}{A \omega_0} = \cos \varphi_0,$$

вдигаме ги на квадрат и ги събираме:

$$\frac{x_0^2}{A^2} + \frac{v_0^2}{A^2 \omega_0^2} = \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1,$$

откъдето определяме амплитудата

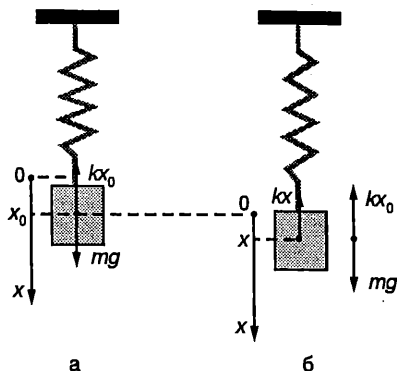
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}.$$

И така, амплитудата A и началната фаза φ_0 на трептене се определят от началните условия: от положението и скоростта на материалната точка в даден момент, условно избран за начален. Освен от началните условия, техните стойности зависят и от кръговата честота ω_0 , т.е. от физическите свойства на трептящата система.

Пружинно махало

При отклонение на редица механични системи от равновесното им положение възникват въртящи сили и те извършват трептения. В най-простите случаи движението на системата е с една степен на свобода – описва се само с една координата, например отклонението x . Обикновено само при малки отклонения трептенията са хармонични. При големи отклонения въртящите сили престават да се изменят по линеен закон и движението не се описва с уравнението (70.3) на хармоничния осцилатор. Такива трептения се наричат *анхармонични*.

Ще разгледаме някои от най-често срещаните механични системи, в които възникват хармонични трептения. Най-простият пример за такава система е *пружинното махало*: теглилка с маса m , закачена на вертикална пружина, чиято маса може да се пренебрегне. При деформация x (разтягане или свиване) на пружината възниква сила на еластичност, която се описва от закона на Хук $F = -kx$, къде-



Фиг. 70-3.

то k е коефициентът на еластичност на пружината. Условието за равновесие на теглилката е (фиг. 70-3а): $mg = kx_0$, където x_0 е деформацията на пружината в равновесното положение (началото на координатната ос е поставено в центъра на теглилката при недеформирана пружина). Ако отклоним теглилката на разстояние x от равновесното положение (фиг. 70-3б), пружината се разтяга още с x и възниква допълнителна сила $F = -kx$, която се стреми да върне теглилката в равновесното ѝ положение. Преместваме началото на координатната ос в равновесното положение и изключваме от разглеждане двете постоянни сили mg и $-kx_0$, които се уравновесяват. Тогава уравнението за движение на теглилката получава вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx \quad \text{или} \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0,$$

където сме положили $k/m = \omega_0^2$. Отклонението x на пружинното махало удовлетворява уравнението на хармоничния осцилатор (70.3), което означава, че движението на махалото е хармонично трептене с кръгова честота ω_0 .

$$(70.13) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Следователно при вертикално отклонение на теглилката от равновесното ѝ положение възникват хармонични трептения, чиято кръгова честота се определя от масата m на теглилката и от коефициента на еластичност k на пружината. В случая

върщащата сила се поражда от взаимодвижението на теглилка и пружината. Тя е вътрешна сила за системата теглилка – пружина и по своята природа е сила на еластичност.

Математично махало

Топче с маса m е окачено на неразтеглива нишка с дължина L . В случаите, когато размерите на топчето и масата на нишката могат да се пренебрегнат, системата се нарича *математично махало*. Да отклоним махалото на ъгъл θ от равновесното му положение (фиг.70-4). На топчето действат две сили: силата на тежестта mg и силата на опъване на нишката T . Записваме уравнението за въртене на топчето около ос, минаваща през точката на окачване O и перпендикулярна на равнината на чертежа (вж. част 1, §15)

$$(70.14) \quad I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -M,$$

където $I = mL^2$ е инерчният момент на топчето спрямо оста на въртене, а $M = mgL \sin\theta$ е въртящият момент на силата на тежестта. Силата на опъване на нишката не създава въртящ момент, защото нейното рамо е нула. Знакът минус в уравнение (70.14) показва, че въртящият момент се стреми да върне махалото в равновесното му положение, т.е. когато махалото е отклонено в посока, обратна на посоката на движение на часовата стрелка, въртящият момент е по посока на часовата стрелка и обратно. След заместване на I и M в уравнение (70.14) се получава

$$(70.15) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin\theta = 0.$$

Уравнение (70.15) се различава от уравнението на хармоничния осцилатор (70.3). Ако обаче ъглите на отклонение са малки, тогава с приближение може да се запише $\sin\theta \approx \theta$ (ъгълът θ се измерва в радиани!) и горното уравнение получава

вида

$$(70.16) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \theta = 0,$$

което вече е уравнение на хармоничен осцилатор. Положителният коефициент g/L пред променливата θ (ъгъл на отклонение от равновесното положение на махалото) е равен на квадрата на кръговата честота на трептене (люлеене) на махалото: $\omega_0^2 =$

g/L или $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$. Периодът на люлеене на махалото е

$$(70.17) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

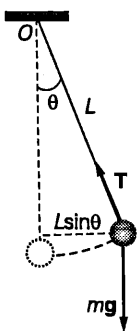
Следователно при малки отклонения от равновесното си положение математичното махало извършва хармонично трептене, като периодът на трептенията зависи само от дължината L на махалото и от земното ускорение g . До този резултат пръв стига Галилей, когато е бил само на 17 години. Той измерва периода на махало като функция на дължината му L . Любопитно е да се отбележи, че Галилей използва пулса си, за да измери времето.

При големи амплитуди периодът на махалото е по-голям от пресметнатия по формула (70.17). Но дори при ъглова амплитуда от 30° това нарастване на периода е само около 2%.

Периодът не зависи от масата m на махалото. Например, ако наблюдаваме възрастен човек и дете, които се люлеят на еднакви люлки, ще установим, че периодите на люлеене са приблизително еднакви, независимо от голямата разлика в масите.

Физично махало

Физично махало е всяко твърдо тяло, което може да се люлее свободно (без триене) около неподвижна ос. На фиг.70-5 оста минава през точка O от тялото и е перпендикулярна на равнината на чертежа. Да означим с I инерчният момент на махалото спрямо оста на въртене, с L – разстоянието от оста на въртене до центъра на масите C и с m – масата на махалото. Анало-

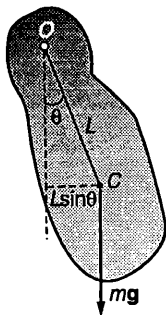


Фиг.70-4.

гично на случая с математичното махало, уравнението за въртене на тялото около оста O се записва във вида

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL \sin\theta.$$

При малки ъгли на отклонение $\sin\theta \approx \theta$ и се получава уравнение на хармоничен осцилатор:



Фиг.70-5.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgL}{I} \theta = 0 \quad \text{или} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \theta = 0,$$

където $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$ е кръговата честота на трептене. Периодът на физическото махало е

$$(70.18) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgL}}.$$

Полагаме $\frac{I}{mL} = L'$. Тогава периодът на физическото махало се записва по същия начин, както при математичното махало:

$$(70.19) \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L'}{g}}$$

Величината L' се нарича *приведена дължина* на физическото махало. Тя е равна на дължината на математично махало, което има същия период, както даденото физическо махало.

Зависимостта на периода на махалото от дължината му играе съществена роля при движението на хората и животните. Например човек ходи почти с опънати крака, които при движението извършват люлеене. Усилието е минимално, когато скоростта приблизително съответства на свободните люлеения на краката, разглеждани като физични махала – времето за една крачка е от порядъка на полупериода на махалото. Когато искаме да увеличим скоростта, удължаваме крачката (амплитудата на люлеене), при което периодът почти не се изменя. Увеличаването на честотата

на крачките изисква значителни усилия. Затова при бягане се свиват краката, което води до намаляване на приведената им дължина. Намалява и периодът на свободните люлеения на краката, което улеснява движението с по-голяма скорост (честота на крачките). Същото се отнася за ръцете, които при бягане са свити и се движат в противофаза спрямо краката.

Задачи

1. Периодите на две математични махала се отнасят както 1:3. Как се отнасят дължините им?
2. Маймунка играчка виси на ластик с коефициент на еластичност 4 N/m и трепти с период 1 s. Колко е масата на маймунката?
3. Космонавти кацат на неизвестна планета и установяват, че периодът на математично махало е два пъти по-малък, отколкото на Земята. Сравнете ускорението g_n на свободно падане на повърхността на планетата със земното ускорение g .
4. Пружинно махало трепти с период T и амплитуда A . Определете: а) максималното ускорение a_m ; б) максималната скорост v_m на махалото.
5. Да приемем, че движението на човешкото сърце е хармонично трептене с амплитуда $A = 3$ mm. Колко са максималната скорост и ускорение на сърцето при пулс 80 (сърцето извършва 80 трептения за една минута)?
6. Тяло е закачено на идеална пружина (пренебрегва се масата на пружината, законът на Хук е в сила при произволна деформация на пружината) и извършва хармонично трептене с период T . Отрязват половината от пружината, т.е. намаляват дължината ѝ 2 пъти, и закачат към нея същото тяло. Колко е периодът на това махало?
7. Еднородна пръчка с маса m и дължина L може да се люлее около хоризонтална ос, минаваща през единия ѝ край. Определете периода на това физическо махало.
8. Еднороден диск с маса m и радиус R може да се люлее като физическо махало около хоризонтална ос, която е перпендикулярна на равнината на диска и го пробоща на разстояние $L = R/2$ от центъра му. Определете периода T на махалото.

71. Енергия на хармоничното трептене

Ще разгледаме проста трептяща система, подобна на пружинното махало, съставена от тяло (трупче) с маса m и лека пружина с коефициент на еластичност k (фиг.71-1). Тялото е поставено върху гладка хоризонтална равнина, по която може да се хлъзга без триене. Тази система е по-проста за анализ от пружинното махало, защото: 1. в равновесното положение пружината не е деформирана; 2. гравитационната потенциална енергия не се изменя по време на движението. Ако отклоним тялото на разстояние $x_{\max} = A$ от равновесното му положение и го освободим, то ще извършва хармонично трептене с кръ-

гова честота $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и амплитуда A .

Енергията E на трептящата система тяло-пружина в произволен момент от време t е сума от кинетичната енергия $E_k = mv^2/2$ на тялото и потенциалната енергия $W = kx^2/2$ на деформираната пружина (вж. пример 71.1):

$$(71.1) \quad E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2},$$

където v и x са скоростта и отклонението в момента t . Когато тялото преминава през равновесното си положение ($x = 0$), пружината не е деформирана, потенциалната енергия е равна на нула, а скоростта е

максимална: $v = v_{\max} = A\omega_0$ (фиг.71-1б). Следователно в този момент системата има само кинетична енергия:

$$E = E_k = \frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2.$$

При максималното отклонение $|x_{\max}| = A$ (фиг.71-1а,в), тялото е в покой – кинетичната енергия е нула, а потенциалната енергия е максимална:

$$E = W = \frac{kA^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2,$$

където е отчетено, че $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Следователно в процеса на трептене става непрекъснато превръщане на кинетичната енергия в потенциална енергия и обратно, при което механичната енергия

$$(71.2) \quad E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2$$

на трептящата система се запазва.

Пример 71.1. Потенциална енергия на деформирана пружина. Определете потенциалната енергия на деформирана пружина, за която е в сила законът на Хук $F_e = -kx$, където F_e е силата на еластичност, възникваща при деформация x на пружината, а k е коефициентът на еластичност на пружината.

Решение. Да започнем бавно да разтягаме пружината. За да се движи свободният ѝ край без ускорение, приложената към него сила F трябва да е равна по големина и противоположна по посока на силата на еластичност F_e , с която пружината се противопоставя на деформацията: $F = -F_e = kx$.

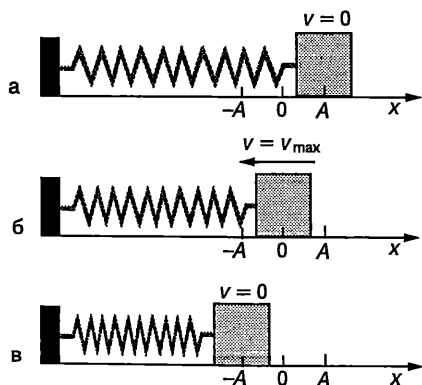
Елементарната работа на силата F е $dA = Fdx = kx dx$. Работата на външната сила за разтягане на пружината от $x = 0$ до x е

$$A = \int_0^x kx dx = \frac{kx^2}{2}.$$

Потенциалната енергия на пружината е равна на работата, която извършва външната сила за деформирането на пружината:

$$W = A = \frac{kx^2}{2}.$$

Фиг.71-1.



Пример 71.2. Проследете изменението на енергията на математично махало. Получете уравнение за пълната механична енергия на махалото при малки амплитуди на люлеене, подобно на уравнение (71.1). Използвайте аналогията между двете уравнения, за да определите кръговата честота на математичното махало.

Решение. Ще отчитаме гравитационната потенциална енергия на махалото от неговото равновесно положение. Когато махалото се намира в крайно ляво (дясно) положение, кинетичната му енергия е нула ($v = 0$), а потенциалната енергия е максимална. При спускане към равновесното положение скоростта нараства – расте и кинетичната енергия, а потенциалната енергия намалява. През равновесното си положение махалото преминава с максимална скорост и кинетична енергия. Нека в даден момент махалото се намира на височина h над равновесното си положение и се движи със скорост v (фиг.71-2). Механичната енергия на махалото е

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh.$$

Изразяваме височината h чрез ъгъла на отклонение θ на махалото от равновесното му положение (фиг.71-2):

$$h = L - L\cos\theta = 2L\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

където сме използвали тригонометричното тъждество $1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2)$. При малки ъгли на отклонение $\sin(\theta/2) \approx \theta/2$. Тогава за гравитационната потенциална енергия се получава

$$W = mgh = \frac{1}{2}mgL\theta^2.$$

Представяме скоростта v чрез ъгловата скорост $\omega = d\theta/dt$:

$$v = \omega L = \frac{d\theta}{dt}L.$$

След заместване на v и mgh за механичната енергия на махалото се получава

$$(71.3) \quad E = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}mgL\theta^2.$$

Сравняването на уравнения (71.1) и (71.3)

показва, че и в двата случая потенциалната енергия е пропорционална на квадрата на координатата, с която се описва движението на системата (отклонението x или ъгъла на завъртане θ). Кинетичната енергия е пропорционална на квадрата на първата производна на тази координата. Квадратът на кръговата честота е равен на отношението на двата коефициента на пропорционалност. За пружинно

махало $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, а за математично махало

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{mL^2} = \frac{g}{L}.$$

Този резултат се обобщава за всяка трептяща система с една степен на свобода. За определяне на кръговата честота се използват два метода:

1. Динамичен метод. Отклонява се системата от равновесие и се записва уравнението на движение. Ако то има вида (70.3), движението е хармонично трептене, квадратът на кръгова честота на което е равен на положителния коефициент пред функцията $x(t)$ (или $\theta(t)$) в уравнението на хармоничния осцилатор.

2. Енергетичен метод. Определят се кинетичната енергия и потенциалната енергия в произволен момент от времето. Ако потенциалната енергия е пропорционална на квадрата на координатата, описваща движението, а кинетичната енергия – на квадрата на нейната първа производна по времето, тогава движението е хармонично трептене. Квадратът на кръговата честота е равен на отношението на коефициента в израза за потенциалната енергия към коефициента в израза за кинетичната енергия.

Задачи

1. Трупчето от фиг.71-1 извършва хармонично трептене с амплитуда $A = 0,05$ m. Масата на трупчето е $m = 0,02$ kg, а коефициентът на еластичност на пружината е $k = 200$ N/m.

а) Изразете скоростта v на трупчето като функция на отклонението x .

б) Определете максималната скорост на трупчето и скоростта му при $x = 3$ cm.

2. Трупчето от фиг.71-1 извършва хармонично трептене с механична енергия 1 J. Колко е кинетичната енергия на трупчето при отклонение $x = A/2$ (A – амплитуда на трептенето)?

3. Като използвате енергетичния метод, определете кръговата честота на физично махало (фиг. 70-5).

72. Събиране на хармонични трептения

Принцип на суперпозицията

Досега разглеждахме прости хармонични трептения, които се извършват под действието само на една въртяща сила. Как ще се движи материална точка, ако при отклоняване от равновесното ѝ положение възникват две или повече въртящи сили? Отговор на този въпрос дава принципът на суперпозицията на трептенията: *Ако на една материална точка действат няколко въртящи сили, тя извършва едновременно толкова хармонични трептения, колкото е броят на въртящите сили.* Всяко трептене е независимо от останалите – извършва се под действие на определена сила, така както би се извършвало, ако останалите сили не действаха.

Ще отбележим, че принципът на суперпозицията е следствие от линейността на диференциалното уравнение (70.3), което описва хармоничното трептене. В него променливата x и нейната втора производна влизат на първа степен. Ако трептенето е анхармонично, т.е. ако въртящата сила съдържа членове, пропорционални на x^2 , x^3 и т.н., уравнението, описващо такова трептене, не е линейно и принципът на суперпозицията престава да е в сила. Това означава, че две нелинейни (анхармонични) трептения не са независими, а взаимно си влияят. По-нататък ще разглеждаме само хармонични трептения, които в общия случай могат да са с различни честоти, посоки, амплитуди и начални фази. При тяхното наслагване се получава сложно движение. Ще се спрем само на трите най-прости частни случая, които най-често се срещат в различни области на физиката:

1. Събиране на трептения с еднаква честота и направление.
2. Събиране на две трептения с еднаково направление и близки честоти.
3. Събиране на две взаимно перпендикулярни трептения с еднакви честоти.

Векторни диаграми

Материална точка извършва в направление на оста x едновременно две прости хармонични трептения с еднаква кръгова честота ω_0 :

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01}); \quad x_2 = A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02}).$$

В общия случай амплитудите и началните фази са различни. Съгласно с принципа на суперпозицията отклонението x на материалната точка от равновесното ѝ положение в произволен момент от времето t е

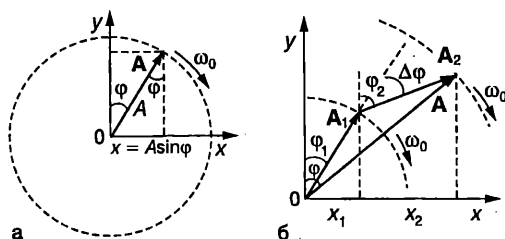
$$(72.1) \quad \begin{aligned} x &= x_1 + x_2 = \\ &= A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_{01}) + A_2 \sin(\omega_0 t + \varphi_{02}). \end{aligned}$$

Съществува прост геометричен метод за нагледно представяне на хармоничните трептения чрез вектори, наречен *метод на векторните диаграми*. Този метод е особено полезен, когато се налага събиране на хармонични трептения, защото заменя трудоемкото събиране на тригонометрични функции с нагледното геометрично събиране на вектори. Всяко хармонично трептене $x = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$ се представя чрез вектор $\mathbf{A}$ с модул A , равен на амплитудата на трептене, който се върти около началото на координатната система с постоянна ъглова скорост ω_0 , равна на кръговата честота на трептене (фиг.72-1а). В даден момент t векторът $\mathbf{A}$ сключва с оста y ъгъл φ , равен на моментната стойност на фазата на трептене $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$. Проекцията на вектора $\mathbf{A}$ върху оста x е

$$x = A \sin \varphi = A \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

т.е. тя се изменя с течение на времето по същия закон, както отклонението x при хармоничното трептене: казваме, че проекцията на вектора $\mathbf{A}$ извършва хармонично трептене.

Фиг.72-1.



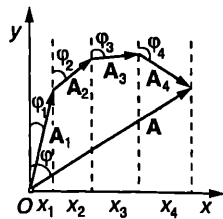
Нека материалната точка извършва едновременно двете хармонични трептения, зададени аналитично с уравнение (72.1). На векторната диаграма построяваме вектор A_1 с начало в началото O на координатната система, който сключва ъгъл $\varphi_1 = \omega_0 t + \varphi_{01}$ с оста y (фиг.72-16). От края на вектора A_1 построяваме втори вектор A_2 , сключващ ъгъл $\varphi_2 = \omega_0 t + \varphi_{02}$ с оста y . Така двете трептения са представени с вектори, чиито модули A_1 и A_2 са равни на амплитудите на трептене. Двата вектора се въртят с еднаква ъглова скорост ω_0 около началото O , която е равна на кръговата честота на трептене. Поради това ъгълът между тях $\Delta\varphi$ не се променя с течение на времето. Той е равен на разликата в началните фази на двете трептения:

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \varphi_2 - \varphi_1 = \\ &= (\omega_0 t + \varphi_{02}) - (\omega_0 t + \varphi_{01}) = \varphi_{02} - \varphi_{01}.\end{aligned}$$

Следователно сумата от двата вектора $A = A_1 + A_2$ е вектор с постоянен модул, който се върти със същата ъглова скорост ω_0 . От фиг.72-16 се вижда, че проекцията на вектора A върху оста x се изразява с уравнение (72.1). Оттук следва изводът, че сумата от две хармонични трептения с еднакви кръгови честоти ω_0 , които се извършват в едно и също направление, е хармонично трептене със същата кръгова честота ω_0 . На векторната диаграма това резултантно трептене се представя с вектор A , равен на геометричната сума от векторите, изразяващи отделните трептения. Фазата на резултантното трептене е равна на ъгъла φ , който векторът A сключва с оста y . Амплитудата на трептене е равна на модула на вектора A и може да се определи от триъгълника, образуван от трите вектора (фиг.72-16) – например с помощта на косинусовата теорема.

По метода на векторните диаграми могат да се събират не само две, но и произволен брой трептения. За целта от края на вектора A_2 се построява вектор A_3 , изразяващ третото трептене и т.н (фиг.72-2). Векторът A , който свързва началото O на координатната система с края на тази начупена линия, изразява резултантното

трептене. Проекцията на вектора A върху координатната ос x е равна на отклонението x на материалната точка от равновесното ѝ положение:



Фиг.72-2.

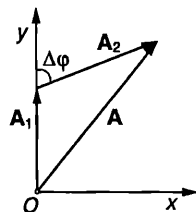
$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$$

Модулът A на вектора A и ъгълът φ , който векторът A сключва с оста y , са равни съответно на амплитудата и на фазата на резултантното трептене.

Пример 72.1. Материална точка извършва в направление на оста x едновременно две хармонични трептения с еднаква кръгова честота ω_0 . Определете амплитудата A на резултантното трептене. Амплитудите на двете трептения са A_1 и A_2 , а разликата в началните им фази е $\Delta\varphi$. При каква стойност на $\Delta\varphi$ амплитудата на резултантното трептене е:

а) максимална; б) минимална?

Решение. На векторната диаграма всички вектори се въртят около началото на координатната система с постоянна ъглова скорост. За нагледност на чертежа и за опростяване на пресмятанията е удобно да се избере такъв момент от времето t , в който един от векторите е насочен по някоя от координатните оси. В случая можем да изберем момента t така, че векторът A_1 , изразяващ първото от двете хармонични трептения на материалната точка, да е насочен по оста y (фиг.72-3). Тогава в момента t векторът A_2 , изразяващ второто трептене, сключва ъгъл $\Delta\varphi$ с оста y . Резултантното движение (трептене) на материалната точка се представя с вектора $A = A_1 + A_2$. Прилагаме косинусовата теорема за триъгълника, образуван от трите вектора,



Фиг.72-3.

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi),$$

откъдето определяме амплитудата на резултантното трептене:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}.$$

а) Амплитудата на трептене A е максимална при $\cos(\Delta\varphi) = 1$, т.е. при $\Delta\varphi = 2m\pi$, където

$m = 0, \pm 1, \pm 2$ и т.н. Тогава $A = A_1 + A_2$ – двете трептения се извършват във фаза (синфазни трептения) и амплитудите им се събират.

б) Амплитудата е минимална при $\cos(\Delta\varphi) = -1$, т.е. при $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$, където $m = 0, \pm 1, \pm 2$ и т.н. Тогава $A = |A_1 - A_2|$ – двете трептения се извършват в противофаза и амплитудите им се изваждат.

Биене

Ще разгледаме движението на материална точка, която извършва едновременно в едно и също направление две хармонични трептения с близки по големина кръгови честоти, съответно равни на ω и $\omega + \Delta\omega$, при което $\Delta\omega \ll \omega$. Ще покажем, че резултантното движение може да се разглежда като хармонично трептене с пулсираща амплитуда, наречено *биене*. За да опростим пресмятанията, ще се ограничим с частния случай, когато двете трептения имат еднакви амплитуди и начални фази. В този случай началният момент $t = 0$ може да се избере така, че началните фази да са равни на нула: $\varphi_{01} = \varphi_{02} = 0$. Тогава

$$(72.2) \quad x = x_1 + x_2 = A \sin \omega t + A \sin(\omega + \Delta\omega)t.$$

С помощта на тригонометричното тъждество

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

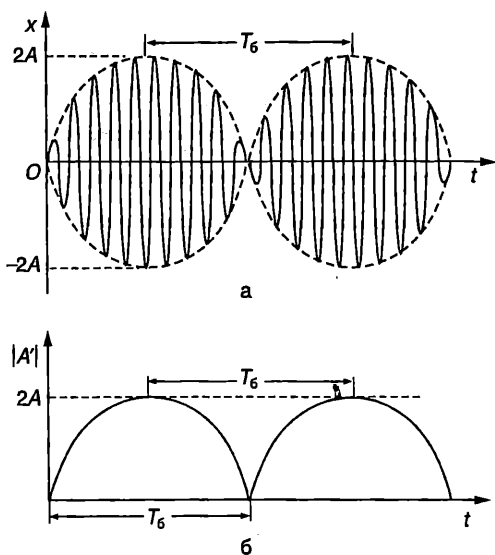
преобразуваме уравнение (72.2) и получаваме

$$(72.3) \quad x = 2A \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \sin \omega t,$$

където в аргумента на функцията $\sin$ сме пренебрегнали члена $\Delta\omega t/2$, който е много по-малък от ωt . Тъй като $\Delta\omega \ll \omega$, функцията $\cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right)$ се изменя много по-бавно от функцията $\sin \omega t$. Затова движение-

то, което се описва от уравнение (72.3), може да разглеждаме като хармонично трептене $x = A' \sin \omega t$ с кръгова честота ω и пулсираща амплитуда

$$(72.4) \quad |A'| = 2A \left| \cos\left(\frac{\Delta\omega t}{2}\right) \right|,$$



Фиг.72-4.

която се изменя с течение на времето също по хармоничен закон, но много по-бавно: за времето на един цикъл на трептене с кръгова честота ω изменението на амплитудата е много малко. На *фиг.72-4* са показани графиките на функциите $x(t)$ и $|A'|$ при биене. Времето между два последователни максимума (минимума) на амплитудата $|A'|$ се нарича *период на биене* T_6 . Периодът на биене се определя от уравнение (72.4):

$$(72.5) \quad \frac{\Delta\omega T_6}{2} = \pi; \quad T_6 = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

Разликата $\Delta\omega$ в кръговите честоти на двете трептения се нарича *кръгова честота на биене*.

Биене може да се демонстрира с два камертона. Когато разликата в честотите, с които трептят камертоните, е голяма, ухото и мозъкът възприемат камертоните като два независими източника на звук с различна височина на тона. Когато обаче разликата в честотите е много малка ($\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi \leq 10$ Hz), ухото вече не възприема техния звук като два отделни тона, а само като един тон с пулсираща амплитуда. Чува се биене – звукът периодично се усилюва и затихва.

Събиране на две трептения с еднакви честоти, извършващи се във взаимно перпендикулярни направления

Материална точка извършва едновременно две хармонични трептения с еднакви честоти във взаимно перпендикулярни направления: по оста x и по оста y на правоъгълна координатна система, чието начало O съвпада с равновесното положение на материалната точка. Избираме началния момент $t = 0$ така, че началната фаза на едното трептене да е нула. Тогава

$$(72.6) \quad x = A \sin \omega t; \quad y = B \sin(\omega t + \varphi_0),$$

където A и B са амплитудите на двете трептения, а φ_0 е фазовата разлика между тях. Ще разгледаме два характерни случая:

1. Двете трептения са във фаза ($\varphi_0 = 0$) или в противофаза ($\varphi_0 = \pi$). При $\varphi_0 = 0$ уравнения (72.6) имат вида

$$x = A \sin \omega t; \quad y = B \sin \omega t.$$

Изключваме $\sin \omega t$ и получаваме уравнението на траекторията

$$(72.7) \quad y = \frac{B}{A} x,$$

което е уравнение на права линия. Материалната точка извършва хармонично трептене с кръгова честота ω и амплитуда $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ в направление, което сключва ъгъл $\alpha = \arctg \frac{B}{A}$ с оста x (фиг. 72-5а). На

фиг. 72-5б е показан аналогичният случай за $\varphi_0 = \pi$. Следователно, ако материална точка извършва едновременно две хармонични трептения във взаимно перпендикулярни направления с еднаква кръгова честота ω , които са във фаза ($\varphi_0 = 0$) или в противофаза ($\varphi_0 = \pi$), резултантното движение също е хармонично трептене с кръгова честота ω . То се извършва в направление, определено от отношението на амплитудите на двете трептения.

Вярно е и обратното твърдение: всяко хармонично трептене може да се представи като сума от две хармонични трептения със същата кръгова честота, които са във фаза или в противофаза и се извършват в две взаимно перпендикулярни направления.

2. Между двете трептения има фазова разлика $\varphi_0 = \pi/2$. Тогава

$$x = A \sin \omega t; \quad y = B \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = B \cos \omega t.$$

Вдигаме на квадрат двете страни на тези уравнения и ги събираме. Получаваме

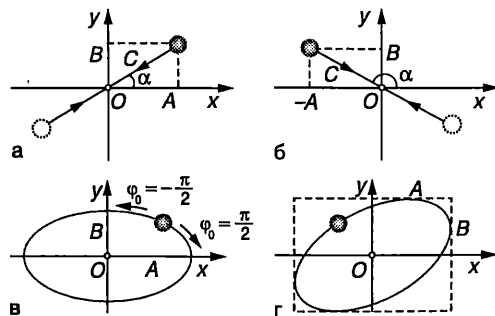
$$(72.8) \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1.$$

Това е уравнение на елипса, чиито полуоси са равни на амплитудите A и B на двете трептения, т.е. в този случай материалната точка се движи по елипса. Осите на елипсата лежат върху координатните оси x и y (фиг. 72-5в). Когато $\varphi_0 = \pi/2$, материалната точка се движи по посока на часовата стрелка, а при $\varphi_0 = -\pi/2$ – в противоположната посока. Времето за едно завъртане е равно на периода на трептене. Когато двете трептения имат еднакви амплитуди $A = B$, елипсата преминава в окръжност.

Следователно равномерното движение по окръжност може да се разглежда като сума от две хармонични трептения с еднаква кръгова честота ω , равна на ъгловата скорост на въртене. Трептенията се извършват в две взаимно перпендикулярни направления, имат еднакви амплитуди, равни на радиуса на окръжността, и фазова разлика $\varphi_0 = \pm \pi/2$.

При произволна фазова разлика φ_0 между двете трептения траекторията на материалната точка също е елипса. В общия случай обаче осите на тази елипса не лежат върху координатните оси, в направление на които се извършват двете хармонични трептения (фиг. 72-5г).

Фиг. 72-5.



73. Затихващи трептения

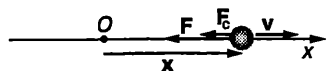
Собствени трептения

Трептенията на система, на която не действат външни сили, се наричат *собствени (свободни) трептения*. Собствените трептения се извършват под действие на вътрешна сила, породена от взаимодействието на отделни части от системата (например тяло – пружина при пружинното махало). Кръговата честота на собствените трептения (собствена кръгова честота) зависи единствено от характеристиките на системата (например от масата на тегликата и от коефициента на еластичност на пружината при пружинното махало, или от земното ускорение и дължината на нишката при математичното махало и т.н.). За да се възбудят собствени трептения, механичната система трябва да се изведе от равновесие чрез еднократно въвеждане на енергия отвън. Ако при движението не възникват сили на триене и съпротивление, внесената енергия се запазва. Консервативните връщащи сили само преобразуват тази енергия от кинетична енергия в потенциална енергия и обратно. Амплитудата на трептене е постоянна и такива трептения биха продължили неограничено дълго – наричат се *незатихващи трептения*.

Във всяка реална трептяща система обаче действат дисипативни сили на триене и съпротивление, които извършват отрицателна работа и механичната енергия на трептящата система, както и амплитудата на трептене, непрекъснато намаляват. Такива трептения се наричат *затихващи трептения*.

Характеристики на затихващите трептения

Най-голям интерес представлява случаят, когато силата на съпротивление е пропорционална на скоростта. Да разгледаме отново частица маса m , която може да се движи само по оста x . Началото O на оста съвпада с равновесното положение на частицата. Освен връщащата сила $F = -kx$, на частицата действа и сила на



Фиг.73-1.

съпротивление $F_c = -bv = -b \frac{dx}{dt}$, където b е положителна константа. Знакът минус показва, че силата на съпротивление е насочена обратно на посоката на скоростта v (фиг.73-1). Уравнението на движението на частицата получава вида

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - b \frac{dx}{dt}$$

или

$$(73.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

където $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ е собствената кръгова честота, а константа $\beta = b/2m$ се нарича *коэффициент на затихване*.

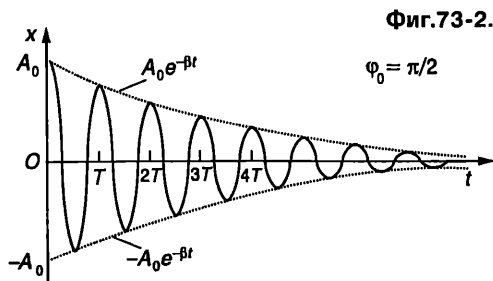
Уравнение (73.1) е еднородно линейно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти. Неговото решение е (вж. стр.287)

$$(73.2) \quad x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

където

$$(73.3) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}.$$

Константите A_0 и φ_0 се наричат съответно начална амплитуда и начална фаза. Техните стойности се определят от началните условия, т.е. от стойностите на отклонението и скоростта на частицата в момента $t = 0$. Функцията $x(t)$ е представена графично на фиг.73-2.



Фиг.73-2.

Движение, което се извършва по закона (73.2), се нарича затихващо трептене. Затихващите трептения, строго погледнато, не са периодични движения. При тях не е изпълнено основното изискване за периодично движение: стойностите на всички величини, които го характеризират, да се повтарят през равни интервали от време. Например отклонението x при затихващото трептене на частицата, показано на *фиг.73-2*, никога не достига отново своята начална стойност A_0 . Независимо от това, величините, характеризирани от затихващото трептене (отклонение, скорост, ускорение), през равни интервали от време стават нула или достигат максимални (минимални) стойности. Затова затихващите трептения се описват със същите величини, както периодичните незатихващи хармонични трептения. Величината ω , която се изразява с формула (73.3), се нарича кръгова честота на затихващите трептения. Техният период е

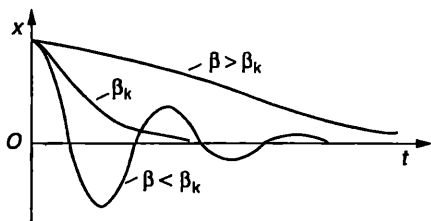
$$(73.4) \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

Амплитудата A на затихващите трептения намалява по експоненциален закон с течение на времето:

$$(73.5) \quad A = A_0 e^{-\beta t}.$$

От формула (73.3) се вижда, че кръговата честота ω на затихващите трептения е по-малка от собствената честота ω_0 . Следователно при наличие на сили на триене и съпротивление честотата на трептенията намалява и става равна на нула при $\beta = \beta_k = \omega_0$. При големи стойности на коефициента на затихване ($\beta > \beta_k$) в системата изобщо не възникват трептения – тя се връща в равновесното си положение чрез апериодично движение. Коефициентът на

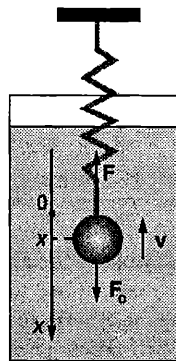
Фиг.73-3.



затихване $\beta_k = \omega_0$, при който затихващото трептене преминава в апериодично движение (при $\beta > \beta_k$), се нарича *критичен коефициент на затихване*. Доказва се, че движението се прекратява най-бързо и системата се връща в равновесното си положение при критичен коефициент на затихване (*фиг.73-3*).

В редица случаи трептенията са нежелателни, поради което се вземат мерки за тяхното бързо затихване. Например амортизаторите на автомобилите се конструират така, че да се постигне критичен коефициент на затихване. Стрелките на измервателните уреди (волтметри, амперметри, везни и др.) имат коефициент на затихване, който е равен или е малко по-малък от критичния. Ако затихването е слабо ($\beta < \beta_k$), стрелката на уреда извършва голям брой трептения преди да се установи в равновесното си положение, което съществено увеличава времето за измерване.

Пример 73.1. Пружинно махало е направено от топче с маса $m = 15 \text{ g}$ и радиус $r = 8,4 \text{ mm}$ и от пружина с коефициент на еластичност $k = 5 \text{ N/m}$. Топчето е потопено в глицерин (*фиг.73-4*) и извършва затихващи трептения с кръгова честота $\omega = \alpha\omega_0$, където ω_0 е собствената кръгова честота на махалото. Стойността на коефициента α се определя експериментално. Определете вискозитета η на глицерина, ако $\alpha = 0,90$. Силата на съпротивление се описва от закона на Стокс (вж. част 1, стр.148) $F_c = -bv = -6\pi\eta rv$, където v е скоростта на топчето.



Фиг.73-4.

Решение. Коефициентът на затихване на махалото е

$$\beta = \frac{b}{2m} = \frac{6\pi\eta r}{2m}.$$

Заместваме β и $\omega = \alpha\omega_0$ във формула (73.3) за кръговата честота на затихващите трептения

$$\alpha\omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{3\pi\eta r}{m}\right)^2}.$$

вдигаме на квадрат двете страни на това равенство, заместваме $\omega_0^2 = k/m$ и определяме вискозитета на глицерина

$$\eta = \frac{\sqrt{(1-\alpha^2)km}}{3\pi r} = 1,5 \text{ Pa} \cdot \text{s}.$$

Доброкачествоност

За количествена характеристика на бързината, с която трептящата система губи енергия в резултат на действието на сили на триене и съпротивление, се използва величината доброкачествоност Q (Q -фактор). По определение

$$Q = 2\pi \frac{\text{енергия на трептящата система}}{\text{енергия, която се губи за един период}},$$

или

$$(73.6) \quad Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)},$$

където $E(t)$ е енергията на трептящата система в момента t , а $E(t+T)$ – след един период. Тъй като енергията е пропорционална на квадрата на амплитудата на трептене, уравнение (73.6) може да се запише във вида

$$(73.7) \quad Q = 2\pi \frac{A^2(t)}{A^2(t) - A^2(t+T)}.$$

Заместваме амплитудата A от уравнение (73.5) в (73.7) и получаваме

$$(73.8) \quad Q = \frac{2\pi}{1 - e^{-2\beta T}}.$$

Когато затихването е слабо ($\beta < \omega_0$), кръговата честота на затихващите трептения е приблизително равна на собствената кръгова честота: $\omega \approx \omega_0$ (вж. уравнение 73.3). Тогава

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}; \quad 2\beta T \approx \frac{4\pi\beta}{\omega_0} \ll 1.$$

Използваме приближението (вж. част 1, (A.53) и (A.57) на стр.234)

$$1 - e^{-2\beta T} \approx 2\beta T \approx \frac{4\pi\beta}{\omega_0}$$

и определяме доброкачествоността на

трептяща система с малък коефициент на затихване

$$(73.9) \quad Q = \frac{\omega_0}{2\beta}.$$

Колкото по-малък е коефициентът на затихване β , толкова по-малки са загубите в трептящата система и е по-голяма нейната доброкачествоност.

Пример 73.2. Трептяща система има доброкачествоност $Q = 100$. Колко трептения N ще извърши системата, докато амплитудата им намалее $e = 2,718...$ пъти?

Решение. Системата има голяма доброкачествоност, поради което можем да използваме формула (73.9) за слабо затихващи трептения. Амплитудата на трептене намалява по закона $A = A_0 e^{-\beta t}$. За време $t = NT$, където T е периодът на трептене, амплитудата намалява e пъти:

$$A = \frac{A_0}{e} = A_0 e^{-\beta NT},$$

откъдето получаваме, че $\beta NT = 1$. За слабо затихващи трептения заместваем $T \approx 2\pi/\omega_0$ и определяме N :

$$N = \frac{\omega_0}{2\pi\beta} = \frac{Q}{\pi}.$$

Следователно доброкачествоността е равна на произведението от числото π и броя на трептенията N , които системата извършва, докато амплитудата им намалее e пъти: $Q = N\pi$.

Задачи

1. За време $t_1 = 10$ s амплитудата на пружинно махало, което извършва затихващи трептения, намалява 2 пъти. Определете коефициента на затихване β .
2. За време $t_1 = 10$ s амплитудата на пружинно махало, което извършва затихващи трептения, намалява 2 пъти. За колко секунди след началото на трептенията тяхната амплитуда ще намалее 8 пъти?
3. Определете Q -фактора на трептяща система, ако след всеки $N = 100$ трептения амплитудата на трептенията намалява $k = 2$ пъти.
4. Определете Q -фактора на математично махало с дължина $L = 1$ m, ако за интервал от време $\tau = 100$ s механичната енергия на махалото намалява $k = 2$ пъти.

74. Принудени трептения. Резонанс

Трептенията в реалните механични системи затихват. Например поради триенето люлката скоро престава да се люлее. Необходими са периодични тласъци, за да се поддържа люлеенето. Трептяща система, в която действат сили на триене, може да извършва незатихващи трептения под действие на периодично изменяща се външна сила. Такива трептения се наричат *принудени трептения*.

Характеристики на принудените трептения

Когато на материална точка освен квазиеластична сила и сила на съпротивление действат и външна сила, която се изменя по синусов закон

$$(74.1) \quad F = F_0 \sin \Omega t$$

с амплитуда F_0 и кръгова честота Ω , тя извършва принудени хармонични трептения. Движението на материалната точка се описва с линейното диференциално уравнение

$$(74.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t,$$

където ω_0 е кръгова честота на свободните трептения, β – коефициентът на затихване, а m – масата на материалната точка. Решението на уравнение (74.2) има вида (вж. стр.287)

$$(74.3) \quad x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

където $x_1(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0)$ е общото решение на еднородното уравнение (73.1), а $x_2(t)$ е едно частно решение на нееднородното уравнение (74.2).

Ще се спрем на физичната страна на процесите в трептящата система. Материалната точка извършва сложно движение, което е резултат от наслагване (суперпозиция) на две трептения – затихващо трептене с отклонение $x_1(t)$ и принудено трептене с отклонение $x_2(t)$. С течение на времето трептенията $x_1(t)$ затихват (прекриват се) и в края на този *преходен про-*

цес в системата се установяват принудени трептения с постоянна амплитуда, чиято кръгова честота е равна на кръговата честота Ω на външната сила. Доказва се (вж. пример 74.1), че

$$(74.4) \quad x(t) = x_2(t) = A \sin(\Omega t + \varphi),$$

където

$$(74.5) \quad A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}},$$

$$(74.6) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Параметърът φ определя фазовата разлика между отклонението x и външната сила F . Графиката на функцията $\varphi(\Omega)$ е представена на *фиг.74-1*. При $\Omega = 0$ фазовата разлика е нула ($\varphi = 0$). Това е граничният случай, когато действат постоянна външна сила $F = F_0$, която само отменя равновесното положение на матери-

алната точка на разстояние $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, на-

речено статично отклонение.

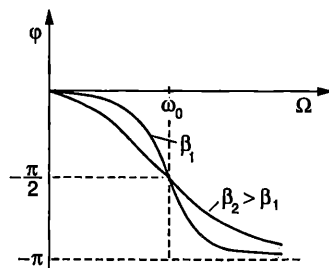
Отклонението x винаги изостава по фа-

за от външната сила. При $\Omega = \omega_0$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,

т.е. отклонението изостава по фаза от външната сила с $\pi/2$, което означава, че външната сила е във фаза със скоростта (вж. уравнение (70.9) на стр.178). При много големи кръгови честоти на външната сила ($\Omega \gg \omega_0$) отклонението x и външната сила F са в противофаза ($\varphi \rightarrow -\pi$), т.е. външната сила е във фаза с ускорението (вж. уравнение (70.10) на стр.118). В об-

ластта на високите честоти $A \approx \frac{F_0}{m\Omega^2}$: амплитудата

Фиг.74-1.



литудата на принудените трептения намалява пропорционално на $1/\Omega^2$, като движението на материалната точка се определя единствено от нейната инертност (маса m). При много високи честоти, поради честата смяна на посоката на движение, отклонението и скоростта са много малки. Затова въртящата сила и силата на съпротивление, които са пропорционални съответно на отклонението и на скоростта, имат много малки стойности и могат да се пренебрегнат. Уравнението на движение получава вида $ma = F$, което обяснява защо ускорението a е във фаза с външната сила F .

Ще обърнем внимание, че амплитудата на принудените трептения, за разлика от амплитудата на собствените трептения, не зависи от началните условия, а само от параметрите на трептящата система и от външната сила. Постоянната амплитуда на установилите се принудени трептения показва, че външната сила извършва положителна работа и внася в системата механична енергия, която компенсира загубите, предизвикани от съпротивителните сили.

Пример 74.1. Покажете, че $x = A \sin(\Omega t + \varphi)$ е едно частно решение на уравнение (74.2). Определете параметрите A и φ .

Решение. Пресмятаме първата и втората производна на отклонението x по времето t :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \Omega A \cos(\Omega t + \varphi); \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= -\Omega^2 A \sin(\Omega t + \varphi).\end{aligned}$$

Заместваме двете производни в уравнение (74.2):

$$\begin{aligned}-\Omega^2 A \sin(\Omega t + \varphi) + 2\beta \Omega A \cos(\Omega t + \varphi) + \\ + \omega_0^2 A \sin(\Omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \sin \Omega t.\end{aligned}$$

С помощта на тригонометричните тъждества

$$\begin{aligned}\sin(\Omega t + \varphi) &= \sin \Omega t \cos \varphi + \cos \Omega t \sin \varphi \\ \text{и} \\ \cos(\Omega t + \varphi) &= \cos \Omega t \cos \varphi - \sin \Omega t \sin \varphi\end{aligned}$$

преобразуваме горното равенство във вида

$$\begin{aligned}\left[(\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\beta \Omega \sin \varphi - \frac{F_0}{mA} \right] A \sin \Omega t + \\ + \left[(\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\beta \Omega \cos \varphi \right] A \cos \Omega t = 0.\end{aligned}$$

Това уравнение се удовлетворява във всеки момент от времето (за всяко t), само ако коефициентите пред $\sin \Omega t$ и $\cos \Omega t$ са равни на нула:

$$(74.7) \quad (\omega_0^2 - \Omega^2) \cos \varphi - 2\beta \Omega \sin \varphi - \frac{F_0}{mA} = 0;$$

$$(74.8) \quad (\omega_0^2 - \Omega^2) \sin \varphi + 2\beta \Omega \cos \varphi = 0.$$

От уравнение (74.8) определяме $\tan \varphi$:

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Използваме получения резултат за $\tan \varphi$ и тригонометричното тъждество $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$, за да изразим $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$:

$$\begin{aligned}\sin \varphi &= \frac{-2\beta \Omega}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}}; \\ \cos \varphi &= \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right]^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Заместваме $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ в уравнение (74.7) и определяме A :

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}.$$

Резонанс

Както се вижда от формула (74.5), амплитудата на принудените трептения зависи от кръговата честота Ω на външната сила и от собствената кръгова честота на системата ω_0 . Зависимостта $A(\Omega)$ е представена графично на *фиг. 74-2*. Ако в системата нямаше триене ($\beta = 0$), когато кръговата честота на външната сила се изравни със собствената кръгова честота на

системата, амплитудата на принудените трептения би станала безкрайно голяма. В реалните системи нарастването на амплитудата зависи от коефициента на затихване β .

Явлението, при което амплитудата на принудените механични трептения рязко нараства, когато кръговата честота на външната сила се доближи до собствената кръгова честота на трептящата система, се нарича резонанс.

Кръговата честота, при която амплитудата на принудените трептения е максимална, се нарича *резонансна кръгова честота* Ω_p . Резонансната кръгова честота е равна на (вж. пример 74.2)

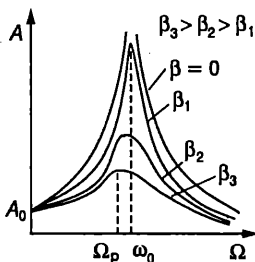
$$(74.9) \quad \Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Когато коефициентът на затихване е малък ($\beta \ll \omega_0$), резонансът настъпва при кръгова честота на външната сила приблизително равна на кръговата честота на собствените трептения ($\Omega_p \approx \omega_0$). В трептящи системи с голям коефициент на затихване резонансът се отмества към по-ниските честоти (фиг.74-2). Колкото по-малко е триенето, толкова по-силно нараства амплитудата на принудените трептения при резонанс.

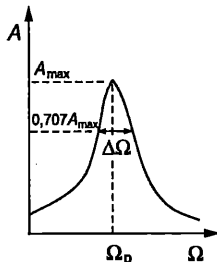
Ако се изследва експериментално зависимостта $A(\Omega)$, от получената резонансна крива може да се определи Q -факторът на трептящата система. Доказва се, че при слабо затихване на трептенията ($\beta \ll \omega_0$) Q -факторът е

$$(74.10) \quad Q = \frac{\Omega_p}{\Delta\Omega},$$

Фиг.74-2.



Фиг.74-3.



където $\Delta\Omega$ е ширината на резонансната

крива на височина $\frac{A_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0,707 A_{\max}$ от

максималната амплитуда $A_{\max}$ (фиг.74-3).

Може да се дадат различни примери за резонанс. При полет крилата на насекомите извършват до 120 трептения в секунда, докато броят на нервните импулси, които управляват тяхното движение, е само три. Импулсите обаче пристигат в такъв момент, че да се поддържат резонансни трептения с максимална амплитуда. Знаменитият тенор Енрико Карузо можел да разбие на парчета чаша, направена от качествено стъкло, изпявайки и задържайки за известно време определен тон. Това е възможно, когато тонът има честота, равна на собствената честота на трептене на чашата. Тогава звукът силно се поглъща и в чашата възникват резонансни трептения с голяма амплитуда.

В акустиката резонансът се използва за усилване на звука. В техниката той често е вреден, дори опасен, и се вземат мерки да бъде избегнат. Например собствената честота на трептене на корпуса на кораб или на вертолет трябва съществено да се различава от честотата на принудените трептения, които могат да се предизвикат при въртенето на гребния винт или на пропелера. В противен случай резонансните трептения с голяма амплитуда могат да предизвикат разрушения.

Влияние на трептенията върху човешкия организъм

Във всекидневието и в редица професии хората са подложени на различни вибрации. При движение по неравен път автомобилът извършва трептения, които се предават на пътниците и пораждат неприятни усещания. Люлеенето на корабите понякога предизвиква повръщане и морска болест. Физиологичният ефект върху организма зависи от честотата и от амплитудата на трептенията и от продължителността на тяхното действие. Особено неприятен за човека е диапазонът от 3 Hz до 7 Hz, в който попадат честотите на собствените трептения на тялото като цяло и на раменния пояс. Когато външните виб-

рации имат същите честоти, настъпва резонанс и амплитудата на принудените трептения на човешкото тяло е максимална. При по-високи честоти в резонанс могат да се окажат отделни части на тялото. Например главата трепти спрямо раменете със собствена честота около 20 Hz, а очните ябълки в гнездата си – с честота около 35 Hz. Трептенията причиняват физиологични изменения в нервната система, вестибуларния апарат, зрението, речта и др. Силните вибрации водят до сериозни (понякога фатални) увреждания на дробовите, сърцето, мозъка и на други органи.

Следователно в трептяща система с малък коефициент на затихване резонансната амплитуда $A_{\max}$ е Q пъти по-голяма от статичното отклонение A_0 , т.е. от отклонението от равновесното положение, което би предизвикала постоянна външна сила с големина, равна на амплитудата F_0 на променливата сила, пораждаща принудените хармонични трептения.

Задачи

1. Пружинно махало извършва принудени трептения с амплитуда $A = 1$ cm под действие на хармонична сила с амплитуда $F_0 = 3$ N. Определете коефициента на еластичност k на пружината, ако кръговата честота на принудените трептения е 2 пъти по-малка от собствената кръгова честота на махалото. Триенето се пренебрегва ($\beta = 0$).

2. Пружинно махало с маса m извършва принудени трептения по закона $x = A \sin \Omega t$ под действие на сила $F = F_0 \sin(\Omega t + \pi/2)$. Определете коефициента на затихване β .

3. Определете резонансната кръгова честота на трептяща система, за която $\beta = \omega_0/4$. Направете числени пресмятания за $\omega_0 = 100$ s⁻¹.

4. Собствената кръгова честота на пружинно махало е $\omega_0 = 10$ s⁻¹. Във вискозна среда махалото извършва затихващи трептения с кръгова честота $\omega = 8$ s⁻¹. Определете резонансната честота Ω_p на махалото в тази среда.

5. Под действие на постоянна сила F_0 пружината на махало се разтяга с $A_0 = 0,1$ cm. Колко е амплитудата на резонансните трептения на това махало под действието на хармонична сила с амплитуда F_0 ? Доброкачествеността на системата е $Q = 40$.

6. Трептяща система извършва резонансни трептения с амплитуда $A_{\max} = 5$ cm. Определете амплитудата на принудените трептения на системата, ако кръговата честота на външната сила нарастне 2 пъти, без да се изменя нейната амплитуда F_0 . Коефициентът на затихване е $\beta = 0,1\omega_0$, където ω_0 е собствената кръгова честота на трептящата система.

Пример 74.2. При каква кръгова честота на външната сила амплитудата на принудените трептения е максимална? В случай на слабо затихване ($\beta \ll \omega_0$) изразете максималната амплитуда чрез доброкачествеността на трептящата система.

Решение. Трябва да изследваме функцията (74.5) за максимум. За целта е достатъчно да намерим първата производна на подкоренната величина и да я приравним на нула:

$$-4\omega(\omega_0^2 - \Omega^2) + 8\beta^2\Omega = 0,$$

откъдето определяме резонансната честота

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Заместваме резонансната честота в уравнение (74.5) и за максималната амплитуда на трептенията получаваме

$$\begin{aligned} A_{\max} &= \frac{F_0}{m\sqrt{4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2) + 4\beta^4}} = \\ &= \frac{F_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

При малък коефициент на затихване

$$A_{\max} \approx \frac{F_0}{2m\beta\omega_0} = A_0 Q,$$

където $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$ е доброкачествеността на

трептящата система (вж. формула (73.9)), а

$A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ е статичното отклонение.

75. Бягащи вълни

Вълни в неограничена среда

Механични трептения се разпространяват в газове, течности и твърди тела. За средата, в която се разпространяват трептенията, се използва моделът на непрекъснатата еластична материална среда. В този модел не се отчита атомно-молекулният строеж на веществото. Свойствата на средата се описват с макроскопични величини: плътност, еластични модули и др. Затова *частици на средата* се наричат отделните атоми и молекули, а малки макроскопични елементи от средата, в които обаче се съдържат много голям брой молекули. Например в $1 \mu\text{m}^3$ (10^{-18}m^3) въздух при нормални условия има около 24 милиона молекули. Размерът на подобна частица е много по-голям от средното разстояние между молекулите, но, от друга страна, е много по-малък от характерните дължини, описващи разпространението на трептенията в средата (например от дължината на вълната на звуковите вълни). Средата е еластична, ако деформациите, породени от външни сили, изчезват напълно след прекратяване действието на силите.

Да разгледаме тяло, което извършва трептения. Движението на тялото предизвиква деформации на заобикалящата го среда и в нея възникват еластични сили. Еластичните сили действат на частиците от средата, разположени близо до тялото, като се стремят да ги върнат в равновесните им положения. Освен това те действат и на по-отдалечени частици и ги отклоняват от равновесните им положения. Тези отклонения пораждаат нови еластични сили, които отклоняват още по-отдалечени частици. Така деформациите обхващат все по-далечни области от средата и техните частици започват да трептят. Механични деформации, които се разпространяват в еластична среда, се наричат *еластични* или *механични вълни*.

Тялото или устройството, чието въздействие върху средата поражда деформациите, се нарича *източник на механични*

ни вълни. Скоростта *u*, с която се разпространяват деформациите в средата, се нарича *скорост на механичната вълна*. Скоростта на вълната е различна от скоростта на движение на частиците. При вълновия процес всяка частица извършва трептене около равновесното си положение, като това трептене се разпространява със скорост *u* в средата и обхваща все нови и нови частици.

Механична среда, която няма външни граници, се нарича *отворена* или *неограничена среда*. В неограничена среда източниците създават *бягащи вълни*, които се отдалечават от източника и никога не се връщат обратно. Бягащите вълни пренасят през средата енергия и импулс, поради което за тяхното поддържане е необходимо източникът непрекъснато да извършва работа върху средата и да ѝ предава импулс и енергия. Трябва да се подчертае, че *бягащата вълна пренася енергия и импулс, но не пренася вещество*. Частиците на средата извършват само трептене около равновесните си положения, а в резултат на работата на еластичните сили става предаване на енергия и импулс от частица на частица.

Модел на неограничена среда е безкрайна среда, която запълва цялото пространство. Ако средата има граници, след като ги достигне, вълната може се отрази и да започне да се разпространява в обратната посока. Например в планината ясно се чува отразеното от отсрещна скала ехо. От горист склон обаче ехо почти не се долавя, защото той силно поглъща звука. Среди с крайни размери, чиито граници напълно поглъщат механичните вълни, също се разглеждат като отворени (неограничени) среди. Бягащите вълни, излъчени от източника, се поглъщат напълно от границите и отразена вълна не се образува, което е равносилно на разпространение на бягаща вълна в безкрайна среда.

Когато източникът извършва хармонично трептене, бягащата вълна се нарича *хармонична вълна*. При хармоничната бягаща вълна всички движещи се частици от средата извършват принудено хармонично трептене с кръгова честота ω , равна на кръговата честота на трептене на източника. Кръговата честота на треп-

тене ω се нарича *кръгова честота на вълната*, а честотата $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ – *честота на вълната*. Периодът на трептене $T = \frac{1}{\nu}$ се нарича *период на вълната*.

Вълни по опъната струна

Като прост пример за хармонични бягащи вълни ще разгледаме вълните, които се разпространяват по безкрайна опъната струна. Нека в момента $t = 0$ под действие на външна сила, насочена перпендикулярно на струната (фиг.75-1а), точка O с координата $x = 0$, започне принудено хармонично трептене $y = A \sin \omega t$. Трептенето се предава по струната със скорост u от частица на частица. Всяка следваща частица започва да трепти със същата кръгова честота ω , но с известно закъснение: в двете посоки на оста x се разпространяват бягащи хармонични вълни (фиг.75-1б). Стрелките на фиг.75-1б показват скоростите на частиците от струната. Няма да отчитаме предаването на енергия от струната на околния въздух, нито нагряването ѝ в резултат на превръщането на част от механичната енергия на трептене във вътрешна енергия (когато деформациите не са абсолютно еластични). При тези условия всички частици от струната извършват трептения с еднаква амплитуда A , която се нарича *амплитуда на вълната*.

За време $t = \tau$ трептенето се разпространява на разстояние $x = u\tau$ и точка B с координата x (фиг.75-1а) започва да трепти така, както е трептяла точка O в началния момент $t = 0$. В произволен момент t движението на точка B ще съответства на движението на точка O в по-ранния момент $t - \tau$:

$$(75.1) \quad y = A \sin \omega(t - \tau) = A \sin \omega(t - \frac{x}{u}).$$

Уравнение (75.1) описва разпространението на хармонична вълна в положителната посока на оста x . Уравнението на вълна, разпространяваща се в противоположната посока, се получава като в уравнение (75.1) се промени посоката на скоростта u , т.е. като се замени u с $-u$:

$$(75.2) \quad y = A \sin \omega(t + \frac{x}{u}).$$

По-нататък ще разглеждаме само вълни, които се разпространяват в положителната посока на оста x . Величината

$$(75.3) \quad \varphi = \omega(t - \frac{x}{u})$$

се нарича *фаза на вълната*. Най-малкото разстояние между две точки, които трептят с фазова разлика 2π , се нарича *дължина на вълната* λ . Да означим с x_1 и x_2 координатите на две такива точки. От уравнение (75.3) получаваме

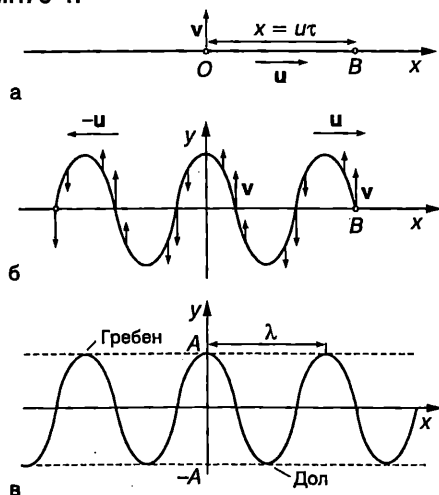
$$2\pi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\omega}{u} (x_2 - x_1) = \frac{\omega}{u} \lambda,$$

откъдето изразяваме връзката между дължината на вълната, скоростта и кръговата честота (честотата) на механичната вълна:

$$(75.4) \quad u = \lambda \frac{\omega}{2\pi} \quad \text{или} \quad u = \lambda \nu.$$

Скоростта на бягащата вълна е равна на произведението на дължината на вълната λ и честотата ν . Дължината на вълната λ характеризира пространствената периодичност на вълновия процес. Ако в даден момент t направим снимка на струната, ще видим, че тя има форма на синusoида (фиг.73-1в). Отклонението y на всяка точка от струната в момента t зависи от координатата x по синусов закон. Точ-

Фиг.75-1.



ките, които в дадения момент имат максимално отклонение $y = A$, се наричат *максимуми* или *гребени* на вълната. Точките, които имат максимално по големина отклонение, но в противоположната посока, се наричат *минимуми* или *долове* на вълната (фиг.75-1в). От даденото определение за дължина на вълната следва, че разстоянието между два съседни максимума или минимума е равно на дължината на вълната λ .

Величината

$$(75.5) \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

се нарича *вълново число*. Вълновото число се измерва в единици m^{-1} или cm^{-1} . Скоростта на вълната може да се изрази чрез вълновото число и кръговата честота:

$$(75.6) \quad u = \lambda v = \frac{2\pi v}{k} = \frac{\omega}{k}.$$

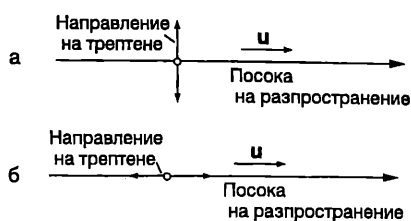
Заместваме скоростта u от уравнение (75.6) в (75.1) и получаваме уравнението на бягаща хармонична вълна в друг вид, който по-често се използва във физиката:

$$(75.7) \quad y = A \sin(\omega t - kx).$$

Фазата на бягащата вълна $\phi = \omega t - kx$ се изменя както във времето, така и в пространството. Кръговата честота ω характеризира бързината, с която се изменя фазата на дадена точка с течение на времето t . Вълновото число k , от друга страна, е равно на скоростта, с която се изменя фазата в даден момент от времето в зависимост от координатата x .

Напречни и надлъжни вълни

Когато частиците на средата трептят в направление, перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната, вълните се наричат *напречни вълни* (фиг.75-2а). Ако частиците трептят в направлението, в което се разпространява вълната, вълните са *надлъжни* (фиг.75-2б). Вълните по опъната струна са пример за напречни вълни. Надлъжни вълни могат да се наблюдават например по разтегната мека пружина, ако периодично се свива и разтяга единият ѝ край (фиг.75-3). Образуват се области на свиване и на разтягане на пружини-



Фиг.75-2.

ната, които се разпространяват по нейната дължина. Местата с най-голямо свиване съответстват на максимумите на вълната, а местата с най-голямо разтягане – на минимумите на надлъжната вълна.

При разпространение на надлъжни вълни се извършват обемни деформации на свиване и разширяване на материалната среда. Газовете и течностите, както и твърдите тела, притежават обемна еластичност: при намаляване на обема налягането нараства и възникват сили на натиск, насочени перпендикулярно на повърхността на разглеждания обем, които се противопоставят на външните сили. Затова надлъжни вълни се разпространяват както в твърди тела, така и в течности и в газове.

Предаването на трептенията при напречните вълни се извършва от тангенциални еластични сили, които възникват при деформации на хлъзгане. Всеки движещ се елемент се хлъзга спрямо заобикалящите го части от средата и взаимодейства с тях чрез възникващите при хлъзгането еластични сили, които са насочени по допирателната към повърхността на елемента. Деформации на хлъзгане възникват в твърдите тела при изменението на тяхната форма (вж. част 1, §21). Следователно напречни вълни могат да се разпространяват само в среди, които притежават еластичност на формата, каквито са твърдите тела.

По-специфичен е случаят с повърхнин-

Фиг.75-3.



ните вълни, които се разпространяват по свободната повърхност на течностите. За тях определяща роля играят гравитационните сили и силите на повърхностно напрежение. При разпространение на повърхнинна вълна частиците на течността извършват едновременно напречни и надлъжни трептения и описват елипси (или по-сложни траектории).

Скорост на вълните

За да изясним от какво зависи скоростта на разпространение на механичните вълни, ще направим аналогия с хармоничното трептене. Например кръговата честота

на пружинно махало е $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тя зави-

си от два фактора: от инертността на телцето, която се характеризира с масата m , и от еластичните свойства на пружината, които определят коефициента на еластичност k . Скоростта на разпространение на механичните трептения в материална среда се определя от същите два фактора: инертност и еластичност. Колкото по-инертна е средата, толкова по-бавно се разпространяват вълните. Обратно, ако еластичните сили, които възникват при деформациите на средата, са големи, вълните се разпространяват по-бързо. Доказва се, че скоростта на механичните вълни зависи от инертността и еластичността на средата по аналогичен начин, както кръговата честота на свободните хармонични трептения:

$$(75.8) \quad u = \sqrt{\frac{\text{еластичност}}{\text{инертност}}}.$$

В зависимост от вида на вълните еластичността и инертността на средата се характеризират с различни величини. При разпространение на напречни вълни в твърда среда се извършват деформации на хлъзгане. В този случай еластичните сили зависят от модула на хлъзгане G (вж. част 1, стр.116, §21). Мярка за инертността на средата е нейната механичната плътност ρ . Скоростта на напречните вълни е

$$(75.9) \quad u_{\perp} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

При надлъжни вълни в неограничена твърда среда в направлението на разпространение на вълните се извършват деформации на едностранно свиване и разширение. Еластичните сили, които възникват, са пропорционални на еластичния модул на едностранно свиване E' . Скоростта на надлъжните вълни е

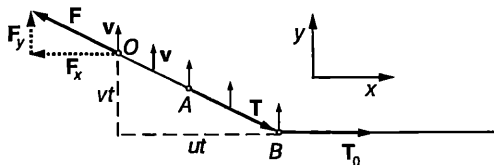
$$(75.10) \quad u_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}.$$

За всички твърди тела $E' > G$ (вж. част 1, уравнение (21.11) на стр.120), поради което надлъжните вълни се разпространяват с по-голяма скорост от напречните вълни. Пример за механични вълни в твърда среда са сеизмичните вълни, които възникват при земетресение. Движението на земните пластове води до натрупване на огромни механични напрежения в сравнително малки по обем области, наречени *огнище на земетресението*. Огнището може да се намира на различна дълбочина: от няколко километра до стотици километри. В даден момент еластичните напрежения предизвикват разкъсване на земния пласт и освобождаване на натрупаната енергия. Част от нея се пренася от възникващите при това механични вълни. Надлъжните сеизмични вълни, наречени P -вълни, се разпространяват с по-голяма скорост и първи достигат местата, отдалечени от огнището. Напречните сеизмични вълни (S -вълни) имат по-малка скорост и се регистрират по-късно. В диаметрално направление през земното ядро преминават само надлъжните вълни, което потвърждава предположението, че Земята има течно ядро. P -вълните преминават през течното ядро на Земята, докато то е преграда за S -вълните.

Скоростта на напречните вълни по опъната струна се определя от еластичната сила на опъване T_0 на струната и от масата на единица дължина δ_0 от струната (вж. пример 75.1):

$$(75.11) \quad u = \sqrt{\frac{T_0}{\delta_0}}.$$

Пример 75.1. В момента $t = 0$ единият край (точка O) на дълга опъната струна започва да се тегли с постоянна скорост v , насочена перпендикулярно на струната. Определете скоростта u , с която се разпространява вълновият импулс по струната (фиг.75-4).



Фиг.75-4.

Решение. Точките, до които е достигнал импулсът, започват да се движат с постоянна скорост v . На участък OA от струната действат две сили: външната сила F и силата на еластичност T , с която останалата част на струната действа на разглеждания участък. Тъй като участъкът OA се движи без ускорение, резултантната на двете сили трябва да е равна на нула. Следователно външната сила F е насочена по дължината на струната и е равна по големина на еластичната сила T : $F = T$. Ще обърнем внимание, че при разпространение то на импулса движещата се част от струната допълнително се разтяга и еластичната сила T е по-голяма от еластичната сила T_0 , която възниква в неподвижната опъната струна. В момента t се движи участъкът OB от струната. До точките, намиращи се вдясно от точка B , вълновият импулс все още не е достигнал. Неподвижната част от струната действа на движещата се част с еластична сила T_0 . Тъй като дължината и масата m на движещия се участък непрекъснато нарастват, уравнението на втория принцип на механиката трябва да се запише във вида

$$F + T_0 = \frac{dp}{dt}.$$

Импулсът p на струната е $p = mv = ut\delta_0 v$, където δ_0 е линейната плътност (масата на единица дължина) на неподвижната струна. След заместване на p получаваме

$$F + T_0 = u\delta_0 v.$$

Записваме това векторно равенство по компоненти:

$$\left. \begin{array}{l} -F_x + T_0 = 0; \quad F_y = u\delta_0 v. \end{array} \right\}$$

От друга страна, от подобните триъгълници на фиг.75-4 следва съотношението

$$\frac{F_y}{F_x} = \frac{vt}{ut} \quad \text{или} \quad F_y = \frac{v}{u} F_x = \frac{v}{u} T_0.$$

От двете уравнения за F_y определяме скоростта u :

$$u = \sqrt{\frac{T_0}{\delta_0}}.$$

Ако външната сила предизвиква по-сложно движение на свободния край O (например хармонично трептене), еластичните сили, с които си взаимодействат две съседни частици от струната, се изменят с течение на времето. Да означим с ΔT максималното изменение на еластичната сила: $\Delta T = T_{\max} - T_0$, където $T_{\max}$ е максималната стойност, която достига еластичната сила при разпространението на вълната. За вълни, при които $\Delta T \ll T_0$, получената формула за скоростта u остава в сила. Такива вълни се разпространяват по струната с постоянна скорост, която зависи само от силата на опъване на струната и от нейната линейна плътност.

Задачи

1. Пресметнете скоростта на звука във вода, ако трептения с период $T = 0,003$ s пораждат звукова вълна с дължина $\lambda = 4,49$ m.
2. Скоростта на хармонична вълна е 500 m/s. Колко е дължината на вълната, ако източникът трепти с честота 100 Hz?
3. За време Δt частица от материална среда, в която се разпространява механична вълна, преминава 400 пъти през равновесното си положение. За същото време вълната се разпространява на разстояние 2000 m. Колко е дължината на вълната?
4. Най-дългата струна на роял е опъната със сила $T_0 = 1098$ N. Масата на единица дължина от струната е $\delta_0 = 0,065$ kg/m. Колко е скоростта на напречните вълни по тази струна?
5. По струна, която е опъната със сила 50 N, се разпространява напречна вълна със скорост 20 m/s. При каква сила на опъване скоростта на вълните по същата струна ще бъде 40 m/s?
6. По опъната струна се разпространява напречна хармонична вълна. Докажете, че наклонът на допирателната, прекарана през всяка точка от струната (т.е. $\frac{dy}{dx}$), е равен на отношението на скоростта v на тази точка към скоростта на вълната u .

76. Пренасяне на енергия ОТ ВЪЛНИ

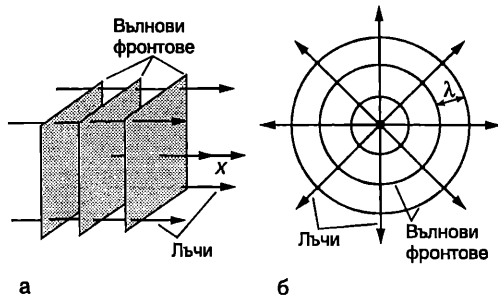
Плоски вълни и сферични вълни

При разпространение на хармонична вълна по опъната струна всички точки от струната трептят с различни фази. Такава вълна се нарича *едномерна вълна*. Тя се разпространява по оста x и частиците, до които достига, започват да трептят последователно една след друга. Когато вълните се разпространяват в пространството (тримерни вълни), във всеки момент голям брой точки трептят с еднакви фази. Геометричното място на точките, трептящи с еднакви фази, е повърхност, която се нарича *вълнова повърхност* или *вълнов фронт*. Прието е графично да се представят вълновите фронтове, които показват положението на гребените на вълната в даден момент. Разстоянието между два такива съседни вълнови фронта е равно на дължината на вълната λ . Вълновите фронтове се преместват в средата със скоростта на вълната u , която се нарича *фазова скорост*. Линиите, перпендикулярни на вълновите фронтове, се наричат *лъчи*. Те показват посоката, в която се пренася енергия от вълните. В еднородна среда лъчите са прави линии.

Вълновите фронтове на *плоските вълни* са успоредни равнини. Техните лъчи са успоредни прави (фиг.76-1а). Избираме ос x , насочена по посоката на разпространение на плоската вълна. Уравнението на хармонична плоска вълна има същия вид, както уравнението на хармонична вълна по опъната струна (75.7):

$$(76.1) \quad y(x, t) = A \sin(\omega t - kx).$$

С уравнение (76.1) могат да се представят както надлъжните, така и напречните плоски хармонични вълни. За надлъжните вълни отклонението y е в направление на оста x . При напречните вълни частиците трептят в равнина, перпендикулярна на оста x . Когато трептенето се извършва в точно определено направление, което не се изменя с течение на времето, вълната се нарича *линейно поляри-*



Фиг.76-1. а) Плоска вълна; б) сферична вълна.

зирана. Тогава това направление се избира за ос y на правоъгълна координатна система и линейно поляризираната вълна се изразява с уравнение (76.1). В общия случай направлението, в което трептят частиците, може да се изменя с течение на времето, оставайки винаги перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната. Доказва се, че такива напречни вълни могат да се представят като суперпозиция от две линейно поляризирани във взаимно перпендикулярни направления вълни. В този параграф ще се ограничим с разглеждането само на надлъжни вълни и линейно поляризирани напречни плоски хармонични вълни, които се описват с уравнението (76.1).

Вълните, чиито вълнови фронтове са сфери, се наричат *сферични вълни*. Лъчите на разходящите сферични вълни излизат радиално от общия център на концентричните сферични вълнови фронтове, където е разположен източникът на вълните (фиг.76-1б).

Плътност на енергията

При разпространение на вълна еластичната среда се деформира и притежава потенциална енергия на еластичните деформации W_n . Освен това частиците на средата извършват движение (трептене), на което съответства кинетична енергия W_k . Величините обемна плътност на кинетичната енергия w_k и обемна плътност на потенциалната енергия w_n на механичната вълна в произволна точка M от средата се дефинират чрез уравненията

$$(76.2) \quad w_k = \frac{dW_k}{dV}; \quad w_n = \frac{dW_n}{dV},$$

където dW_k и dW_n са съответно кинетичната и потенциалната енергия в безкрайно малък обем dV на средата, в който се намира точка M . Величината

$$(75.3) \quad w = w_k + w_n$$

се нарича *обемна плътност на енергията* на механичната вълна.

Ако в даден момент частиците се движат със скорост v , обемната плътност на кинетичната енергия е

$$(76.4) \quad w_k = \frac{1}{2} \rho v^2,$$

където ρ е механичната плътност на средата. Доказва се, че за плоска хармонична вълна $w_n = w_k$. Скоростта на частиците е равна на първата производна на отклонението y по времето. От уравнение (76.1) получаваме

$$(76.5) \quad v(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx).$$

Заместваме v и w_k от уравнения (76.5) и (76.4) в (76.3) и като отчетем, че $w_n = w_k$, определяме обемната плътност на енергията на плоска хармонична вълна

$$(76.6) \quad w = 2w_k = \rho v^2 = \rho \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Следователно обемната плътност на енергията на вълната w се изменя периодично от $w_{\min} = 0$ до $w_{\max} = \rho \omega^2 A^2$. Нейната средна стойност е

$$(76.7) \quad \bar{w} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2.$$

Уравнение (76.7) изразява средната плътност на енергията на плоска хармонична вълна. При разпространение на вълните става непрекъснато предаване на енергия от източника на заобикалящите го части от средата, които от своя страна предават енергия на по-отдалечените области и т.н. Скоростта, с която се преместват в пространството повърхностите, съответстващи на максимална плътност на енергията, се нарича *скорост на пренасяне на енергията* или *групова скорост на вълната*. За хармоничните вълни груповата скорост съвпада с фазовата скорост, поради което ще използваме само термина *скорост на вълната*. При по-слож-

ни вълнови образowania обаче, които могат да се разглеждат като суперпозиция от хармонични вълни с различни честоти, в зависимост от честотата вълните може да имат различна фазова скорост. Тогава груповата скорост на резултантната вълна е различна от фазовите скорости на съставлящите я хармонични вълни.

Интензитет на вълните

Да разгледаме малък плосък елемент с площ dS , разположен перпендикулярно на посоката на разпространение на плоска хармонична вълна със скорост u (фиг.76-2). За интервал от време dt вълната пренася през елемента dS енергия dW , равна на енергията на вълната в паралелепипед с обем $(udt)dS$:

$$dW = w u d t d S.$$

Енергията, пренесена от вълната за единица време, е

$$(76.8) \quad d\Phi = \frac{dW}{dt} = w u d S.$$

Величината $d\Phi$ се нарича *поток на енергията* през елемента dS . Потокът на енергията $d\Phi$ се изменя с времето по същия периодичен закон (76.6), както обемната плътност на енергията w . Неговата средна стойност

$$(76.9) \quad d\bar{\Phi} = \bar{w} u d S$$

се нарича *среден поток на енергията* през елемента dS . Величината

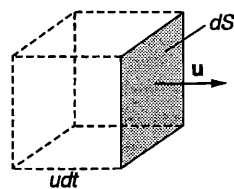
$$(76.10) \quad I = \frac{d\bar{\Phi}}{dS} = \bar{w} u$$

се нарича *интензитет на вълната*. Интензитетът на вълната е равен на средната енергия, която се пренася от вълната за единица време (1s) през плоска повърхност с площ 1 m^2 , разположена перпендикулярно на посоката на разпространение на вълната. Измерва се в единици

$$\frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

(ват на квадратен метър). За плоска хармонична вълна

Фиг.76-2.



от уравнения (76.7) и (76.10) се получава

$$(76.11) \quad I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2.$$

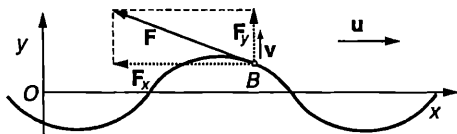
Следователно интензитетът е право-пропорционален на квадрата на амплитудата на вълната ($I \propto A^2$).

Пример 76.1. По дълга опъната струна се разпространява бягаща хармонична вълна $y = A \sin(\omega t - kx)$. Силата на опъване на струната е T_0 , масата на единица дължина от струната е δ_0 . Определете механичната мощност P , пренасяна от вълната.

Решение. Разглеждаме движението на произволна точка B от струната с координата x . Да означим с v скоростта на точка B , а с F – силата, с която частта от струната, разположена вляво от точка B , действа на частта от струната, намираща се вдясно от точка B (фиг. 76-3). Мощността P , която лявата част от струната предава на дясната част, е $P = F \cdot v = F_y v$. Изразяваме компонентата F_y на силата чрез полученото в пример 75.1 (на стр.139) съотно-

шение $F_y = \frac{v}{u} T_0$ и получаваме

$$P = \frac{T_0}{u} v^2 = \frac{T_0}{\delta_0} \frac{\delta_0}{u} v^2 = u \delta_0 v^2,$$



Фиг.76-3.

където сме използвали формулата $u = \sqrt{\frac{T_0}{\delta_0}}$ за скоростта u на вълната. Скоростта на точка B е

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx).$$

Заместяваме скоростта v във формулата за мощността:

$$P = u \delta_0 \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t - kx).$$

Средната мощност, която се пренася от вълната, е

$$\bar{P} = \frac{1}{2} u \delta_0 \omega^2 A^2.$$

Интензитет и амплитуда на сферична вълна

При плоските вълни за еднакви интервали от време във вълновото движение се въвличат равни по големина обеми от средата. Затова амплитудата и интензитетът на плоските вълни навсякъде са еднакви. За сферичните вълни обемът на средата, обхванат за единица време от вълната, непрекъснато нараства, когато вълната се отдалечава от източника. Тъй като източникът има постоянна мощност, т.е. за единица време предава постоянна по големина енергия на средата, от закона за запазване на енергията следва, че интензитетът и амплитудата на вълната намаляват при отдалечаване от източника на сферични вълни. Да разгледаме две концентрични сферични повърхности с радиуси r_0 и r , в центъра на които се намира точковият източник S . Поради сферичната симетрия интензитетът $I(r)$ може да зависи само от разстоянието r до източника. Средният поток на енергията през двете повърхности е равен на произведението от площта на сферите и интензитета I на вълната:

$$\Phi_0 = 4\pi r_0^2 I(r_0); \quad \Phi = 4\pi r^2 I(r).$$

Когато вълните не се поглъщат от средата, от закона за запазване на енергията следва, че двата потока са равни, откъдето

$$(76.12) \quad I(r) = \frac{r_0^2 I(r_0)}{r^2} = \frac{C}{r^2}.$$

Следователно интензитетът на сферичната вълна намалява обратно пропорционално на квадрата на разстоянието r до източника. Константата $C = r_0^2 I(r_0)$ може да се определи, като се измери интензитетът на вълната на някакво разстояние r_0 (например 1 m) от източника. Тъй като $I \propto A^2$, амплитудата A на сферичната вълна намалява обратно пропорционално на разстоянието r до източника:

$$(76.12) \quad A(r) = \frac{C_1}{r},$$

където константата $C_1 = r_0 A(r_0)$ може да се определи, ако е известна амплитудата на вълната на някакво разстояние r_0 от източника.

77. Стоящи вълни

Характеристики на стоящите вълни

Дотук разглеждахме разпространението на вълни в неограничена среда. Ако средата е ограничена, на границите се наблюдават явленията отражение и пречупване на вълни. На тези явления ще се спрем по-подробно при изучаването на светлинните вълни. Тук ще разглеждаме само случая, когато вълната пада перпендикулярно и изцяло се отразява от границата, след което се разпространява в противоположната посока. Нека плоска хармонична вълна

$$(77.1) \quad y_1 = A_0 \sin(\omega t - kx + \varphi_{01}),$$

която се разпространява по посока на оста x , се отразява от границата и след отражението се разпространява в противоположната посока (по оста $-x$). Отразената вълна има същата амплитуда A_0 и кръгова честота ω и се изразява с уравнението

$$(77.2) \quad y_2 = A_0 \sin(\omega t + kx + \varphi_{02}).$$

В общия случай началната фаза φ_{02} на отразената вълна е различна от началната фаза φ_{01} на падащата вълна.

За механичните вълни, както при трептенията (вж. §72), е в сила принципът на суперпозицията. Когато в една област се разпространяват едновременно две или повече вълни, всяка частица от средата извършва независими едно от друго отклонения от равновесното си положение, които съответстват на дадените вълни. Резултантното отклонение на частицата е векторна сума от тези отклонения. Ще отбележим, че принципът на суперпозицията се нарушава, когато едновременно се разпространяват вълни с голям интензитет, при което деформациите на средата престават да бъдат линейни, т.е. резултантната деформация не е сума от деформациите, предизвикани от отделните вълни.

Следователно при суперпозицията на падащата и отразената вълна общото отклонение на частиците от равновесното им положение се описва с функцията

$$(77.3) \quad y = y_1 + y_2 =$$

$$= 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right),$$

където сме заместили y_1 и y_2 от уравнения (77.1) и (77.2) и сме използвали тригонометричната формула за сума на два синуса (вж. част 1, (А.44) на стр.234).

Вълните, които се описват с уравнение (77.3), се наричат *стоящи вълни*. Функцията

$$(77.4) \quad f(x) = 2A_0 \cos\left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right)$$

определя формата на стоящата вълна. Нейният модул

$$(77.5) \quad |f(x)| = 2A_0 \left| \cos\left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) \right|$$

е равен на амплитудата, с която трептят различните точки от средата. На *фиг.77-1* е показана стояща вълна в три различни момента от времето. Моментът $t = t_1$ е избран така, че $\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right) = 0$. Тога-

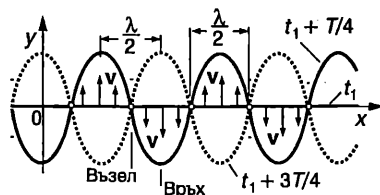
ва отклонението за всички частици е $y = 0$, т.е. в този момент всички частици едновременно преминават през равновесното си положение. В момента $t = t_1 + T/4$, където T е периодът на трептене,

$$\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right) = 1.$$

В този момент всички частици едновременно са достигнали максималното си отклонение от равновесното положение, което е равно на $y_{\max} = f(x)$. В момента $t = t_1 + 3T/4$, когато

$$\sin\left(\omega t + \frac{\varphi_{02} + \varphi_{01}}{2}\right) = -1,$$

Фиг.77-1.



отклонението отново е максимално, но е в противоположната посока, т.е. $y_{\max} = -f(x)$.

Съгласно с уравнение (77.5) амплитудата на трептене на частиците зависи от тяхната координата x . Точките, за които

$$\left| \cos \left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2} \right) \right| = 1,$$

трептят с максимална амплитуда, равна на $2A_0$. Точките, в които амплитудата на трептене е максимална, се наричат *върхове* на стоящата вълна. Точките, за които

$$\left| \cos \left(kx + \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2} \right) \right| = 0$$

се наричат *възли* на стоящата вълна. Частиците, намиращи се във възлите, през цялото време остават неподвижни. Разстоянието между два съседни възела (или върха) на стоящата вълна е равно на половин дължина на вълната ($\lambda/2$). Положението на върховете и на възлите не се изменя с течение на времето, поради което вълната се нарича стояща. Всички частици, разположени между два съседни възела, трептят с еднаква фаза. Частиците, разположени от двете страни на даден възел, трептят в противофаза.

Стоящите вълни не пренасят енергия. Действително, те могат да се разглеждат като суперпозиция на две бягащи вълни с еднакви кръгови честоти и амплитуди, които се разпространяват в противоположни посоки. Енергията, която се пренася от едната вълна, се връща обратно от другата вълна. Затова общият поток на енергията е равен на нула.

И така, между бягащите вълни и стоящите вълни има някои съществени различия. При разпространение на плоска бягаща хармонична вълна всички частици извършват хармонично трептене с еднаква амплитуда, но с различна фаза, като всяка следваща частица, до която достига вълната, изостава по фаза от предишната частица. При стоящата вълна всички частици трептят във фаза (или в противофаза), като едновременно достигат максималното си отклонение и едновременно преминават през равновесното си положение.

Собствени трептения на опъната струна с два неподвижно закрепени края

На *фиг.77-2а* е показана опъната струна с дължина L , двата края на която са закрепени в неподвижна опора. Такава струна представлява ограничена среда, в която могат да се възбудят стоящи вълни. В общото уравнение (77.3) на хармонична стояща вълна не са отчетени конкретни гранични условия, които трябва да удовлетвори вълната. Тъй като в случая двата края A и B на струната са неподвижно закрепени, то по нея могат да се създадат само такива стоящи вълни, които да имат възли в точките A и B . Стояща вълна с максимална дължина се получава, когато точките A и B са два съседни възела (*фиг.77-2б*). Тогава

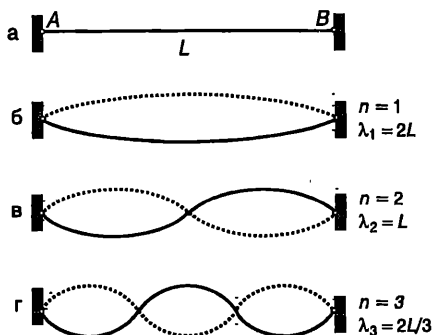
$$\frac{\lambda_1}{2} = L; \quad \lambda_1 = 2L$$

Възможно е между възлите A и B да има и други възли. В зависимост от техния брой върху струната ще се нанасят $n = 1, 2, 3$ и т.н. полуълни (*фиг.77-2в,г*). Следователно дължините λ_n на стоящите вълни, които могат да се възбудят в струната, са свързани с нейната дължина L със съотношението

$$(77.6) \quad n \frac{\lambda_n}{2} = L \quad \text{или} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

Същият резултат следва и от общото уравнение (77.3) на хармонична стояща вълна, като се отчетат граничните условия. Граничното условие точка A с координата $x = 0$ да бъде неподвижна е $y = 0$ при $x = 0$. Тогава от уравнение (77.3) се получава

Фиг.77-2. Стоящи вълни по опъната струна.



$$\cos\left(\frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2}\right) = 0; \quad \frac{\varphi_{02} - \varphi_{01}}{2} = \pm \frac{\pi}{2};$$

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} \pm \pi.$$

След заместване на φ_{02} уравнение (77.3) получава вида

$$(77.7) \quad y = 2A_0 \sin kx \cos(\omega t + \varphi_{01}).$$

Да отчетем и второто гранично условие в точка B: $y = 0$ при $x = L$. Това условие се изпълнява, ако $\sin kL = 0$, т.е. при

$$kL = \frac{2\pi}{\lambda_n} L = n\pi; \quad \lambda_n = \frac{2L}{n},$$

където $n = 1, 2, 3, \dots$ е цяло число.

Честотите на стоящите вълни са

$$(77.8) \quad \nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{2L} n; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

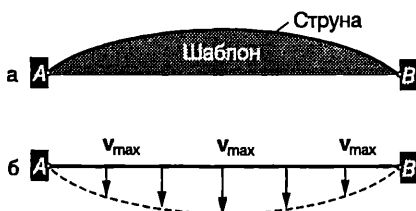
където u е скоростта на вълните по струната. Най-ниската честотата $\nu_1 = \frac{u}{2L}$ се нарича *основна честота*. Честотите $\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, $\nu_4 = 4\nu_1$ и т.н., които са целочислено кратни на основната честота, се наричат *хармонични честоти*.

Поддържането на стояща вълна в идеално еластична среда не изисква непрекъснато внасяне на енергия, т.е. не е необходим източник на вълни. Например стояща вълна с честота ν_1 може да се възбуди, ако с помощта на шаблон на струната се придаде форма на синусоида (фиг.77-3а). След отстраняване на шаблона всички частици от струната започват да трептят с еднаква честота ν_1 , като едновременно преминават през равновесното си положение. Механичната енергия на трептене се запазва, като става непрекъснато преобразуване на потенциалната енергия в кинетична енергия и обратно. Потенциалната енергия е максимална,

когато частиците са неподвижни, а струната е максимално деформирана. След това тя започва да се преобразува в кинетична енергия. Кинетичната енергия достига максималната си стойност, когато струната не е огъната, а всяка частица е достигнала максималната си скорост, с която преминава през равновесното си положение (фиг.77-3б). Такова движение на струната се нарича *собствено трептене*. То е аналогично на собствените хармонични трептения, разгледани в §70. Трептящите системи с една степен на свобода (пружинно махало, математично махало и др.) се характеризират само с една собствена честота на трептене. Доказва се, че когато трептящата система има повече движещи се елементи, броят на собствените честоти е равен на броя на степените на свобода на системата. Струната, за която използваме модела на непрекъснатата еластична материална среда, има безкраен брой частици и безброй степени на свобода. Следователно тя има безкраен брой собствени честоти на трептене, които се изразяват с уравнение (77.8), където цялото число n може да се изменя от 1 до безкрайност. Ще отбележим, че разглеждането на струната като непрекъсната среда е една идеализация. В действителност тя има голям, но все пак краен брой частици (атоми и молекули), поради което броят на собствените честоти също е ограничен. Тъй като на практика, например в акустиката, интерес представляват само собствените трептения с ниски честоти (първите 20 – 30 хармонични), то за тях с много добро приближение струната може да се разглежда като непрекъсната среда и собствените ѝ трептения да се описват със стоящи вълни от вида (77.7).

Собствените честоти на струната образуват хармоничен ред, в който честотите на висшите хармонични са целочислено кратни на основната честота, само ако струната е идеално еднородна и еластична. За нееднородна струна, както и за повечето реални физични системи, функцията $f(x)$, задаваща формата на собствените трептения (стоящи вълни), не е синусоида и собствените честоти не образуват хармоничен ред.

Фиг.77-3.



Отделни собствени трептения могат да се възбудят само при специални условия. Обикновено в резултат на външно въздействие възникват едновременно голям брой собствени трептения и частиците на трептящата система извършват сложно движение, което е суперпозиция от собствени трептения с различни честоти и амплитуди. Тогава уравнението на движението на идеално еластична еднородна струна е

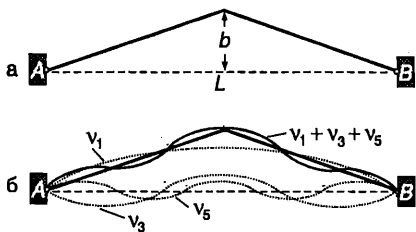
$$(77.9) \quad y(x, t) = \sum 2A_n \sin(kx) \cos(\omega_n t + \varphi_{0n}).$$

Максималните амплитуди $2A_n$ и началните фази φ_{0n} на различните собствени трептения зависят от формата на струната и от скоростите на отделните ѝ части в началния момент от времето. Например, ако се изтегли центърът на струната, както е показано на *фиг.77-4а*, след което се освободи, в струната ще възникнат цял набор от собствени трептения. Математичният анализ, който тук няма да провеждаме, показва, че амплитудите и началните фази на първите пет собствени трептения са

$$A_1 = \frac{8b}{\pi^2}, \quad \varphi_{01} = \varphi_{05} = 0; \quad A_2 = A_4 = 0;$$

$$A_3 = 0,111A_1, \quad \varphi_3 = \pi; \quad A_5 = 0,040A_1.$$

На *фиг.77-4б* с пунктир са показани отделно собствените трептения с $n = 1, 3$ и 5 , а с пълна линия е представена тяхната сума. За да се опише съвсем точно началната форма на струната, както и положението ѝ в произволен момент от времето, необходимо е да се отчетат и собствените трептения с по-високи честоти.



Фиг.77-4.

Пример 77.1. Стоманена струна на пиано има дължина $L = 40$ см и маса $m = 2$ г. Силата на опъване на струната е $T_0 = 600$ N.

а) Определете основната честота ν_1 на струната.

б) Коя е най-високата хармонична често-

та, която може да чуе слушател, чието ухо е чувствително до честоти $16\,000$ Hz?

Решение. Основната честота на струната е $\nu_1 = u/2L$. Скоростта на механичните вълни по

опъната струна е $u = \sqrt{\frac{T_0}{\delta_0}}$. Линейната плътност

на струната е $\delta_0 = m/L$. Следователно:

$$\nu_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_0}{Lm}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{600 \text{ N}}{(0,40 \text{ m})(0,002 \text{ kg})}} = 433 \text{ Hz}.$$

б) Най-високата хармонична, към която ухото на слушателя е все още чувствително, е

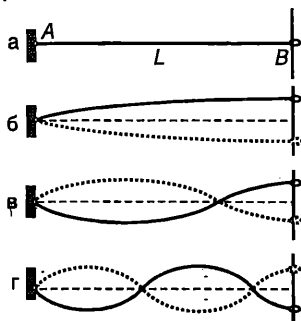
$$n = \frac{\nu_n}{\nu_1} = \frac{16\,000 \text{ Hz}}{433 \text{ Hz}} \approx 37.$$

Собствени трептения на опъната струна при други гранични условия

Собствените честоти на трептене на една механична система зависят от граничните условия, при които тя се намира. Например на *фиг.77-5а* е показана опъната струна, която се намира при други гранични условия: единият ѝ край е закрепен, а другият край е свободен – той е свързан към пръстен с пренебрежимо малка маса, който може да се хлъзга без триене по вертикална пръчка. В този случай стоящите вълни, които могат да се създадат върху струната, имат възел в неподвижния край и връх в свободния край. Стоящата вълна с максимална дължина на вълната е показана на *фиг.77-5б*. Върху струната се насяа $1/4$ дължина на вълната, т.е. $\lambda_1 = 4L$.

В общия случай върху струната се насяат цяло число полуълни плюс една четвърт вълна до свободния край (*фиг.77-5в,г*).

Фиг.77-5.



Следователно дължините на стоящите вълни, които удовлетворяват граничното условие за възел в закрепения край на струната и връх в свободния край, са

$$(77.10) \quad \lambda_n = \frac{4L}{2n-1}, \text{ където } n = 1, 2, 3, \dots$$

Собствените честоти на трептене на струната са

$$(77.11) \quad \nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{u}{4L} (2n-1).$$

При два свободни края на струната наборът от собствени честоти на трептене е същият, както при струна с два неподвижно закрепени края, само че в краищата на струната стоящите вълни имат върхове, т.е. краищата трептят с максимални амплитуди.

Резонанс

Стоящи вълни могат да се получат не само при възбуждане на собствени трептения в ограничена еластична среда, но също така и под действие на периодична външна сила. На *фиг.77-6* е показана опъната струна с дължина L , единият край на която е закрепен неподвижно, а другият край е прикрепен към трептящ камертон. Свързаният с камертона край на струната извършва принудено трептене

$$(77.12) \quad y(L, t) = a \sin \omega t,$$

където a и ω са съответно амплитудата и кръговата честота на трептене на камертона. Камертонът е източник на вълни, които се разпространяват по струната, отразяват се от неподвижния край B , след това се отразяват от края A , свързан към камертона, и т.н. В резултат на суперпозицията на падащите и отразените вълни върху струната се получава стояща вълна от вида (77.3). Стоящата вълна трябва да има възел в точка B , която през цялото време остава неподвижна. Отчитането на това гранично условие, аналогично на случая на струна с два закрепени края,

води до уравнение (77.7) на стоящата вълна. Второто гранично условие е $y = a \sin \omega t$ при $x = L$. Заместваме x и y в уравнение (77.7) и получаваме

$$a \sin \omega t = 2A_0 \sin(kL) \cos(\omega t + \varphi_{01}).$$

За да се удовлетворява това уравнение във всеки момент от време t , трябва да са в сила съотношенията

$$\varphi_{01} = -\frac{\pi}{2}; \quad A_0 = \frac{a}{2|\sin kL|},$$

където вълновото число $k = \omega/u$ зависи от кръговата честота ω , с която трепти камертонът. Максималната амплитуда на трептене на частиците от струната е

$$(77.13) \quad |y_{\max}| = 2A_0 = \left| \frac{a}{\sin kL} \right|.$$

Когато $|\sin kL| = 0$, т.е. при $k_n L =$

$2\pi \nu_n L / u = n\pi$ или $\nu_n = \frac{u}{2L} n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), амплитудата на трептене става безкрайно голяма. Честотите ν_n съвпадат със собствените честоти на трептене на опъната струна с два неподвижно закрепени края. В действителност, поради неизбежните загуби на енергия, трептенията винаги се извършват с крайни по големина амплитуди.

Явлението, при което амплитудите на принудените трептения в ограничена еластична среда рязко нарастват, когато честотата на външната сила стане равна на някоя от собствените честоти на трептене, се нарича *резонанс*. Собствените честоти на трептене се наричат още *резонансни честоти*. За разлика от простите трептящи системи с една степен на свобода, които имат само една резонансна честота, механичните системи с голям брой движещи се елементи имат цял набор от резонансни честоти. За поддържане на резонансни трептения с големи амплитуди източникът внася непрекъснато енергия в трептящата система, която компенсира загубите на енергия поради съпротивлението и триенето в системата, както и топлинните загуби, когато деформациите на средата не са абсолютно еластични.

Фиг.77-6.



78. Звукови вълни

Човешкото ухо възприема като звук механичните вълни, чиято честота лежи в интервала от 16 Hz до 20 000 Hz, наречен *диапазон на чуване*. В зависимост от индивидуалните особености на човека се наблюдават различни отклонения от диапазона на чуване, който е определен за едно средностатистическо или стандартно ухо. Обща тенденция е с напредване на възрастта хората все по-трудно да чуват високите честоти.

Звукови вълни се разпространяват в газове, течности и твърди тела. В този и в следващия параграф обаче ще се ограничим с разглеждането само на звукови вълни в газове, тъй като те се използват от хората и повечето животни на сушата за обмен на информация. Освен това чрез възприемането на звуковите сигнали, разпространяващи се във въздуха, животните и хората реагират на източника на звука, могат да определят неговото положение и да вземат предпазни мерки, ако той представлява заплаха за тях.

Скорост на звука в газове

При разпространение на звукова вълна в газ се извършват еластични деформации на свиване и разширяване на газа, които се характеризират с модула на обемна еластичност K (вж. част 1, стр.116, §21):

$$(78.1) \quad dp = -K \frac{dV}{V},$$

където dp е изменението на налягането, породено от изменението dV на обема, dV/V е относителното изменение на обема. Знакът минус показва, че когато обемът намалява ($dV < 0$), налягането нараства ($dp > 0$) и обратно. Еластичният модул K зависи от вида на термодинамичния процес, който протича при свиване и разширяване на газа. Възможни са два гранични случая. Първият е, когато налягането се изменя много бавно. Тогава областите от газа, които се свиват, предават топлина на съседните области, които се разширяват. Така в резултат на топлообмена температурата на газа се поддържа посто-

янна и процесите са изотермни. Поради ниската топлопроводност на газовете обаче, топлообменът при тях се извършва бавно. Скоростта, с която се изменя налягането за механичните вълни от диапазона на чуване, е много по-голяма от скоростта на топлообмен. Затова между съседните области на свиване и разширяване на газа практически няма топлообмен и се реализира вторият граничен случай, когато процесите са адиабатни. При разпространение на звукова вълна се извършва адиабатно свиване и разширяване на газа. От уравнението на адиабатния процес с идеален газ (вж. част 1, уравнение (31.13) на стр.172)

$$\gamma p dV + V dp = 0$$

и уравнение (78.1) определяме модула на обемна еластичност K :

$$(78.2) \quad K = \gamma p,$$

където γ е коефициентът на Поасон, а p – налягането на газа.

Скоростта u на звука се изразява с формула (75.8) от стр.138, където за механични вълни в газ еластичните свойства на средата се характеризират с модула на обемна еластичност K , а инертността – с плътността ρ на газа:

$$(78.3) \quad u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}.$$

Това уравнение е получено за пръв път от Лаплас и е известно като *формула на Лаплас* за скоростта на звука в газове.

Пример 78.1. Пресметнете скоростта на звука във въздуха при температура 27 °C. Въздухът да се разглежда като идеален газ с моларна маса $M = 0,029 \text{ kg/mol}$ и коефициент на Поасон $\gamma = 1,4$.

Решение. От уравнението за състоянието на идеалния газ $pV = \frac{m}{M} RT$ изразяваме налягането

то $p = \frac{\rho}{M} RT$, където $\rho = m/V$ е плътността на въздуха, и го заместваме в уравнение (78.3):

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} = \sqrt{\frac{1,4(8,3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)})(300 \text{ K})}{0,029 \text{ kg/mol}}} = 347 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Полученият резултат показва, че скоростта на звука нараства при повишаване на температурата T на въздуха.

За плоска хармонична звукова вълна скоростта v на частиците е

$$v = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(\omega t - kx) = \omega A \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}).$$

Налигането на звука е

$$(78.7) \quad p_{\text{зв}}(x, t) = \rho u v = \rho u \omega A \sin(\omega t - kx + \frac{\pi}{2}).$$

Най-често звуковите вълни се описват чрез отклонението на частиците от равновесните им положения (вълна на отклонението) или чрез звуковото налягане (вълна на налягането). За плоска хармонична звукова вълна отклонението $y(x, t)$ и звуковото налягане $p_{\text{зв}}(x, t)$ се изменят по синусовите закони (76.1) и (78.7). Както при хармоничното трептене, където скоростта изпреварва по фаза отклонението с $\pi/2$, звуковото налягане също изпреварва по фаза отклонението с $\pi/2$. Това означава, че във всяка точка максимумите на звуковото налягане настъпват с $1/4$ от периода по-рано от максимумите на отклонението.

От уравнение (78.7) следва, че максималната стойност (амплитудата) на звуковото налягане е

$$(78.8) \quad p_{\text{зв}}^{\text{max}} = \rho u \omega A.$$

За да получим връзката между амплитудата на звуковото налягане и интензитета $I = \frac{1}{2} \rho u \omega^2 A^2$ на звука (вж. формула (76.11)), вдигаме на квадрат двете страни на уравнение (78.8):

$$(78.9) \quad (p_{\text{зв}}^{\text{max}})^2 = 2 \rho u \left(\frac{\rho u \omega^2 A^2}{2} \right) = 2 \rho u I.$$

Следователно интензитетът на звука е пропорционален на квадрата на амплитудата на звуковото налягане:

$$(78.10) \quad I = \frac{1}{2 \rho u} (p_{\text{зв}}^{\text{max}})^2.$$

Пример 78.2. Звук с честота 1000 Hz и интензитет 1 W/m^2 предизвиква болезнено усещане в човешкото ухо. Пресметнете максималното налягане на звука и го сравнете с хидростатичното налягане.

Звуково налягане

Газовите винаги се намират при определено налягане. Например за въздуха това е атмосферното налягане $p_0 \approx 10^5 \text{ Pa}$. Звуково налягане $p_{\text{зв}}$ се нарича само допълнителното налягане, което възниква при разпространение на звукова вълна, т.е. звуковото налягане е равно на изменението dp на налягането на газа, предизвикано от звуковата вълна. Във формула (78.1) полагаме $dp = p_{\text{зв}}$ и получаваме

$$(78.4) \quad p_{\text{зв}} = -K \frac{dV}{V} = -\rho u^2 \frac{dV}{V},$$

където сме заместили еластичния модул K от формула (78.3) за скоростта на звука.

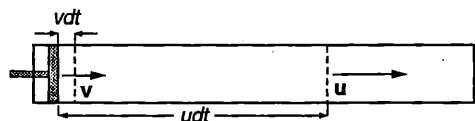
За да определим отношението dV/V , ще разгледаме следния модел: газ запълва обема на дълъг цилиндър с подвижно бутало с площ S (фиг. 78-1). В даден момент буталото започва да се движи със скорост v . За малък интервал от време dt то се придвижва на разстояние vdt и обемът на газа се изменя с $dV = -Svdt$. Знакът минус показва, че обемът на газа намалява. Деформацията на свиване на газа се разпространява със скоростта на звука u и за време dt обхваща обем $V = Sudt$. Относителното изменение на този обем в резултат на свиването е

$$(78.5) \quad \frac{dV}{V} = -\frac{Svdt}{Sudt} = -\frac{v}{u}.$$

Съотношението (78.5) остава в сила и в общия случай на разпространение на звукови вълни. То изразява връзката между скоростта v на частиците от дадена област, скоростта u на звука и относителното изменение на обема dV/V на тази област. Заместваме dV/V от уравнение (78.5) в (78.4) и за звуковото налягане получаваме

$$(78.6) \quad p_{\text{зв}} = \rho u v.$$

Фиг. 78.1.



тичното налягане на дълбочина $h = 5 \text{ m}$ под водата. При гмуркане на такава дълбочина също се появяват болки в ушите. Имат ли двете усещания за болка една и съща природа?

Плътността на въздуха е $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$, плътността на водата е $\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3$, скоростта на звука във въздуха е $u = 340 \text{ m/s}$.

Решение. От уравнение (78.9) определяме максималното звуково налягане

$$p_{\text{зв}}^{\text{max}} = \sqrt{2\rho u I} = 30 \text{ Pa}.$$

Хидростатичното налягане е

$$p_x = \rho g h = 50\,000 \text{ Pa} = p_0/2,$$

където p_0 е атмосферното налягане. Полученият резултат показва, че амплитудата на звуковото налягане е повече от 1000 пъти по-малка от хидростатичното налягане. Следователно двете усещания за болка имат различна природа. Тъпанчето на ухо е в състояние да понесе значително постоянно допълнително налягане, докато променливо налягане със сравнително малка амплитуда води до болезнени усещания и може да предизвика увреждане на слуха.

Ниво на интензитета и ниво на гръмкостта

Човешкото ухо е чувствително към звукови вълни, чийто интензитет може да се изменя в много широки граници. Например хармонична звукова вълна с честота 1000 Hz се възприема от стандартното ухо като звук, ако интензитетът ѝ е в интервала от $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ до $I_{\text{max}} = 1 \text{ W/m}^2$. Интензитетът I_0 определя *долния праг на чуване*. Ухото не е чувствително към звукове с по-малък интензитет. Горната граница I_{max} се нарича *праг на болката* или *горен праг на чуване*. Ако интензитетът на вълната е по-голям от I_{max} , усещането за звук преминава в усещане за болка.

Величината

$$(78.11) \quad \beta = 10 \lg \frac{I}{I_0}$$

се нарича *ниво на интензитета*. Измерва се в *децибели* (dB). Звук с интензитет $I = 10I_0$ има ниво на интензитета $\beta = 10 \text{ dB}$. Ако интензитетът на звука нарасне 10 пъти, нивото на интензитета се увеличава с 10 dB . Когато I нарасне 100 пъти, β се увеличава с 20 dB , при нарастване на I 1000 пъти, β се увеличава с 30 dB и т.н. На

прага на болката $I_{\text{max}} = 10^{12} I_0$ съответства ниво на интензитета $\beta_{\text{max}} = 120 \text{ dB}$.

Ще отбележим, че една от причините да се използва логаритмична скала за сравняване интензитетите на звуковете е огромният обхват на ухото – то долавя звукове, чиито интензитети могат да се различават 10^{12} пъти. Другата причина е свързана с начина на възприемане на звука. Ако интензитетът на звука при дадена честота (за стандартна се приема честотата 1000 Hz) расте в геометрична прогресия, усещането за сила на звука расте в аритметична прогресия. Такава връзка между силата на усещането и силата на дразненето съществува и при други сетивни органи. Във физиологията тя е известна като *психофизичен закон* на Вебер – Фехнер и се изразява със зависимости, подобни на уравнение (78.11).

В табл. 78.1. са представени стойности за нивото на интензитета на някои характерни звукове от всекидневието.

Ще подчертаем, че величината ниво на интензитета е еднозначно свързана с интензитета на звука чрез уравнение (78.11) и не зависи от това как ухото възприема звука. Единствената връзка с възприемането на звука е константата I_0 , която е подбрана да съответства на прага на чуване за стандартното ухо при честота 1000 Hz . Същата стойност на I_0 обаче се използва и при пресмятане нивото на интензитета за произволна честота на звука, за която постоянният интензитет I_0 вече не съответства на прага на чуване.

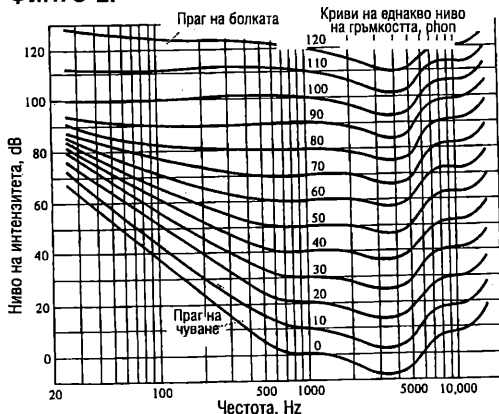
Таблица 78.1. Ниво на интензитета на звука от някои характерни източници.

Източник	Ниво на интензитета (dB)
Голям оркестър (максимум)	100
Тъпан (максимум)	95
Тромпет (максимум)	75
Оживена улица	70
Кларнет (максимум)	67
Обикновен разговор	65
Тиха музика	40
Шепот	20

Субективната преценка на ухото за сила на звука, т.е. способността му да различава и сравнява звуковете по това колко тихи или гръмки са те, се характеризира с величината *ниво на гръмкостта*. За хармоничните звукови вълни нивото на гръмкостта зависи не само от интензитета, но и от честотата на звука. Единицата за ниво на гръмкостта се нарича *фон* (phon). По определение нивото на гръмкостта на звук с честота 1000 Hz, измерено във фонове, е числено равно на нивото на интензитета на същия звук, измерено в децибели. Например на ниво на интензитета 10 dB при честота 1000 Hz съответства ниво на гръмкостта 10 phon. За звук с честота, към която ухото е по-чувствително, отколкото към 1000 Hz, нивото на гръмкостта във фонове е по-високо от нивото на интензитета в децибели. Обратно, за честоти, към които ухото е по-слабо чувствително, нивото на гръмкостта е по-ниско от нивото на интензитета.

На *фиг.78-2* са показани приетите като международен стандарт криви на еднакво ниво на гръмкостта за хармонични звукове. С тяхна помощ се определя нивото на гръмкостта, ако са известни честотата и нивото на интензитета. Най-долната крива, съответстваща на ниво на гръмкостта 0 phon, изразява зависимостта на долния праг на чуване от честотата. Прави впечатление, че зависимостта на чувствителността на ухото от честотата е най-силно изразена при слабите звукове. За звукове с ниво на интензитета, близко до прага на болката, честотната зависимост на усещането за сила на звука е значително по-слаба.

Фиг.78-2.



Пример 78.3. Честотата на хармонична звукова вълна се изменя от 20 Hz до 10 000 Hz при постоянно ниво на интензитета 40 dB. Като използвате кривите на еднакво ниво на гръмкостта от *фиг.78-2*, определете кои честоти ще чува едно стандартно ухо. Как ще се изменя нивото на гръмкостта?

Решение. От *фиг.78-2* определяме, че звук с честота 90 Hz и ниво на интензитета 40 dB се намира на прага на чуване, т.е. неговото ниво на гръмкостта е 0 phon. Звуковете с честоти от 20 Hz до 90 Hz се намират под прага на чуване и не се долавят от ухото. При увеличаване на честотата над 90 Hz нивото на гръмкостта расте. То е 10 phon при $\nu \approx 110$ Hz и 20 phon при $\nu \approx 200$ Hz. При честота 1000 Hz по определение нивото на гръмкостта във фонове съвпада с нивото на интензитета в децибели, т.е. в случая то е 40 phon. В областта от 1000 Hz до 5000 Hz, където ухото е най-чувствително, нивото на гръмкостта е максимално, малко по-високо от 40 phon. След това нивото на гръмкостта започва да намалява и при 10 000 Hz е около 30 phon.

Задачи

1. Пресметнете скоростта на звука в хелий при стайна температура ($T = 300$ K). Хелият е едноатомен газ с моларна маса $M = 0,004$ kg/mol.

В задачи 2, 3 и 4 използвайте следните данни: скорост на звука във въздуха $u = 340$ m/s; плътност на въздуха $\rho = 1,2$ kg/m³.

2. Максималното звуково налягане на плоска хармонична звукова вълна с честота $\nu = 1000$ Hz е 10 Pa. В дадена точка M звуковото налягане е максимално в момента $t = 0$.

а) Колко е отклонението на частиците в тази точка в момента $t = 0$?

б) Колко е амплитудата на отклонението на частиците от равновесните им положения за тази вълна?

3. Амплитудата на отклонението на звукова вълна с честота 300 Hz е $5 \cdot 10^{-7}$ m. Колко е амплитудата на звуковото налягане на тази вълна?

4. Определете амплитудата на звукова вълна с интензитет $I_0 = 1 \cdot 10^{-12}$ W/m² (долен праг на чуване) и честота $\nu = 1000$ Hz.

5. Определете нивото на интензитета на звук с интензитет: а) $1 \cdot 10^{-8}$ W/m²; б) 100 W/m².

6. Колко пъти ще се намали акустичната мощност (интензитетът) на шума в цех за производство на ламарина, ако нивото на интензитета на шума се намали от 90 dB на 70 dB?

79. Източници и приемници на звук

Стоящи звукови вълни

Когато въздушна среда се намира при определени гранични условия, например запълва съд с даден обем и форма на стените, в нея могат да се възбудят стоящи вълни. Обемът въздух се характеризира с набор от собствени честоти на трептене, които зависят от формата и размерите на съда. В общия случай собствените честоти не образуват хармоничен ред и определянето им е сложна задача. Най-прост за анализ и с голямо практическо значение е случаят, когато въздухът запълва дълга цилиндрична тръба. Ако диаметърът на тръбата е малък в сравнение с дължината на вълната, може с приближение да се приеме, че в направление на оста на тръбата се разпространяват едномерни хармонични вълни, подобни на тези по опъната струна. Тогава трябва само да определим граничните условия за въздушния стълб и да повторим направените в §77 изводи за собствените честоти на трептене на струна.

Ако двата края на тръбата са затворени, прилепващият към дъната на цилиндъра въздух не се движи и в краищата на тръбата се получават възли на стоящата вълна на отклонението. Случаят е аналогичен на опъната струна с два неподвижно закрепени края (fig.77-2 на стр.144). Собствените честоти на трептене на въздушния стълб се изразяват с уравнение (77.8) на стр.145, където u е скоростта на звука във въздуха, а L – дължината на тръ-

бата. Когато единият край на тръбата е отворен, стоящата вълна на отклонението има връх около отворения край и възел при затворения край на тръбата. Спектърът на собствените трептения на въздушния стълб е същият, както за струна с един закрепен и един свободен край (fig.77-5 на стр.146), а собствените честоти се изразяват с уравнение (77.11) на стр.147.

Стоящата вълна на отклонението има върхове близо до двата края на тръбата, когато те са отворени. По дължината на въздушния стълб се нанасят цяло число полуълни (fig.79-1a) и собствените честоти на трептене се изразяват с уравнение (77.8), както за тръба с два затворени края.

Ще припомним, че звуковото налягане е отместено по фаза от отклонението с $\pi/2$, т.е. в точките, където отклонението на частиците от равновесното им положение е нула, звуковото налягане е максимално и обратно. Следователно възлите на стоящата вълна на налягането съвпадат с върховете на стоящата вълна на отклонението, а върховете на стоящата вълна на налягането са на местата, където стоящата вълна на отклонението има възли. На fig.79-1 схематично са показани стоящите вълни на отклонението (a) и на налягането (б), съответстващи на основната и на втората хармонична честота за въздушния стълб в тръба с два отворени края.

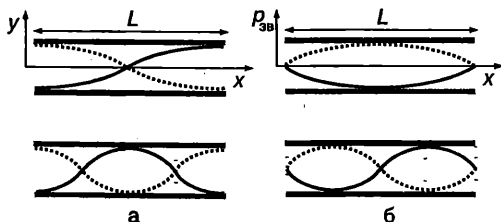
По-прецизният анализ показва, че върховете на стоящата вълна на отклонението са разположени малко извън отворените краища на тръбата, на разстояние от порядъка на радиуса на тръбата.

Музикални инструменти

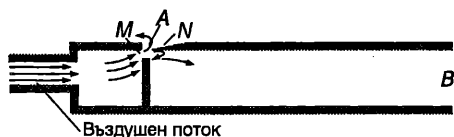
Явлението резонанс, на което се спряхме при изучаването на принудените трептения по опъната струна, се използва за формиране и усиляване на звука от различни източници – духови и струнни музикални инструменти и др.

Като пример за духов инструмент ще разгледаме тръба на орган. Въздушният поток преминава през специален отвор M (fig.79-2), при което от острието N , разположено срещу отвора M , се откъсват вихри и се възбуждат трептения на въздушния стълб в тръбата с много широк

Фиг.79-1. Стоящи звукови вълни в цилиндрична тръба с два отворени края: а) вълна на отклонението; б) вълна на звуковото налягане.



спектър от честоти. До значителни амплитуди обаче достигат само трептенията, чиито честоти съвпадат със собствените честоти на въздушния стълб. Поради резонанса тези трептения се усилват и се предават на въздуха извън тръбата. Така въздушният стълб в тръбата на органа става източник на звукови вълни, чиито честоти се определят от дължината на тръбата и от граничните условия. Около отвора A , който свързва тръбата с атмосферния въздух, се получава връх на стоящата вълна на отклонението. В зависимост от това, дали другият край B е отворен или е затворен, собствените честоти се задават съответно с уравнение (77.8) или (77.11).



Фиг.79-2. Тръба на орган.

В струнните музикални инструменти източници на звук са трептящите струни. Струните обаче са много тънки и не са в състояние да свиват и разширяват големи обеми от въздух. Затова, ако не се извършва допълнително усилване, издадените от тях звукове са с много малък интензитет. В струнните инструменти се извършва резонансно усилване на звука от тялото на музикалния инструмент и от обема въздух в него. Трептенията на струните предизвикват принудени трептения на тялото и на въздуха в него. За да се постигне усилване на звука, трябва собствените честоти на трептене на тялото и на обема въздух в него да са близки до собствените честоти на струните. Тогава настъпва резонанс и се извършва ефективно предаване на енергия от струните чрез трептящото тяло на инструмента на външния въздух – в околното пространство се излъчват звукови вълни със значителен интензитет.

Пример 79.1. Основните честоти на орган с тръби, които са отворени от двата края, лежат в интервала от 65 Hz до 2090 Hz при температура 27 °C. а) Определете дължината на най-дългата и на най-късата тръба на органа. Ско-

ростта на звука във въздуха при температура 27 °C е 347 m/s. б) Как ще се изменят основните честоти на органа, ако температурата в залата се понижи до 7 °C?

Решение. а) Основната честота на трептене на въздушен стълб в тръба с два отворени края е $v_1 = \frac{u}{2L}$. Най-дългата тръба има най-ниска основна честота:

$$L_{\max} = \frac{u}{2v_{\min}} = \frac{347 \text{ m/s}}{2(65 \text{ Hz})} = 2,7 \text{ m}.$$

Най-късата тръба на органа има най-висока основна честота:

$$L_{\min} = \frac{u}{2v_{\max}} = \frac{347 \text{ m/s}}{2(2090 \text{ Hz})} = 8,3 \text{ cm}.$$

б) Скоростта на звука намалява при понижаване на температурата: $u \propto \sqrt{T}$ (вж. пример 78.1). Тъй като собствените честоти са пропорционални на скоростта на звука, при понижаване на температурата те също ще намаляват и в студената зала органът ще звучи по-глухо. Собствените честоти при температури $T = 300 \text{ K}$ и $T' = 280 \text{ K}$ са свързани със съотношението

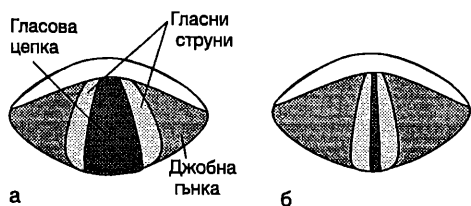
$$\frac{v'_1}{v_1} = \frac{u'}{u} = \sqrt{\frac{T'}{T}}; \quad v'_1 = v_1 \sqrt{\frac{T'}{T}} = 0,97 v_1.$$

Човешки глас

Съществува аналогия между начина, по който се формират звуковете на музикалните инструменти, и механизма на човешката реч. Гласните струни извършват трептения, а гърлото, носната кухина и устната кухина са резонатори, които усилват и модифицират звука. Огромното многообразие от звукове, които може да издава човек, се дължи на два основни фактора:

1. При изменение на опъването на гласните струни техните собствени честоти на трептене се изменят в широки граници. Подобно на струните на музикалните инструменти, собствените честоти на гласните струни нарастват, когато те са по-силно опънати.

2. Резонаторите, особено устната кухина, могат да се изменят по обем и форма, при което се променят честотите, които те усилват.



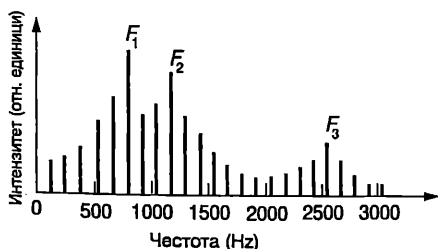
Фиг.79-3.

В процеса на дишането гласните струни (гласови гънки) са отпуснати и гласовата цепка е умерено отворена (фиг.79-3а). При подготовка за говорене гласовите мускули опъват гласните струни и те затварят гласовата цепка (фиг.79-3б). Налягането на въздуха под тях нараства, докато предизвика отваряне на гласовата цепка. Съгласно с уравнението на Бернули, когато скоростта на въздушния поток през гласовата цепка нараства, налягането намалява и гласните струни отново се затварят. След това налягането отново нараства и предизвиква следващо раздалечаване на гласните струни и т.н.

В §77 разгледахме възбуждане на собствени трептения на опъната струна, например чрез изтегляне средата на струната (фиг.77-4 на стр.146). По подобен начин чрез разтягането на гласните струни при отваряне и затваряне на гласовата цепка се възбуждат собствени трептения на гласните струни с различни честоти, но с близки амплитуди. Резонансните кухи на устата и носа при подходящо положение на езика, зъбите и устните усилват определени честоти и формират спектър на различни звукове.

Честотният анализ на гласните звукове на различните азбуки показва, че в спектрите им обикновено присъстват три резонансни пика. На фиг.79-4 е показан

Фиг.79-4.



относителният интензитет за различните честоти, формиращи звука „а“ в английската дума „father“. Честотите F_1 , F_2 и F_3 на главните резонанси се наричат *форманти*.

Спектрите на съгласните звукове и на сричките са по-сложни, защото те включват и непрекъснатите спектри на шумовете, произведени например при преминаване на въздуха между езика и зъбите.

Пример 79.2. Носната кухина и устната кухина на човека образуват сложна резонансна структура, но нейните свойства могат с приближение да се опишат от много прост модел. В него резонаторът се приема за цилиндрична тръба, единият край на която (при носа и устата) е отворен, а другият (при гласните струни) е затворен. Определете първите три резонансни честоти за такава тръба с дължина $L = 17$ cm и ги сравнете с формантите от фиг.79-4. Скоростта на звука е $u = 344$ m/s.

Решение. Собствените (резонансни) честоти на тръба с един отворен край са

$$v_n = \frac{(2n-1)u}{4L}.$$

За $n = 1, 2$ и 3 получаваме:

$$v_1 = 500 \text{ Hz}; v_2 = 1500 \text{ Hz}; v_3 = 2500 \text{ Hz}.$$

Сравнението показва, че получените резонансни честоти са близки до честотите на формантите за спектъра от фиг.79-4. Следователно използваният елементарен модел задоволително обяснява наличието на три резонансни пика в спектрите на гласните звукове.

Ухото като приемник на звук

Устройството на слуховия орган на човека е показано схематично на фиг.79-5. Тъпанчевата мембрана и костичките на средното ухо – чукче, наковалня и стреме – предават с минимални загуби звуковата енергия, събрана от външното ухо, на течността, която запълва вътрешното ухо. Това предаване на звуковата енергия не може да стане непосредствено, защото звуковите вълни се отразяват от границата въздух–течност и почти не проникват в течността. При водните животни звукът се предава от течност на течност, затова средното ухо липсва или е недоразвито. Тъпанчевата мембрана има неправилна форма и е неравномерно опъната в раз-

личните си части, поради което не може да извършва свободни трептения с характерни собствени честоти. Това е важно свойство на мембраната, защото в противен случай тя селективно би усилвала само трептенията, чиито честоти съвпадат със собствените ѝ честоти на трептене.

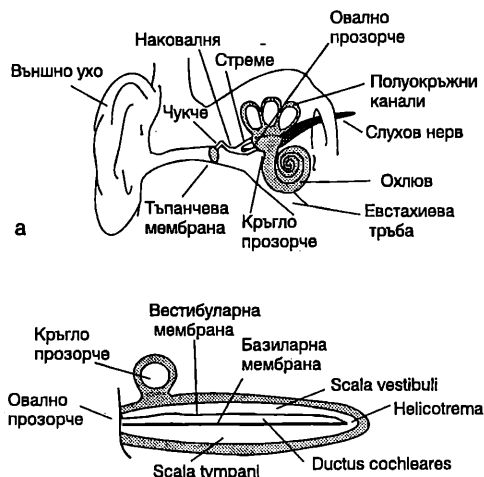
На стената, която отделя средното ухо от вътрешното ухо, има две прозорчета: овално прозорче и свободно кръгло прозорче, преградени с еластични мембрани. Чукчето е свързано към тъпанчевата мембрана, а стремето се допира до мембраната на овалното прозорче. Тъй като площта на стремето е около 20 пъти по-малка от площта на тъпанчевата мембрана, системата от костици действа подобно на хидравлична преса и увеличава налягането върху овалното прозорче около 20 пъти в сравнение със звуковото налягане. Двата мускула на средното ухо контролират амплитудите на движение на костиците и предпазват чувствителното вътрешно ухо от повреждане. Когато звукът е с голям интензитет, единият мускул опъва тъпанчевата мембрана и намалява амплитудата ѝ на трептене, а вторият мускул ограничава движението на стремето.

Костният канал на охлюва на вътрешното ухо е разделен на три камери: горна (scala vestibuli), средна (ductus cochlearis) и долна (scala tympani). За нагледност на

фиг.79-5б охлювът е показан в разгънат вид. Горната и долната камера са съединени във върха на охлюва с отвор (helicotrema) и са запълнени с течност, наречена перилимфа. Средната камера е изолирана от тях и е запълнена от друга течност – ендолимфа. Долната и средна камера са разделени от плътна и еластична ципа, наречена основна (базиларна) мембрана. Горната и средна камера се разделят от тънката и мека вестибуларна мембрана, която не оказва влияние на разпространението на трептенията в течностите. Затова можем да смятаме, че течностите на горната и средната камера образуват общ канал, който започва от овалното прозорче и чрез хеликотремата се свързва с канала на долната камера, завършващ при свободното кръгло прозорче. Еластичната мембрана на кръглото прозорче способства за възбуждане на трептения в течността. Под действието на стремето мембраната на овалното прозорче извършва трептения, които се разпространяват по перилимфата и ендолимфата на горната и средна камера, задвижват основната мембрана и чрез нея се предават на перилимфата на долната камера. Ще отбележим, че трептенията се предават на перилимфата на долната камера също през отвора, свързващ горната и долна камера. Този механизъм преобладава при ниски честоти, когато дължината на вълната на звука е много по-голяма от дължината на стълба течност. Тогава течността се движи като едно цяло, подобно на „течна тапа“, свързваща двете прозорчета: когато мембраната на овалното прозорче се придвижи навътре към вътрешното ухо, мембраната на свободното прозорче се отклонява навън към средното ухо и обратно. Рецепторните клетки се намират в средната камера, върху основната мембрана. Чрез тях механичните трептения се преобразуват в електрични сигнали, които възбуждат влакната на слуховия нерв.

Експериментално е установено, че звуковите трептения с ниска честота обхващат цялата течност на камерите на охлюва и възбуждат рецепторните клетки по цялата дължина на основната мембрана.

Фиг.79-5.



При високите честоти в трептенията участват само части от течността и от основната мембрана, разположени близо до овалното прозорче. Колкото по-висока е честотата, толкова по-къс е стълбът течност, който трепти, и толкова по-малка част от основната мембрана участва в трептенията. Следователно с увеличаване на честотата все по-малка част от рецепторните клетки се възбуждат и те са разположени все по-близо до овалното прозорче. Различното положение и нееднаквият брой на възбуждащите се клетки дава възможност ухото да различава звуковете по тяхната честота.

Локализиране на източника на звук

Възприемането на звука едновременно с двете уши дава възможност доста точно да се определи посоката, от която той идва. Всеки страничен звуков импулс постъпва в едното ухо малко по-рано, отколкото в другото. По разликата във времето е възможно да се определи посоката, от която идва импулсът.

Другите механизми на локализация се основават на разликата в звуковото налягане в двете уши. Човешката глава с приближение може да се разглежда като сфера с диаметър около 20 см. На звукова вълна във въздуха с дължина $\lambda = 20$ cm съответства честота $\nu = 1700$ Hz. Звукови вълни с по-голяма дължина на вълната преминават покрай главата без съществено отклонение и изменение. Ако в даден момент налягането на бягащата звукова вълна при едното ухо има максимум, при другото ухо, разположено на разстояние $x < \lambda$, налягането е по-ниско. Нервните импулси от двете уши съдържат информация за разликата в налягането, която мозъкът използва за локализиране на източника. Този механизъм на локализация е най-ефективен за звукове с честота под 1000 Hz.

Звуковите вълни с високи честоти (над 5000 Hz), чиито дължини на вълната са много по-малки от диаметъра на главата, ефективно се отразяват от нея. Ухото, разположено по-далеч от източника, се намира в „сянката“ на главата, където вълните проникват само частично и налягането

на звука е по-ниско. Между 1000 и 5000 Hz се използват и двата механизма, но определянето на положението на източника е по-неточно.

Любопитно е да се отбележи, че диапазонът на чуване при бозайниците зависи от разстоянието между двете уши. При едрите животни, където разстоянието между ушите е голямо, диапазонът на чуване е изместен към ниските честоти. Те по-добре от човека възприемат ниските честоти и по-лошо – високите честоти. Например слоновете не чуват звуковете с честота над 10 000 Hz. Обратното се наблюдава при дребните животни, които по-добре възприемат високите честоти. Кучетата например чуват до 44 000 Hz, а плъховете – до 72 000 Hz.

Качества на звука

Освен по нивото на гръмкостта, ухото различава звуковете и по други техни качества: тон, тембър и височина на звука. Хармонична звукова вълна се възприема от ухото като *чист тон*. Например на основния тон „ла“ в музиката съответства честота 440 Hz. В музиката основната честота на трептене на даден инструмент се нарича *тон*, а хармоничните честоти – *обертони*. Тонове на цигулката и на пианото включват до 15 – 20 обертона с различни амплитуди. Различният брой обертонове, присъщи на един или друг музикален звук, му придават особена окраска – *тембър*. Тембърът се определя както от броя на обертоновете, така и от съотношението на техните амплитуди.

Ухото възприема звуковете като ниски или високи, т.е. способно е да ги подрежда по субективното качество *височина на звука*. Височината на чистите тонове зависи главно от честотата. Тонове с по-голяма честота се възприемат като по-високи. Освен от честотата, височината на звука зависи и от интензитета. Височината на звук със сложен спектрален състав зависи от разпределението на интензитета по честоти.

80. Ултразвук и инфразвук

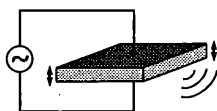
Източници и приемници на ултразвук

Механичните вълни с честота в интервала от 20 kHz ($2 \cdot 10^4$ Hz) до 1 GHz (10^9 Hz) се наричат *ултразвук*. Вълните с по-висока честота се наричат *хиперзвук*.

В голяма част от източниците и приемниците на ултразвук се използва пиезоелектричният ефект, който се наблюдава в някои кристали (кварц) и поликристални вещества (бариев титанат). При деформация (свиване или разтягане) на изрязана по подходящ начин пластинка от пиезокристал на противоположните ѝ стени възникват разноименни електрични заряди. Между стените се създава електрично напрежение. Когато свиването се сменя с разтягане, знакът на зарядите върху стените се сменя. Наблюдава се и обратен пиезоелектричен ефект – пластинката се деформира при прилагане на външно електрично напрежение. Ако напрежението се изменя периодически с честота ν , пластинката започва да трепти със същата честота. На *фиг.80-1* е показана кварцова пластинка с форма на паралелепипед, върху двете срещуположни стени на която е нанесен тънък слой от метал. Пластинката и металните електроди образуват плосък кондензатор, който се свързва към източник на променливо напрежение. Поради обратния пиезоелектричен ефект пластинката извършва принудени механични трептения. Амплитудата на трептене рязко нараства при резонанс, когато честотата на източника е равна на собствената честота на пластинката: пластинката става източник на ултразвукова вълна с голям интензитет.

В приемниците на ултразвук също се използва пиезоелектричният ефект. Когато ултразвукова вълна попадне върху пиезопластинката на приемника, последната започва да трепти. Между противоположните ѝ стени възниква променливо напрежение, което

Фиг.80-1.



се регистрира от електронната система на приемника.

Действието на друг вид източници на ултразвук се основава на явлението магнитострикция. Магнитострикция се нарича свойството на някои феромагнитни вещества да променят размерите си при намагнитване. Ако пластинка (или пръчка) от такова вещество се постави в променливо магнитно поле, създадено от намотка, по която тече променлив ток, при пренамагнитването на пластинката възникват механични трептения. Когато честотата на променливия ток е равна на собствената честота на трептене на пластинката, настъпва резонанс, амплитудата на трептене нараства и излъчената от трептящата пластина ултразвукова вълна е с максимален интензитет.

Пример 80.1. В източник на ултразвук се използват надлъжните трептения на кварцова пластинка с дебелина $d = 5$ mm. Определете честотата на ултразвука. Скоростта на надлъжните механични вълни в кварц е $u = 5500$ m/s.

Решение. Подобно на въздушния стълб в цилиндрична тръба с два отворени края (вж. *фиг.79-1* на стр.152), надлъжните стоящи вълни на отклонението в кварцовата пластина имат върхове върху срещуположните свободни повърхности на пластинката. Следователно:

$$\lambda_1 = 2d; \quad \nu_1 = \frac{u}{\lambda_1} = \frac{u}{2d} = 550 \text{ kHz}.$$

Трептенията на пластинката предизвикват излъчване на ултразвукова вълна със същата честота (550 kHz). За получаване на ултразвукови вълни с по-високи честоти се използват висши хармонични на основната собствена честота на пластинката.

Ултразвукова локация

Ултразвукът слабо се поглъща от водата и се използва за подводна сигнализация, за откриване на предмети под водата и за изследване релефа на морското дъно. Принципът на действие на ултразвуковия локатор (ехолот) се основава на отражението на звуковите вълни. Излъченият ултразвуков сигнал достига до търсения обект, отразява се от него и попада в приемника. Като се знае времето за отиване

и за връщане на сигнала, се определя разстоянието до обекта. Чрез ултразвукова локация се откриват подводни лодки, рибни пасажии, айсбергии и др.

Ултразвуковата локация се използва от някои животни при движение и търсене на храна. Гласовият орган на различните видове прилепи генерира ултразвукови импулси с продължителност от 1 ms до 15 ms и честота между 20 kHz и 100 kHz. За 1 секунда се излъчват от 10 до 100 такива импулса, които се отразяват от околните тела и се възприемат обратно от прилепа. По този начин той получава подробна информация за заобикалящата го среда, което му дава възможност свободно и сигурно да лети в тъмните пещери.

Ултразвукови сигнали използват също делфините, някои видове лястовици, птиците *Steatopus carpenis* и др.

Ултразвукова диагностика

Когато механична вълна достигне границата на две среди, тя частично се отразява и частично преминава във втората среда. Интензитетът на отразената вълна зависи от плътностите на двете среди, от скоростите на вълната в тях и от ъгъла на падане. Доказва се, че в частния случай, когато вълната пада перпендикулярно на границата, отношението на интензитетите I на отразената вълна и интензитета I_0 на падащата вълна се изразява с уравнението

$$(80.1) \quad \frac{I}{I_0} = \left(\frac{u_1 \rho_1 - u_2 \rho_2}{u_1 \rho_1 + u_2 \rho_2} \right)^2,$$

където u_1 и u_2 са скоростите на звука в двете среди, а ρ_1 и ρ_2 – плътностите на средите. Скоростта на звука в меките тъкани на човешкото тяло е приблизително еднаква, затова интензитетът на отразената от границата на две тъкани вълна се определя главно от разликата в тяхната плътност.

Отражението на ултразвук се използва за медицинска диагностика. От източник се изпращат къси ултразвукови импулси, които частично се отразяват от границите на областите на тялото с различна плътност. Между два последователни импулса източникът работи в режим на приемник, регистрира отразените вълни (ехо)

и ги преобразува в електрични сигнали, които носят информация за формата и положението на отразяващите граници. Отражение от малки обекти е възможно само ако дължината на вълната е по-малка от размера на обекта. Това налага използване на механични вълни с висока честота (малка дължина на вълната), т.е. на ултразвук. За да се постигне висока разделителна способност на ултразвуковите методи на диагностика, трябва да се използват вълни с възможно най-висока честота. От друга страна, поглъщането на ултразвук от тъканите нараства при увеличаване на честотата. За да имат отразените от вътрешните органи високочестотни вълни достатъчен за регистрирането им интензитет, необходимо е да се използват по-мощни източници на ултразвук. Тук също съществуват ограничения, тъй като ултразвук с голям интензитет оказва вредно въздействие върху организма. В съвременните ултразвукови томографи (скенери и др.) се постига оптимално съчетаване на взаимно противоречивите изисквания за голяма разделителна способност (наблюдаване на най-малки детайли), възможност за проникване на вълните на голяма дълбочина в тялото и същевременно пълна безвредност на ултразвуковото облъчване за пациента.

Пример 80.2. Плътностите на две мускулни тъкани са $\rho_1 = 1026 \text{ kg/m}^3$ и $\rho_2 = 1068 \text{ kg/m}^3$. Определете отношението на интензитетите на отразената от границата на двата мускула вълна и падащата ултразвукова вълна. Приемете, че скоростта на звука е еднаква в двете тъкани, а падащата вълна се разпространява перпендикулярно на границата.

Решение. Заместваме $u_1 = u_2$ във формула (80.1) и определяме отношението на интензитетите на отразената и падащата вълна:

$$\frac{I}{I_0} = \left(\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2 = 0,0004.$$

Следователно интензитетът на отразената вълна е само 0,04% от интензитета на падащата вълна, но той е достатъчен, за да може отразената вълна да бъде регистрирана от чувствителен приемник.

Ултразвук с голям интензитет

Разрушителното действие на ултразвукови вълни с голям интензитет намира приложение в хирургията и неврохирургията за унищожаване на тумори, камъни в бъбреците и други образувания. Ултразвуковите вълни се фокусират в една малка област, където достигат голям интензитет и унищожават тъканта само там, без да оказват въздействие на съседните области. Например в мозъка с ултразвук се унищожават центрове на болестта на Паркинсон.

Под действието на ултразвук в течности се наблюдава явлението *кавитация* (от лат. *cavitas* – празнина, кухина). Когато амплитудата на налягането на ултразвука надминава някаква критична стойност p_k , във фазата на разреждане ултразвуковата вълна създава толкова ниско налягане, че непрекъснатостта на течността се нарушава и се образуват вакуумни мехурчуци (мехурчета). Веднаж възникнали, мехурчетата извършват пулсации при промяна на звуковото налягане. Когато налягането намалява, те се разширяват. Чрез дифузия разтворените в течността газове запълват мехурчетата. В мехурчетата постъпват и пари на течността. Когато звуковото налягане нараства, мехурчетата се свиват и след като достигнат някакъв минимален радиус се спукват, т.е. изчезват. Ще отбележим, че за разлика например от сапуниения мехур, който се спуква навън при разширяние, кавитационното мехурче се спуква навътре при свиване. В резултат на рязкото адиабатно свиване, за което съществена роля играят и силите на повърхностно напрежение, температурата на газовете и парите в мехурчетата достига до 10 000 K. Високата температура причинява частично атомизиране и йонизация на газовете и парите. Освен това пулсациите и спукването на мехурчетата пораждат мощни микропотоци от молекули на течността с високи енергии, които заедно с отделените йонизирани газове оказват разрушаващо действие върху повърхността на телата, намиращи се в областта на кавитация. Извършва се кавитационна ерозия, при което се разрушава повърхностният слой на твърдите тела.

В специални ултразвукови вани кавитацията се използва за почистване на различни повърхности, медицински инструменти и детайли със сложна форма, съдържащи множество цепнатини и пори, които трудно биха могли да се почистят по друг начин. Кавитационното почистване има и това предимство, че се унищожават различни видове микроорганизми и се постига стерилизация. Освен това кавитацията се използва за фино диспергиране на течни или твърди вещества в течни или газови среди. Така се приготвят стабилни суспензии и емулсии и много фини аерозоли за борба с вредителите по растенията и домашните животни, за инхалационна терапия на белите дробове и др.

Пример 80.3. Оценете минималния интензитет I_k на ултразвук, който предизвиква кавитация във вода при нормално атмосферно налягане $p_0 = 10^5$ Pa. Скоростта на ултразвука във вода е $u = 1500$ m/s, плътността на водата е $\rho = 1000$ kg/m³.

Решение. Големината на критичното налягане p_k на ултразвука, при което започва кавитацията, зависи от много фактори: съдържание на газове и примеси в течността, температура, честота и продължителност на звуковото въздействие, пространствено разпределение на интензитета на звука и др. Като груба оценка обаче можем да приемем, че кавитацията започва, когато амплитудата на ултразвуковото налягане стане равна на външното атмосферно налягане. За плоска хармонична вълна амплитудата на налягането и интензитетът са свързани със съотношението (78.10). Следователно:

$$I_k = \frac{p_k^2}{2\rho u} = \frac{(10^5 \text{ Pa})^2}{2(1000 \text{ kg/m}^3)(1500 \text{ m/s})} \approx 3 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}.$$

Инфразвук

Границите на честотния интервал, в който механичните вълни се наричат инфразвук, не са точно определени. Обикновено за горна граница на инфразвуковия диапазон се приемат честотите 15 – 40 Hz, а долната граница в някои съвременни изследвания достига до 0,001 Hz. Естествени източници на инфразвук са изригващите вулкани, земетресенията, морските вълни, ветровете и др. С човешката дей-

ност са свързани други източници на инфразвук: взривове, оръдейни изстрели, акустично излъчване на реактивни двигатели и др. Инфразвукови компоненти съдържат шумовете, произвеждани от машини и съоръжения, от транспорта и др. Установено е, че инфразвук с голямо ниво на интензитета (над 120 dB) оказва вредно въздействие върху човешкия организъм.

Поради ниската си честота инфразвуковите вълни много слабо се поглъщат и отразяват от атмосферата, водата и земната кора. Всички звукоизолиращи материали губят своята ефективност и не представляват преграда за инфразвука. Например при изригване на вулкан инфразвукът многократно обхожда земното кълбо. Свойството на инфразвуковите вълни да се разпространяват на големи разстояния намира редица приложения. Ще се спрем на едно от тях.

Отделянето на въглероден диоксид (CO_2) и на някои други газове в атмосферата е свързано с повишаване на температурата както на атмосферата, така и на океана (парников ефект). Изчислено е, че ако го нямаше океанът, температурата на атмосферата би нараствала три пъти по-бързо при еднакви останали фактори. Измерването на средната температура на океана е затруднено поради нейните локални изменения, предизвикани от множество фактори. Необходим е метод за определяне на средната температура за много голяма област от океана. За тази цел се използват т. нар. акустични канали в океана, разположени на дълбочина около 1 km. Скоростта на механичните вълни във вода зависи от температурата и налягането, които в океана се изменят с дълбочината. В резултат на тези изменения се оказва, че на някаква дълбочина скоростта на вълните е минимална. Областите с минимална скорост на звука образуват дълги канали, в някои случаи обхващащи половината от земното кълбо, по които могат насочено да се разпространяват инфразвукови вълни. На единия край на канала се поставя мощен източник на инфразвукови импулси. Приемникът, разположен на другия край на акустичния канал, регистрира импулса и се из-

мерва времето за неговото разпространение. По намаляването на времето за разпространение от година на година се прави извод за нарастването на средната температура на океана, предизвикано от парниковия ефект.

Пример 80.4. За изследване на парниковия ефект е използван акустичен канал с дължина $L = 18\,000\text{ km}$. През голям интервал от време са проведени две групи измервания. Установено е, че при вторите измервания времето за разпространение на инфразвуков импулс по канала намалява с $0,5\text{ s}$. Определете нарастването на средната температура на океана за изследвания период от време. Скоростта на инфразвука е $u = 1500\text{ m/s}$ и нараства с $4,6\text{ m/s}$ при увеличаване на температурата с 1 K ($du/dT = 4,6\text{ m/(s}\cdot\text{K)}$).

Решение. Импулсът изминава разстоянието L за някакво време t , ако се движи със скорост u : $L = ut$. Ако скоростта нарастне с Δu , времето намалява с Δt : $L = (u + \Delta u)(t - \Delta t)$. От горните две равенства, след като пренебрегнем едночлена $\Delta t \Delta u$, който е много по-малък от останалите едночлени, получаваме

$$\Delta u = \frac{u^2 \Delta t}{L} = 0,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Изменението на средната температура на океана за интервала от време между двете измервания е

$$\Delta T = \frac{\Delta u}{(du/dT)} \approx 0,014\text{ K}.$$

Задачи

1. Ултразвукова вълна с интензитет $I_0 = 2\text{ W/m}^2$, която се разпространява във въздуха, попада перпендикулярно върху плоска водна повърхност. Определете интензитета I_1 на отразената вълна и интензитета I_2 на вълната, която преминава във водата. Скоростта на ултразвука е $u_1 = 340\text{ m/s}$ във въздуха и $u_2 = 1500\text{ m/s}$ във водата. Плътността на въздуха и на водата са съответно $\rho_1 = 1,2\text{ kg/m}^3$ и $\rho_2 = 1000\text{ kg/m}^3$.
2. Ехолот регистрира отразения от кит ултразвуков импулс $0,8\text{ s}$ след неговото излъчване. Колко е разстоянието от кораба до кита? Скоростта на ултразвука е $u = 1500\text{ m/s}$.

81. Ефект на Доплер. Ударни вълни

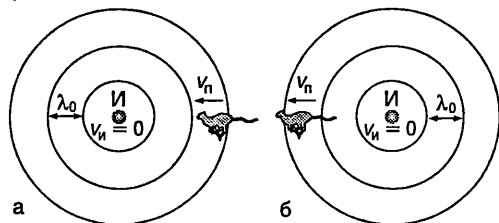
Ако сте застанали край железопътна линия ще установите, че височината на тона (честотата) на звуковия сигнал от сирената на влак изведнъж се понижава, когато локомотивът премине покрай вас. Изменението на честотата на вълните, породено от движението на източника или на приемника, е открито от австрийския физик Кристиан Йохан Доплер (1803–1853) и се нарича *ефект на Доплер*. Когато източникът се приближава към приемника, за 1 s приемникът регистрира повече гребени на вълната, отколкото е излъчил източникът за същото време, т.е. честотата на приетия сигнал е по-голяма от честотата на излъчения. Обратно, когато източникът се отдалечава, за 1 s до приемника достигат по-малко гребени на вълната, отколкото са излъчени за същото време. Това означава, че регистрираната от приемника вълна има по-малка честота от честотата, с която трепти източникът. По подобен начин се изменя честотата, когато се движи приемникът, а източникът е неподвижен.

Ефект на Доплер се наблюдава при всички видове вълни. В този параграф ще разгледаме само механичните вълни – ефект на Доплер в акустиката. На ефекта на Доплер при електромагнитните вълни ще се спрем в §98.

Движение на приемника

Нека източникът на звук е неподвижен спрямо средата (въздуха), в която се разпространяват звуковите вълни ($v_{\text{и}} = 0$). Той излъчва вълни с честота ν_0 , дължина на вълната λ_0 и скорост u . За време t източникът излъчва $N_0 = \nu_0 t$ вълнови фронта (гребена). Ако наблюдателят (приемникът)

Фиг.81-1.



е неподвижен, за същото време t той ще регистрира същия брой N_0 вълнови фронта. При приближаване на наблюдателя към източника със скорост v_n (фиг.81-1а), за време t той изминава разстояние $s = v_n t$ и пресича допълнително още $\Delta N = s/\lambda_0 = v_n t/\lambda_0$ вълнови фронта. Поради това за време t до него достигат общо

$$N = N_0 + \Delta N = \nu_0 t + \frac{v_n t}{\lambda_0}$$

вълнови фронта. Следователно честотата ν на звука, който чува наблюдателят, нараства:

$$\nu = \frac{N}{t} = \nu_0 + \frac{v_n}{\lambda_0}.$$

Заместваме $\lambda_0 = u/\nu_0$, и получаваме

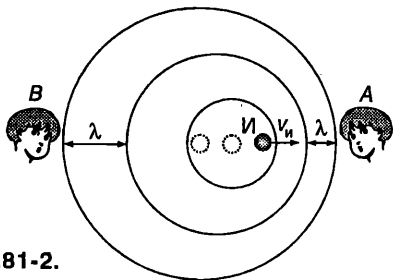
$$(81.1) \quad \nu = \nu_0 \left(1 + \frac{v_n}{u} \right).$$

Ако наблюдателят (приемникът) се отдалечава от източника (фиг.81-1б), за време t до него ще достигнат $\Delta N = v_n t/\lambda_0$ по-малко вълнови фронта, отколкото ако е неподвижен. Затова той ще чува звук с по-ниска честота ν . По аналогичен начин в този случай се получава

$$(81.2) \quad \nu = \nu_0 \left(1 - \frac{v_n}{u} \right).$$

Движение на източника

Когато източникът на вълни извършва хармонични трептения с честота ν_0 и период $T_0 = 1/\nu_0$, той излъчва вълнови фронтове (гребени на вълната) през интервали T_0 . Ако източникът е неподвижен спрямо въздуха, вълновият фронт, излъчен в даден момент t , се движи със скорост u спрямо въздуха и се отдалечава от неподвижния източник. В момента $t + T_0$, в който се излъчва следващият вълнов фронт, предишният се е отдалечил на разстояние $\lambda_0 = u T_0$ от източника. Следователно разстоянието между два съседни вълнови фронта (дължината на вълната) при неподвижен източник е λ_0 . Ако източникът се приближава със скорост $v_{\text{и}}$ към неподвижния наблюдател А (фиг.81-2), за време T_0 той изминава разстояние $s = v_{\text{и}} T_0$ в неподвижния въздух. За същото време вълно-



Фиг.81-2.

вият фронт, излъчен в момента t , изминава разстояние $\lambda_0 = uT_0$ спрямо въздуха. Тъй като източникът „догонва“ вълновия фронт, разстоянието между тях намалява и в момента $t + T_0$, в който се излъчва следващият вълнов фронт, то е

$$\lambda = \lambda_0 - s = (u - v_n)T_0 = \frac{u - v_n}{v_0}.$$

Следователно вълновите фронтове пред източника се съгъстяват (фиг.81-2) и наблюдателят A чува звук с по-малка дължина на вълната λ . Тъй като $v = u/\lambda$, за наблюдателя A честотата v на звука нараства:

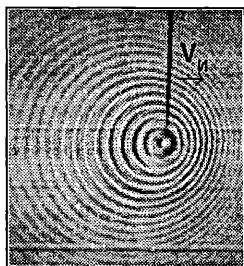
$$v = \frac{u}{\lambda} = \frac{v_0 u}{u - v_n} \text{ или}$$

$$(81.3) \quad v = \frac{v_0}{1 - \frac{v_n}{u}}.$$

Зад източника разстоянието между вълновите фронтове нараства (фиг.81-2). Неподвижният наблюдател B , от когото източникът се отдалечава със скорост v_n , регистрира звук с по-голяма дължина на вълната и с по-малка честота, която по аналогичен начин се изразява с формулата

$$(81.4) \quad v = \frac{v_0}{1 + \frac{v_n}{u}}.$$

Фиг.81-3. Ефект на Доплер във вана за водни вълни. Пред движещия се източник вълновите фронтове се съгъстяват, а зад него се разреждат.



Пример 81.1. Сирената на влак издава звуков сигнал с честота $v_0 = 340$ Hz. Определете изменението на честотата Δv , което регистрира неподвижен наблюдател, когато влакът премине покрай него. Скоростта на влака е $v_n = 72$ km/h, скоростта на звука във въздух е $u = 340$ m/s.

Решение. Когато влакът се приближава, поради ефекта на Доплер честотата v_1 на регистрирания от наблюдателя сигнал нараства:

$$v_1 = \frac{v_0}{1 - \frac{v_n}{u}}.$$

$$\text{тата намалява: } v_2 = \frac{v_0}{1 + \frac{v_n}{u}}.$$

стотата е

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \frac{-2(v_n v_0 / u)}{1 - (v_n / u)^2} \approx -2 \frac{v_n}{u} v_0,$$

където сме пренебрегнали едночлена $(v_n / u)^2$ в знаменателя, който е много по-малък от единица. Знакът минус показва, че честотата намалява. Следователно, когато влакът премине покрай нас, височината на тона се понижава. Вижда се, че изменението на честотата е пропорционално на скоростта на влака. След заместване на числените стойности получаваме $\Delta v = -40$ Hz.

Двоен ефект на Доплер

Неподвижен източник, например трептяща кварцова пластинка, излъчва вълнов импулс с честота v_0 . Импулсът се отразява от обект, който се отдалечава от източника, след което се разпространява в обратната посока (фиг.81-4). Отраженият сигнал попада обратно върху кварцовата пластинка, която след излъчването е преминала в режим на работа като приемник. Каква честота на отразената вълна ще регистрира приемникът? За да отговорим на този въпрос, ще разгледаме движещия се обект отначало като приемник, а след това като източник на механични вълни. Поради ефекта на Доплер върху движещия се обект попада вълна с по-ниска честота $v_1 = v_0(1 - v/u)$. Това означава, че падащата вълна възбужда в обекта трептения с честота v_1 и той става източник на отра-



Фиг.81-4.

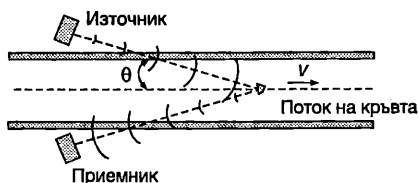
зена вълна със същата честота. Но отразената вълна е излъчена от отдалечаващ се източник и отново поради ефекта на Доплер кварцовата пластинка ще регистрира вълна с по-ниска честота v_2 :

$$(81.5) \quad v_2 = \frac{v_1}{1 + v/u} = \frac{v_0(1 - v/u)}{1 + v/u}.$$

И така, при отражение на механична вълна от движещ се обект ефектът на Доплер трябва да се отчете два пъти, поради което изменението на честотата на отразената вълна се нарича двоен ефект на Доплер. Двойният ефект на Доплер намира редица практически приложения. Използва се, например, за определяне скоростта на кръвта в кръвоносните съдове. От едната страна на кръвоносния съд се поставя източник, а от друга – приемник на ултразвук. Ултразвуковата вълна се отразява от червените кръвни телца и се регистрира от приемника (фиг.81-5). Когато ъгълът θ е малък, може да се използва формула (81.5), за да се определи скоростта v на кръвта по изменението на честотата на отразената вълна.

Двойният доплеров ефект се използва също така за изследване на сърдечната дейност на зародиша в ранния стадий на бременността. Излъчват се ултразвукови импулси, които се отразяват от сърцето на зародиша. Когато при контракциите отразяващата повърхност на сърцето се приближава към приемника, той регистрира доплерово увеличение на честотата. Обратно, при отдалечаване на сърцето честотата на отразения сигнал намалява.

Фиг.81-5.



Пример 81.2. За определяне на средната скорост на кръвта в аортата е използвана апаратура, схематично показана на фиг.81-5. Източникът на ултразвук е с честота $v_0 = 10^5$ Hz. Скоростта на ултразвука в кръвта е $u = 1570$ m/s. Колко е средната скорост на кръвта v , ако приемникът регистрира доплерово изменение на честотата $\Delta v = -2$ Hz на отразения от движещите се червени кръвни телца ултразвук? Ъгълът θ е много малък.

Решение. При много малък ъгъл θ честотата на регистрирания от приемника отразен сигнал се изразява с уравнение (81.5) за двойния ефект на Доплер. За да опростим това уравнение, ще използваме факта, че $v \ll u$, т.е. $v/u \ll 1$. Тогава

$$v_2 = \frac{v_0(1 - v/u)}{1 + v/u} \approx v_0(1 - v/u)(1 - v/u) \approx v_0(1 - \frac{2v}{u}),$$

където сме използвали приближението (A.56) (вж. част 1, стр.234) и сме пренебрегнали малката величина от втори порядък $(v/u)^2$. Следователно :

$$\Delta v = v_2 - v_0 = -\frac{2v}{u} v_0;$$

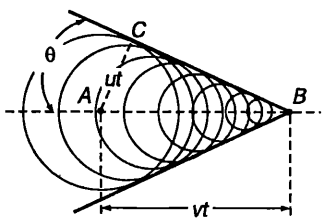
$$v = \frac{u \Delta v}{2 v_0} = \frac{(1570 \frac{m}{s})(-2 \text{ Hz})}{2 \cdot 10^5 \text{ Hz}} \approx 1,6 \frac{cm}{s}.$$

Ударни вълни

Ако скоростта на източника на звук е по-голяма от скоростта на звуковата вълната (такива скорости се наричат свръхзвукови), тогава той започва да „изпреварва“ излъчената от него вълна. Различните вълнови фронтове се припокриват, взаимно се усилват (интерферират) и образуват общ вълнов фронт с голяма амплитуда, наречен *ударна вълна* (фиг.81-6). Фронтът на ударната вълна представлява конус, който се допира до отделните сферични вълнови фронтове, излъчени от източника в различни моменти от времето. Източникът е разположен във върха на конуса.

Ъгълът на разтвора θ на конуса на ударната вълна се определя от правоъгълния триъгълник ABC (фиг.81-6). За време t излъчената от източника в точка A вълна е изминала разстояние $AC = ut$. За същото време източникът се е преместил в точка B , като е изминал разстояние $AB = vt$.

Следователно:



Фиг.81-6. Ударни вълни.

$$(81.6) \quad \sin \theta = \frac{AC}{AB} = \frac{v}{u}.$$

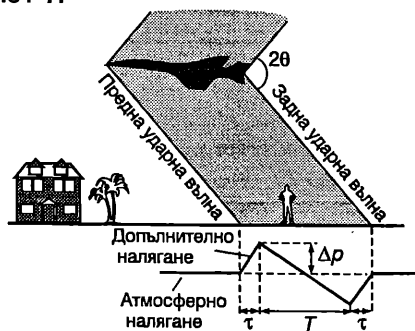
От формулата се вижда, че когато скоростта на източника нараства, ъгълът θ на конуса на ударната вълна намалява. Безразмерната величина

$$(86.7) \quad M = \frac{v}{u},$$

равна на отношението на скоростта v на дадено тяло към скоростта на звука u в средата, в която се извършва движението на тялото, се нарича *число на Мах*. При движение със свръхзвукови скорости числото на Мах е по-голямо от единица ($M > 1$).

При полет на свръхзвуков самолет се образуват две ударни вълни – предна и задна (фиг.81-7). Когато предната ударна вълна достигне до ухото на наблюдател от земната повърхност, налягането върху тяпанчето за много малък интервал от време τ нараства с Δp над нормалното атмосферно налягане. В течение на времето T , през което човек се намира в обсега на ударната вълна, звуковото налягане намалява приблизително по линеен закон, докато достигне отрицателна стойност $-\Delta p$, когато през ухото преминава фронтът на задната ударна вълна. След това отно-

Фиг.81-7.



во за много малък интервал от време τ налягането се изравнява с атмосферното (фиг.81-7). Двете резки изменения на налягането, предизвикани от предната и задната ударна вълна, се наричат *акустичен удар*. Те се възприемат от ухото като два последователни експлозивни звука. Въздействието на акустичния удар върху човека зависи от стойностите на величините τ , Δp и T . За френско-английския пътнически самолет „Конкорд“, когато лети на височина 20 km, $\tau \approx 3$ ms, $T \approx 0,4$ s и $\Delta p \approx 100$ Pa. Изследванията показват, че акустичният удар при тези условия е еквивалентен на шум с ниво на интензитета около 120 dB.

Ударните вълни и свързания с тях акустичен удар оказват вредно въздействие върху човека, могат да предизвикат счупване на стъкла, структурни дефекти в сградите и др. Затова свръхзвуковата авиация предизвиква сериозни възражения сред обществеността в много страни. Въвеждат се строги ограничения в свръхзвуковите полети над сушата, особено над гъсто населени райони.

Задачи

Във всички задачи скоростта на звука във въздуха да се приеме $u = 340$ m/s.

1. Неподвижна сирена издава звук с честота 1000 Hz. Звук с каква честота чува водачът на автомобил, който се движи със скорост 17 m/s: а) срещу сирената; б) в противоположната посока?

2. Самолет, който се насочва за кацане, излъчва звуков сигнал с честота 400 Hz. Колко е честотата на звука, достигащ до кулата на диспечера? Самолетът се приближава към кулата със скорост 64 m/s.

3. Източник на звук с честота $\nu_0 = 1500$ Hz, приемник и обект лежат на една права. Приемникът регистрира две звукови вълни: първата идва директно от източника, а втората – след отражение от обекта. Приемникът и източникът са неподвижни, а обектът се отдалечава от тях. Определете скоростта v на обекта, ако приемникът регистрира биене с период $T_6 = 2$ s.

4. Ъгълът на конуса на ударната вълна на курсум е $\theta = 30^\circ$. С каква скорост се движи курсумът?

Електромагнитни трептения и вълни



Джеймс Кларк Максвел

Във физиката понятието трептене има много широк смисъл. Освен механичните трептения то включва такива периодични или почти периодични процеси, при които стойностите на определена физична величина се повтарят (или приблизително се повтарят) през равни (или приблизително равни) интервали от време. В тази глава ще разгледаме електромагнитните трептения в електрическа верига, съставена от кондензатор и намотка или от кондензатор, намотка и резистор. Това са процесите на периодични изменения на тока, напрежението и заряда на кондензатора, както и процесите на периодично изменение на електричното поле в кондензатора и на магнитното поле на тока в намотката. Ще установим, че електромагнитните трептения се описват със същите математични уравнения, както механичните трептения, което ще ни помогне да направим аналогия между величините и параметрите, които характеризират двата вида трептения. Специално внимание ще отделим на променливите токове, които представляват принудени електромагнитни трептения, предизвикани от външен източник, чието напрежение се изменя по синусов закон. Ще се спрем на основните свойства на електромагнитните вълни и на излъчването на електромагнитни вълни от движещ се с ускорение електричен заряд.

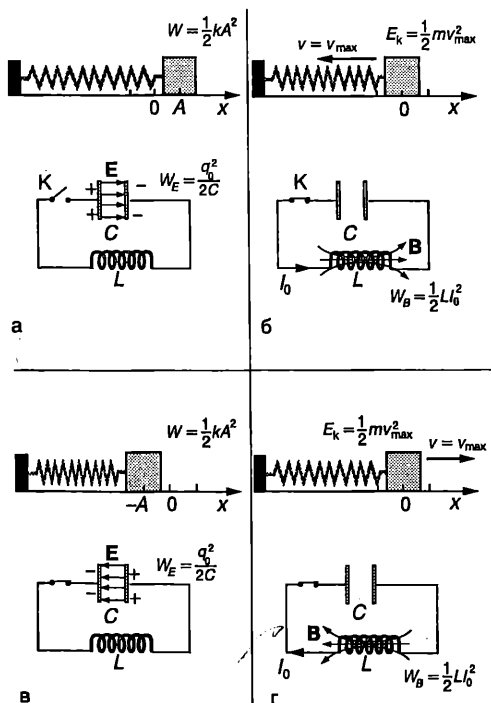
82. Електромагнитни трептения в LC-кръг и в RLC-кръг

Процеси в LC-кръг

На *фиг.82-1* е показана електрическа верига, съставена от кондензатор с капацитет C и намотка с индуктивност L . Ще смятаме, че диелектриктът, с който е запълнен кондензаторът, има безкрайно голямо съпротивление (идеален кондензатор), а съпротивлението на проводника, от който е навита намотката, е пренебрежимо малко (идеална намотка). При тези условия кондензаторът и намотката образуват идеален LC-кръг. Кондензаторът е зареден със заряд q_0 , ключът K е отворен (*фиг.82-1а*). В момента $t = 0$ затваряме ключа K . Започва процес на разреждане на кондензатора през намотката. В намотката се индуцира ЕДН, което съгласно с правилото на Ленц се противопоставя на нарастването на тока във веригата. Затова токът

нараства постепенно и достига максимална си стойност I_0 , когато кондензаторът е изцяло разреден (*фиг.82-1б*). След това токът намалява, а кондензаторът започва да се презарежда с обратна полярност. Съществени са два фактора: 1. вече натрупаните върху кондензатора в процеса на презареждане заряди създават електрично поле, което отблъсква пристигащите нови заряди и води до намаляване на големината на тока; 2. в намотката се индуцира ЕДН, което се противопоставя на намаляването на тока, т.е. стреми се да го поддържа. Съвместното действие на двата фактора води до постепенно намаляване на тока, който става нула, когато кондензаторът се зареди с първоначалния заряд q_0 , само че с противоположна полярност (*фиг.82-1в*). След това протича ток в обратната посока, който достига максималната си стойност I_0 при разреден кондензатор (*фиг.82-1г*) и намалява до нула, при което се възстановява началното състояние на LC-кръга (*фиг.82-1а*). По този начин физичните величини, които характеризират процесите в LC-кръга извършват един пълен цикъл на изменение (трептение). След това процесите се повтарят.

Фиг.82-1. Аналогия между електромагнитните трептения и механичните трептения.



Преобразуване на енергията

Ще проследим изменението на енергията в LC-кръга и ще направим аналогия с изменението на енергията при хармоничното механично трептене. В началния момент $t = 0$ енергията на LC-кръга е равна на енергията на електричното поле на заредения кондензатор $W_E = q_0^2 / 2C$. На *фиг.82-1а* за сравнение е показано пружинно махало, което е максимално отклонено от равновесното си положение. Неговата енергия е $W = kA^2 / 2$. При разреждането на кондензатора енергията на електричното поле намалява, но нараства енергията на магнитното поле на тока през намотката, която достига максимална стой-

ност $W_B = \frac{1}{2} L I_0^2$ при разреден кондензатор ($W_E = 0$). Следователно при нарастване на тока електричната енергия се превръща в магнитна енергия и обратно: когато токът намалява, магнитната енергия се превръща в електрична енергия. Аналогичен про-

цес протича при механичните трептения: когато скоростта нараства, потенциалната енергия се преобразува в кинетична енергия и обратно, намаляването на скоростта е съпроводено с преобразуване на кинетичната енергия в потенциална енергия.

Пълната енергия на LC -кръга в произволен момент от времето е

$$(82.1) \quad W = W_E + W_B = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2},$$

където q и I са моментните стойности на заряда върху кондензатора и на тока във веригата. Енергията при механично хармонично трептене е (вж. §71)

$$(82.2) \quad E = W + E_k = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

От сравняването на двата израза за енергията, както и от *фиг.82-1*, стигаме до извода, че зарядът q върху кондензатора е аналог на отместването x , а токът $I = dq/dt$ е аналог на скоростта $v = dx/dt$. При процесите в LC -кръга реципрочната стойност на капацитета $1/C$ е аналог на коефициента на еластичност k на пружината, а индуктивността L – на масата m при хармоничното механично трептене.

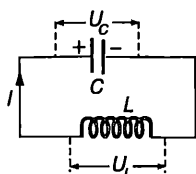
Хармонични електромагнитни трептения

Ще покажем, че аналогията се разпростира и върху уравненията, описващи динамиката на процесите в LC -кръга. Ще смятаме процесите за квазистационарни (вж. §61) и ще прилагаме правилата на Кирхоф за моментните стойности на тока и напреженията във веригата. Избираме за положителна посоката на тока, който зарежда кондензатора (*фиг.82-2*), и прилагаме правилото на Кирхоф за токовия контур: $U_C = \varepsilon_L$, където $U_C = q/C$ е напрежението върху кондензатора, а $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$

е самоиндуцираното в намотката електродвижещо напрежение. След заместване се получава

$$(82.3) \quad \frac{q}{C} + L \frac{dI}{dt} = 0.$$

Моментната стойност на тока е равна на



Фиг.82-2.

скоростта, с която се изменя зарядът върху кондензатора: $I = dq/dt$, откъдето $dI/dt = d^2q/dt^2$. Заместваме производната dI/dt в уравнение (82.3) и получаваме

$$(82.4) \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0.$$

Ще припомним, че хармоничните механични трептения се описват с уравнението на хармоничния осцилатор (вж. §70)

$$(82.5) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = 0.$$

Сравняването на двете уравнения показва, че изменението на заряда върху кондензатора се описва със същото диференциално уравнение, както отклонението x при свободно незатихващо хармонично трептене. Следователно зарядът q , подобно на отклонението x , се изменя с времето по синусов закон

$$(82.6) \quad q = q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

където $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ е кръговата честота, а

q_0 и φ_0 са съответно амплитудата и началната фаза. Последните две величини, както при механичните трептения, се определят от началните условия.

Напрежението U_C върху кондензатора и токът I във веригата се изменят по законите

$$(82.7) \quad U_C = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = U_{0C} \sin(\omega_0 t + \varphi_0);$$

$$(82.8) \quad I = \frac{dq}{dt} = q_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) = I_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

където $U_{0C} = q_0/C$ и $I_0 = q_0 \omega_0$ са съответно амплитудите на напрежението върху кондензатора и на тока във веригата.

Токът изпреварва по фаза напрежението върху кондензатора с $\pi/2$, както скоростта изпреварва по фаза отклонението при хармонично механично трептене с $\pi/2$.

И така, след внасяне на електромагнитна енергия в LC -кръг започват перио-

дични процеси, при които характеризиращите ги физични величини се изменят с времето по синусов закон. Ето защо тези процеси се наричат *хармонични електромагнитни трептения*. Периодът на електромагнитните трептения в LC -кръг е

$$(82.9) \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Трептенията в LC -кръг се наричат още *свободни* или *собствени* трептения, защото се извършват без влияние на външни фактори и тяхната кръгова честота ω_0 се определя единствено от параметрите L и C на трептящия кръг.

Пример 82.1. Периодът на свободните трептения на LC -кръг е $T = 1$ ms. Определете индуктивността L на намотката, ако капацитетът на кондензатора е $C = 1$ μ F.

Решение. Индуктивността L на намотката се определя от формула (82.9) за периода на свободните електромагнитни трептения:

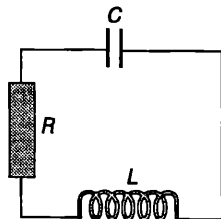
$$L = \frac{T^2}{4\pi^2 C} = \frac{(10^{-3} \text{ s})^2}{4\pi^2 (10^{-6} \text{ F})} = 0,025 \text{ H}.$$

Затихващи електромагнитни трептения в RLC -кръг

Трептенията, които се извършват в идеален LC -кръг, са незатихващи. Реалните трептящи кръгове имат електрично съпротивление и при протичане на ток се отделя топлина. Поради топлинните загуби трептенията затихват.

На *фиг.82-3* е показан трептящ кръг със загуби. Когато искаме да отчетем и съпротивлението R на намотката, трябва на схемата да заменим реалната намотка с идеална намотка с индуктивност L и свързан последователно с нея резистор със съпротивление R . Съгласно с правилото на Кирхоф за токовия контур сумата от падовете на напрежението върху кондензатора ($U_C = q/C$) и резистора ($U = RI$) е равна на самоинду-

Фиг.82-3.



цираното в намотката ЕДН ($\mathcal{E}_L = -L di/dt$):

$$\frac{q}{C} + RI = -L \frac{di}{dt},$$

откъдето след заместване на $I = dq/dt$ и $di/dt = dq^2/dt^2$ получаваме

$$(82.10) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0.$$

Полагаме $R/L = 2\beta$, $1/LC = \omega_0^2$ и стигаме до познатото уравнение на затихващ осцилатор

$$(82.11) \quad \frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0.$$

Следователно зарядът q се изменя по същия закон, както отклонението x (вж. уравнение (73.2) на стр.128) при затихващо трептене:

$$(82.12) \quad q = q_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Кръговата честота на затихващите електромагнитни трептения е

$$(82.13) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

В RLC -кръг възникват затихващи трептения само ако подкоренната величина в уравнение (82.13) е положителна, т.е. при

$$(82.14) \quad R < R_{кр} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Съпротивлението $R_{кр}$ се нарича *критично съпротивление*. Ако $R > R_{кр}$, кондензаторът се разрежда чрез аperiодичен процес и трептения не възникват.

Доброкачественост

За затихващите електромагнитни трептения се въвежда величината *доброкачественост* (Q -фактор) по същия начин, както при затихващите механични трептения. В §73 показахме, че Q -факторът на трептяща система с малък коефициент на затихване ($\beta \ll \omega_0$) е $Q = \frac{\omega_0}{2\beta}$. За електромагнитните трептения в RLC -кръг полагаме

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad 2\beta = \frac{R}{L}$$

и за доброкачествеността на трептящия

кръг получаваме

$$(82.15) \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Следователно доброкачествеността на RLC -трептящ кръг намалява при увеличаване на съпротивлението R .

Пример 82.2. RLC -кръг при съпротивление $R = 10 \, \Omega$ има доброкачественост $Q = 20$. Пресметнете критичното съпротивление $R_{кр}$ на трептящия кръг.

Решение. Трептящият кръг има голяма доброкачественост, поради което можем да използваме формула (82.15). Критичното съпротивление се изразява с уравнение (82.14). От двете уравнения получаваме $R_{кр} = 2QR = 400 \, \Omega$.

Задачи

1. Определете периода на свободните електромагнитни трептения в LC -кръг, съставен от кондензатор с капацитет $C = 2 \cdot 10^{-8} \, \text{F}$ и намотка с индуктивност $L = 8 \cdot 10^{-4} \, \text{H}$.

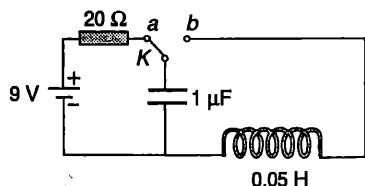
2. Честотата на свободните електромагнитни трептения в LC -кръг е $\nu_0 = 2 \, \text{kHz}$. Определете капацитета C на кондензатора, ако намотката има индуктивност $L = 0,04 \, \text{H}$.

3. Идеален трептящ кръг е съставен от кондензатор с капацитет $C = 2 \, \mu\text{F}$ и намотка с индуктивност $L = 0,02 \, \text{H}$. Определете максималната стойност на тока $I_{\max}$ във веригата, ако максималното напрежение върху кондензатора е $U_{0C} = 20 \, \text{V}$.

4. В трептящ кръг се извършват незатихващи електромагнитни трептения, при които максималният заряд на кондензатора е $q_0 = 2 \cdot 10^{-4} \, \text{C}$, а максималният ток през намотката е $I_0 = 2 \, \text{A}$. Колко е собствената кръгова честота ω_0 на трептящия кръг?

5. В електрическата верига, показана на фиг.82-4, ключът K дълго време е бил в положение a . След като ключът се постави в положение b определете: а) честотата ν_0 на електро-

Фиг.82-4.



магнитни трептения; б) максималния заряд на кондензатора; в) максималния ток през намотката.

6. Идеален трептящ кръг е съставен от намотка с индуктивност $L = 0,2 \, \text{H}$ и кондензатор с капацитет $C = 1 \, \mu\text{F}$. Определете интервала от време от момента, когато енергията на кондензатора е нула, до момента, в който енергията на електричното поле на кондензатора стане равна на енергията на магнитното поле на тока през намотката.

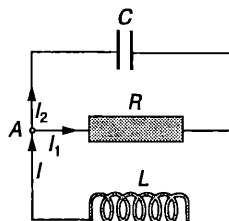
7. Колко ома е критичното съпротивление на трептящ кръг, съставен от намотка с индуктивност $4 \, \text{mH}$ и кондензатор с капацитет $10 \, \mu\text{F}$?

8. Определете Q -фактора на трептящ кръг с коефициент на затихване $\beta = 0,01\omega_0$, където ω_0 е собствената кръгова честота на трептящия кръг.

9. Трептящ кръг е съставен от кондензатор с капацитет $C = 5 \cdot 10^{-6} \, \text{F}$, намотка с индуктивност $L = 0,04 \, \text{H}$ и резистор със съпротивление $R = 2 \, \Omega$. Определете броя N на трептенията, след които максималният заряд на кондензатора ще намалее $e = 2,71 \dots$ пъти.

10. Трептящ кръг е съставен от кондензатор с капацитет $C = 3 \cdot 10^{-6} \, \text{F}$ и намотка с индуктивност $L = 0,02 \, \text{H}$. Определете съпротивлението R на намотката, ако доброкачествеността на трептящия кръг е $Q = 20$.

11. Определете честотата на затихващите електромагнитни трептения в трептящия кръг, показан на фиг.82-5. При какви стойности на съпротивлението R са възможни трептения?



Фиг.82-5.

Указание. Приложете правилата на Кирхоф за двата контура от фиг. 82-5 и за възловата точка A и получите уравнение от вида (82.11).

83. Променлив ток

Принудени електромагнитни трептения

Направената аналогия между свободните механични трептения и свободните електромагнитни трептения може да се пренесе и върху принудените трептения. Ако в RLC -веригата се включи източник на променливо ЕДН (фиг.83-1), във веригата възникват принудени електромагнитни трептения. Когато ЕДН на източника се изменя с времето по хармоничен (синусов) закон

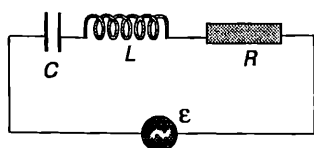
$$(83.1) \quad \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t,$$

след установяване на принудените трептения зарядът q върху кондензатора се изменя по аналогичен начин, както отклонението x при принудените механични трептения:

$$(83.2) \quad q = q_0 \sin(\Omega t + \varphi).$$

Кръговата честота Ω на принудените електромагнитни трептения е равна на кръговата честота, с която се изменя електродвижещото напрежение на източника. Максималната стойност (амплитудата) q_0 на заряда на кондензатора и фазовата разлика φ между изменението на заряда q и ЕДН $\mathcal{E}$ на източника се изразяват с уравнения, аналогични на уравнения (74.5) и (74.6) на стр.131, в които трябва да се поставят собствената кръгова честота ω_0 и коефициентът на затихване β на трептящия кръг. Също така масата m трябва да се замени с индуктивността L на намотката, а амплитудата F_0 на външната сила – с амплитудата $\mathcal{E}_0$ на електродвижещото напрежение на източника. Токът във веригата и падовете на напрежението върху отделните ѝ елементи също се изменят по синусов закон с кръгова честота Ω .

Фиг.83-1.



И така, електромагнитните и механичните трептения се описват с едни и същи уравнения. Между величините и параметрите, които ги характеризират, съществува аналогия, която е обобщена в табл.83.1.

Таблица 83.1. Аналогия между величините, характеризиращи механичните трептения и електромагнитните трептения.

Механична величина	Електромагнитна величина
Отклонение x	Заряд q
Скорост $v = \frac{dx}{dt}$	Електричен ток $I = \frac{dq}{dt}$
Маса m	Индуктивност L
Коефициент на еластичност k	Реципрочна стойност на капацитета $1/C$
Връщаща сила $F = -kx$	Напрежение върху кондензатора $U_C = q/C$
Сила на съпротивление $F_c = -bv$	Напрежение върху резистора $U_R = RI$
Външна сила $F = F_0 \sin \Omega t$	ЕДН на източник $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \Omega t$
Потенциална енергия $W = \frac{1}{2} kx^2$	Енергия на електрично поле $W_E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} \right) q^2$
Кинетична енергия $E_k = \frac{1}{2} mv^2$	Енергия на магнитното поле $W_B = \frac{1}{2} LI^2$

Аналогията между механичните и електромагнитните трептения се използва за анализ на сложни механични системи. Прави се електричен модел на механичната система. В съответната електрическа верига експериментално се измерват токовете и напреженията в отделните клонове и елементи, което дава възможност да се направят изводи за поведението на механичната система (например да се определят отклоненията и скоростите на отделните ѝ части).

Променлив ток

Електродвижещото напрежение на техническите електрически генератори се изменя по синусов закон и създадените от

тях токове също са синусоидални. Синусоидалните токове имат голямо практическо значение, поради което ще им отделим специално място. По синусов закон се изменя токът в електрическата мрежа, както и токовете, използвани в промишлеността и в повечето електротехнически уреди и апарати. Прието е под променлив ток да се разбират преди всичко синусоидалните токове. Ще се спрем на основните закономерности в електрическа верига с променлив ток.

Активно, индуктивно и капацитивно съпротивление

Да разгледаме електрическа верига с променлив ток, която съдържа последователно свързани резистор със съпротивление R , намотка с индуктивност L и кондензатор с капацитет C (фиг.83-2). През трите елемента тече един и същ променлив ток

$$(83.3) \quad I = I_0 \sin \Omega t.$$

Ще определим напреженията върху резистора (U_R), намотката (U_L) и кондензатора (U_C), ако е известен токът I . Моментните стойности на тока I и напрежението U върху резистора са свързани със закона на Ом

$$(83.4) \quad U_R = RI = RI_0 \sin \Omega t = U_{0R} \sin \Omega t,$$

където

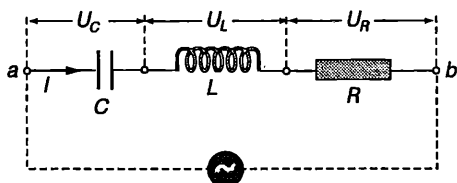
$$(83.5) \quad U_{0R} = RI_0$$

е максималната стойност (амплитудата) на напрежението върху резистора.

Тъй като намотката е идеална (нейното съпротивление е нула), трябва приложеното върху нея напрежение U_L изцяло да се компенсира от самоиндуцираното напрежение ε_L (в противен случай през намотката ще тече безкрайно голям ток), т.е. трябва да е в сила равенството

$$U_L + \varepsilon_L = U_L - L di/dt = 0.$$

Фиг.83-2.



От него изразяваме напрежението върху намотката

$$(83.6) \quad U_L = L \frac{di}{dt} = L \Omega I_0 \cos \Omega t = U_{0L} \sin \left(\Omega t + \frac{\pi}{2} \right),$$

където

$$(83.7) \quad U_{0L} = \Omega L I_0$$

е амплитудата на напрежението.

Напрежението U_C и зарядът q върху кондензатора са свързани с равенството $U_C = q/C$. От друга страна, токът е равен на скоростта, с която се изменя зарядът върху кондензатора: $I = dq/dt$. Интегрираме последното уравнение и получаваме законна, по който се изменя зарядът q :

$$q = \int I dt + q_1 = I_0 \int \sin \Omega t dt + q_1 = -\frac{I_0}{\Omega} \cos \Omega t + q_1.$$

Константата q_1 има физически смисъл на постоянен заряд върху кондензатора. Такъв заряд би имало, ако например във веригата освен източник на променливо ЕДН е включен и източник на постоянно напрежение. Ние няма да разглеждаме този случай и ще положим $q_1 = 0$. Тогава

$$(83.8) \quad U_C = \frac{q}{C} = -\frac{I_0}{\Omega C} \cos \Omega t = U_{0C} \sin \left(\Omega t - \frac{\pi}{2} \right),$$

където

$$(83.9) \quad U_{0C} = \frac{1}{\Omega C} I_0$$

е амплитудата на напрежението върху кондензатора.

От уравнения (83.4), (83.6) и (83.8) се вижда, че: 1. напреженията върху резистора (U_R), намотката (U_L) и кондензатора (U_C) се изменят по синусов закон със същата кръгова честота Ω , както токът във веригата; 2. напрежението върху резистора е във фаза с тока, напрежението върху намотката изпреварва по фаза тока с $\pi/2$, а напрежението върху кондензатора изостава по фаза от тока с $\pi/2$, т.е. U_L и U_C са в противофаза.

Сравняването на уравнения (83.5), (83.7) и (83.9) показва, че между амплитудите на тока и напреженията върху отделните елементи от веригата съществува връзка, аналогична на закона на Ом при постоянните токове ($U = RI$). Величините

$$(83.10) \quad X_L = \frac{U_{0L}}{I_0} = \Omega L;$$

$$(83.11) \quad X_C = \frac{U_{0C}}{I_0} = \frac{1}{\Omega C},$$

равни на отношението на амплитудите на напрежението и тока, подобно на съпротивлението R , се измерват в омове. Наричат се *индуктивно съпротивление* на намотката (X_L) и *капацитивно съпротивление* на кондензатора (X_C).

Съпротивлението R на резистора се нарича *активно съпротивление*, тъй като при протичане на ток в резистора се отделя количество топлина. Индуктивното и капацитивното съпротивление се наричат още *реактивни съпротивления*. Идеалната намотка и идеалният кондензатор имат само реактивно съпротивление: при протичане на ток в тях не се отделя топлина.

За разлика от активното съпротивление, реактивните съпротивления зависят от честотата. От уравнения (83.10) и (83.11) следва, че при намаляване на кръговата честота Ω индуктивното съпротивление намалява, а капацитивното съпротивление нараства. В граничния случай, когато $\Omega \rightarrow 0$, $X_C \rightarrow \infty$ и $X_L \rightarrow 0$, което отразява известните факти, че постоянен ток не преминава през кондензатор, а идеална намотка ($R = 0$) не оказва съпротивление на постоянен ток, тъй като тогава в нея не се индуцира ЕДН. Във верига с променлив ток намотка и кондензатор имат противоположно поведение. При ниски кръгови честоти реактивното съпротивление на кондензатора е голямо, а на намотката – малко. Във високочестотната област е обратно: кондензаторът има малко реактивно съпротивление, а намотката е с голямо съпротивление. Бихме могли обобщено да кажем, че намотките пропускат ниските честоти и задържат високите честоти, докато кондензаторите, обратно, пропускат високите честоти и задържат

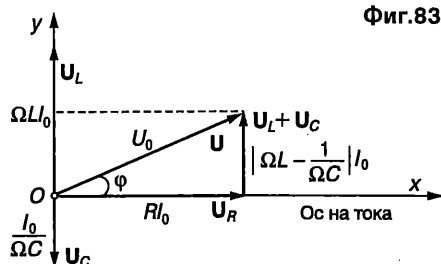
ниските честоти. Тези свойства на кондензаторите и намотките се използват в електрическите филтри.

Импеданс

Моментната стойност U на напрежението между точките a и b (фиг.83-2) е равна на сумата от моментните стойности на напреженията върху резистора (U_R), намотката (U_L) и кондензатора (U_C):

$$(83.12) \quad U = U_R + U_L + U_C.$$

Тъй като между напреженията има фазови разлики, амплитудата U_0 на напрежението U не е равна на сумата от амплитудите на напреженията върху отделните последователно свързани елементи. Ще използваме метода на векторните диаграми, за да определим U_0 . Представяме тока I и напреженията U_R , U_L и U_C с вектори, които се въртят с ъглова скорост Ω около началото O на координатната система xu . Нека в даден момент векторът на тока да е насочен по оста x . Ще наречем оста x *ос на тока*. През последователно свързаните елементи на веригата от фиг.83-2 тече един и същ ток, затова можем да определяме посоките на векторите U_R , U_L и U_C спрямо оста на тока: тя се задава от фазовата разлика между тока и съответното напрежение. Напрежението върху резистора е във фаза с тока, поради което векторът U_R е насочен по оста на тока (фиг.83-3). Неговият модул е равен на амплитудата на напрежението: $U_{0R} = RI_0$. Напрежението върху намотката изпреварва по фаза тока с $\pi/2$, затова на векторната диаграма векторът U_L , с модул $U_{0L} = \Omega LI_0$, сключва ъгъл $\pi/2$ с оста на тока. Ъглите се отчитат от оста на тока, като за положителна се приема посоката, обратна на посоката на движение на часовата стрелка. По аналогичен начин се построява векторът U_C с



Фиг.83-3.

модул $U_{0C} = \frac{1}{\Omega C} I_0$, който сключва ъгъл $-\pi/2$ с оста на тока. Напрежението между точките a и b се изразява с вектора $\mathbf{U} = \mathbf{U}_R + (\mathbf{U}_L + \mathbf{U}_C)$, чийто модул се определя с помощта на питагоровата теорема от правоъгълния триъгълник на *фиг.83-3*:

$$(83.13) \quad U_0 = I_0 \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2} = I_0 Z.$$

Величината

$$(83.14) \quad Z = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + X^2}$$

се нарича *импеданс* на веригата. Импедансът има две съставлящи: активно съпротивление R и реактивно съпротивление

$$X = \Omega L - \frac{1}{\Omega C}.$$

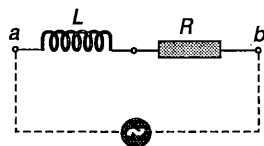
Ъгълът φ , който векторът $\mathbf{U}$ сключва с оста на тока (*фиг.83-3*), е равен на фазовата разлика между напрежението U и тока I :

$$(83.15) \quad \cos \varphi = \frac{U_{0R}}{U_0} = \frac{RI_0}{ZI_0} = \frac{R}{Z}.$$

Пример 83.1. Намотка с активно съпротивление $R = 10 \Omega$ е включена към електрическата мрежа ($\nu = 50$ Hz). Определете индуктивността L на намотката, ако фазовата разлика между тока и напрежението върху намотката е $\pi/3$.

Решение. Намотка с активно съпротивление може да се разглежда като идеална намотка (без активно съпротивление), последователно на която е свързан резистор със съпротивление R (*фиг.83-4*). Във формула (83.15) заместяваме $\varphi = \pi/3$ и получаваме $Z = 2R$, където Z е импедансът на веригата. Реактивното съпротивление на веригата е $X = X_L = \Omega L = 2\pi\nu L$. Заместваме Z и X във формулата за импеданс

Фиг.83-4.



са $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ и определяме индуктивността на намотката:

$$L = \frac{R\sqrt{3}}{2\pi\nu} = 55 \text{ mH}.$$

Мощност на променлив ток

Променливите токове са квазистационарни (вж. §61). За моментните стойности на величините, които ги характеризират, са в сила същите зависимости, както при постоянните токове. Моментната мощност P на променлив ток се изразява със същото уравнение, както мощността на постоянния ток:

$$(83.16) \quad P = UI,$$

където U и I са моментните стойности на напрежението и тока в разглежданата част от веригата: например между точките a и b от веригата, чиято схема е показана на *фиг.83-2*.

Моментната мощност е величина, която непрекъснато се изменя с течение на времето (по периодичен закон), и от нея не може непосредствено да се получи представа каква енергия консумира веригата при продължително протичане на променлив ток. За да се определи консумираната електроенергия, използва се величината *средна мощност на променливия ток*, която се получава от моментната мощност след осредняване за продължителен интервал от време. Тъй като U и I са периодични функции, достатъчно е осредняването да се извърши за време, равно на периода T . Заместваме моментните стойности на тока (83.3) и напрежението (83.6) в уравнение (83.16):

$$P = I_0 \sin(\Omega t) U_0 \sin(\Omega t + \varphi),$$

където φ е фазовата разлика между I и U . С помощта на тригонометричното тъждество (А.48) (вж. част 1, стр.234) преобразуваме горното равенство във вида

$$P = U_0 I_0 \sin^2 \Omega t \cos \varphi + U_0 I_0 \sin \Omega t \cos \Omega t \sin \varphi.$$

Средната стойност на $\sin^2 \Omega t$ е $1/2$, а средната стойност на $\sin \Omega t \cos \Omega t = (1/2) \sin 2\Omega t$ е нула. Следователно

(83.17)

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi.$$

Величината $\cos \varphi$ се нарича *фактор на мощността*. Следователно средната мощност на тока в променливотокова верига зависи не само от амплитудите на напрежението (U_0) и тока (I_0), но и от фазовата разлика между тях. Тази зависимост се изразява с фактора на мощността $\cos \varphi$. Ако реактивното съпротивление на веригата е нула, тогава импедансът е равен на активното съпротивление ($Z = R$) и съгласно с уравнение (83.15) $\cos \varphi = R/Z = 1$. Такъв е случаят, когато например веригата съдържа само резистор със съпротивление R . Тогава средната мощност на тока през резистора е

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 = U_{\text{ef}} I_{\text{ef}},$$

където величините

$$(83.18) \quad U_{\text{ef}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad I_{\text{ef}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

се наричат *ефективни стойности* на напрежението (U_{ef}) и на тока (I_{ef}). Ефективните стойности са равни на големината на тока и напрежението на такъв постоянен ток, който отделя в дадения резистор мощност, равна на средната мощност на променливия ток.

Ще отбележим, че уредите за измерване на променлив ток (цифрови и стрелкови амперметри и волтметри) показват ефективните стойности на тока и напрежението.

Ако веригата има само реактивно съпротивление ($R = 0$), тогава съгласно с уравнения (83.15) и (83.17) $\cos \varphi = 0$ и $\bar{P} = 0$. Следователно средната мощност на тока през идеална намотка и идеален кондензатор, както и във верига, съдържаща само такива елементи, е равна на нула. Протичането на ток е свързано само с периодични изменения на енергията: енергията на електричното поле на кондензаторите се преобразува в енергия на магнитното поле на тока през намотките и обратно, като едновременно с това се извършва непрекъснат обмен на енергия между източника и веригата. Само при наличие на елементи с активно съпротив-

ление част от електричната енергия на източника необратимо се преобразува във вътрешна енергия и в тези елементи се отделя топлина.

Пример 83.2. Волтметър, който е включен към електрическата мрежа, измерва напрежение 220 V. Определете амплитудата на това напрежение.

Решение. Волтметърът измерва ефективната стойност U_{ef} на напрежението. Амплитудата на напрежението е

$$U_0 = U_{\text{ef}} \sqrt{2} = 311 \text{ V}.$$

Резонанс

Нека изменяме кръговата честота Ω на източника от електрическата верига, показана на *фиг.83-2*, при постоянна амплитуда U_0 на напрежението между точките *a* и *b*. Ще представим средната мощност на тока във веригата като функция на Ω . Заменяме $\cos \varphi = R/Z$ и $I_0 = U_0/Z$ в уравнение (83.17) и за средната мощност на тока получаваме

$$(83.19) \quad \bar{P} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2 R}{Z^2} = \frac{1}{2} \frac{U_0^2 R}{R^2 + (\Omega L - \frac{1}{\Omega C})^2},$$

където сме отчели уравнение (83.14). От уравнение (83.19) следва, че средната

мощност е максимална ($\bar{P}_{\text{max}} = \frac{U_0^2}{2R}$) при

кръгова честота, за която реактивното съпротивление е равно на нула. От условието $\Omega L - 1/\Omega C = 0$ определяме кръговата честота, при която средната мощност е максимална:

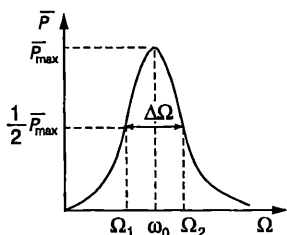
$$(83.20) \quad \Omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

По аналогия с механичните трептения, явлението се нарича резонанс: консумираната от веригата електрична мощност е максимална при кръгова честота на източника, равна на кръговата честота на свободните електромагнитни трептения в идеален трептящ кръг, съставен от намотка и кондензатор, които имат същите стой-

ности на индуктивността L и на капацитетата C , както намотката и кондензатора от разглежданата електрическа верига. Честотата Ω_p се нарича *резонансна честота*.

Графиката на функцията $\bar{P}(\Omega)$ се нарича *резонансна крива* (фиг.83-5). Кръговите честоти Ω_1 и Ω_2 , при които средната мощност е равна на половината от максималната мощност, определят ширината на резонансната крива $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1$. Доказва се (вж. пример 83.3), че

$$(83.21) \quad \Delta\Omega = \frac{R}{L}.$$



Фиг.83-5.

Следователно, ако се намалява активното съпротивление R на веригата, максималната мощност нараства, а ширината на резонансната крива намалява, т.е. резонансът става по-силно изразен.

Забележка. При изменение на кръговата честота Ω на източника амплитудите на заряда (q_0) и на напрежението (U_{0C}) на кондензатора също преминават през максимум. Резонансните криви $q_0(\Omega)$ и $U_{0C}(\Omega)$ имат същия вид, както резонансните криви на амплитудата $A(\Omega)$ при принудените механични трептения (вж. фиг.74-2 на стр.133). В този случай резонансната честота зависи от коефициента на затихване на електромагнитните трептения и се изразява с формула (74.9):

$$\Omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Пример 83.3. Докажете, че ширината на резонансната крива на средната мощност на променливия ток се изразява с уравнение (83.21). Определете Q -фактора на веригата, ако са известни резонансната честота и ширината на резонансната крива.

Решение. В уравнението за средната мощност

$$(83.19) \text{ полагаме } \bar{P} = \frac{\bar{P}_{\max}}{2} = \frac{U_0^2}{4R} \text{ и получаваме}$$

биквадратното уравнение

$$\left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2 = R^2$$

за кръговата честота Ω . То е еквивалентно на следните две квадратни уравнения:

$$\Omega L - \frac{1}{\Omega C} = R \text{ и } \Omega L - \frac{1}{\Omega C} = -R.$$

Всяко от тези уравнения има по един положителен корен (отрицателните корени нямат физичен смисъл):

$$\Omega_1 = \frac{-\frac{R}{L} + \sqrt{R^2 + \frac{4}{LC}}}{2}; \quad \Omega_2 = \frac{\frac{R}{L} + \sqrt{R^2 + \frac{4}{LC}}}{2}.$$

Следователно: $\Delta\Omega = \Omega_2 - \Omega_1 = R/L$.

Относителната ширина на резонансната крива е

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega_p} = \frac{\Delta\Omega}{\Omega_0} = \frac{R/L}{(1/\sqrt{LC})} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q},$$

където $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ е добротактествеността на

RLC -веригата. Ако експериментално се измери резонансната крива на средната мощност, от нейната ширина $\Delta\Omega$ може да се определи добротактествеността на електрическата верига по формулата

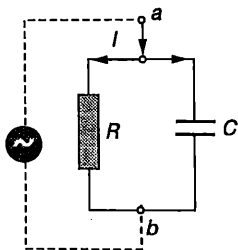
$$(83.22) \quad Q = \frac{\Omega_p}{\Delta\Omega}.$$

Колкото по-тясна е резонансната крива, толкова по-голям е Q -факторът.

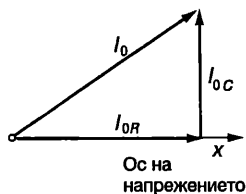
Поражения от електричен ток

Пораженията върху човешкия организъм, предизвикани от протичане на електричен ток, зависят главно от два фактора: големината на тока и пътя, по който този ток тече. Особено опасни са случаите, когато токът засяга мозъка или сърцето.

При зададено външно напрежение стойността на тока се определя от електричния импеданс Z на тялото. Човешкото тяло, освен активно съпротивление R , има и реактивно съпротивление X с капацитивен характер. По отношение на про-



Фиг.83-6.



Фиг.83-7.

менливия ток тялото може да се разглежда като успоредно свързани резистор и кондензатор (фиг.83-6). При такова свързване общият ток е сума от токовете през резистора и кондензатора, т.е. той е по-голям от тока $I = U/R$, който би протекъл през резистора, ако приложеното напрежение е постоянно.

Съпротивлението R на тялото в най-голяма степен зависи от състоянието на кожата и може да се изменя в много широки граници. При суха кожа то може да достигне 1000 k Ω , докато влажната кожа намалява съпротивлението до 1 k Ω . Наличието на драскотини и рани по кожата води до допълнително намаляване на съпротивлението, тъй като кръвта и вътрешните тъкани съдържат свободни йони и имат много малко електрично съпротивление.

Токове с големина над 10 mA предизвикват рязко съкращаване на мускулите, при което може да се окаже, че човек не е в състояние сам да се освободи от проводника, който случайно е докоснал. Възможно е спиране на дишането. Първата помощ включва освобождаване на пострадалия от електричното напрежение, като се вземат мерки помагачият да не попадне също под напрежение. След това се прилага изкуствено дишане.

Токове с големина над 70 mA, засягащи сърцето, предизвикват неконтролируеми хаотични съкращения на сърдечния мускул, наречени *фибрилации*. Фибрилациите нарушават кръвообръщението и могат да доведат до смърт, ако не бъдат своевременно прекратени. При пряк контакт със сърцето, например чрез имплантирани електроди, фибрилации могат да настъпят дори при много слаби токове (от порядъка на 20 μ A).

Пример 83.4. Човек попада под постоянно напрежение $U = 120$ V. Определете съпротивлението R на тялото му, ако през него протича ток $I = 6$ mA. Определете капацитета C на човека, ако променливо напрежение с честота $\nu = 50$ Hz и ефективна стойност $U_{ef} = 120$ V поражда два пъти по-голям ток ($I_{ef} = 12$ mA).

Решение. Активното съпротивление на тялото е $R = U/I = 20$ k Ω . Моментната стойност i на пълния ток е сума от моментните стойности на токовете през резистора (i_R) и кондензатора (i_C). Върху успоредно свързаните резистор и кондензатор е приложено едно и също напрежение, а между токовете съществува фазова разлика. За да определим амплитудата (или ефективната стойност) на пълния ток I , ще използваме метода на векторните диаграми. Посоката на векторите на тока ще определяме спрямо вектора на напрежението (ос на напрежението), което в случая е еднакво за двата елемента. От векторната диаграма (фиг. 83-7), като отчетем уравнения (83.5) и (83.9), получаваме

$$I_0 = \sqrt{I_{0R}^2 + I_{0C}^2} = U_0 \sqrt{\frac{1}{R^2} + \omega^2 C^2},$$

$$\text{откъдето } C = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\left(\frac{I_0}{U_0}\right)^2 - \frac{1}{R^2}} = 0,28 \text{ } \mu\text{F}.$$

Задачи

1. Намотка с индуктивност $L = 100$ mH е включена в електрическа верига с честота $\nu = 200$ Hz. Факторът на отделената в намотката мощност е $\cos\phi = 0,1$. Определете активното съпротивление на намотката.
2. Към електрическата мрежа ($U_{ef} = 220$ V, $\nu = 50$ Hz) са включени последователно кондензатор с капацитет $C = 6$ mF и идеална намотка с индуктивност $L = 0,2$ H. Определете ефективната стойност на тока във веригата и фазовата разлика между тока и напрежението.
3. Определете импеданса Z и фактора на мощността $\cos\phi$ на електрична верига, съдържаща кондензатор с капацитет C , намотка с индуктивност L и резистор със съпротивление R . Трите елемента са свързани успоредно.

Указание. Начертайте схема на веригата. Върху трите елемента е подадено едно и също напрежение. Постройте векторна диаграма на токовете, подобна на диаграмата от фиг.83-7.

84. Свойства на електромагнитните вълни

Основните характеристики на електромагнитните (ЕМ) вълни се извеждат непосредствено като следствия от уравненията на Максвел (вж. §68). Строгий математичен извод обаче излиза извън рамките на задачите, които си поставя тази книга. Затова ще се ограничим само с дефиниране на основните величини, които описват ЕМ вълни, ще дадем най-важните съотношения между тях и ще ги илюстрираме с някои примери. Ще използваме също така общото в свойствата на механичните и ЕМ вълни.

Следствия от уравненията на Максвел

1. Електромагнитните вълни представляват взаимно свързани електрични и магнитни полета, които се изменят в пространството и времето. Източници на такива полета са движещи се с ускорение електрични заряди. Веднъж възникнало, променливото електромагнитно поле съществува независимо от своя източник. Измененията на електричното поле пораждат магнитно поле, а измененията на магнитното поле поддържат електричното поле. Тези изменения се предават от точка на точка и се разпространяват в пространството във вид на ЕМ вълна. В неограничена среда, подобно на бягащите механични вълни, се разпространяват бягащи ЕМ вълни. В област, ограничена например от проводящи стени, могат да възникнат стоящи ЕМ вълни. Тъй като ЕМ поле се създава както в материална среда, така и във вакуум, за разлика от механичните вълни, ЕМ вълни се разпространяват и във вакуум. В този параграф ще се ограничим с разглеждането само на бягащи електромагнитни вълни във вакуум.

2. Скоростта на разпространение на ЕМ вълни във вакуум е

$$(84.1) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}},$$

където ϵ_0 е електричната константа, а μ_0 е магнитната константа. Тази скорост е рав-

на на скоростта на светлината във вакуум

$$c = 2,99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s.}$$

Светлината също е ЕМ вълна. Във вакуум всички електромагнитни вълни имат една и съща фазова скорост, която не зависи от честотата.

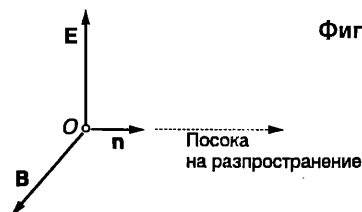
3. Електромагнитната вълна се характеризира с вектора на интензитета $\mathbf{E}$ на електричното поле и с вектора на магнитната индукция $\mathbf{B}$. В дадена точка от пространството двата вектора се изменят с течение на времето синфазно: едновременно достигат максималните си стойности и едновременно стават равни на нула. Техните моментни стойности са свързани със съотношението

$$(84.2) \quad E = cB.$$

4. ЕМ вълни са напречни вълни. Във всеки момент от времето за всяка точка от пространството, обхванато от вълната, векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ са взаимно перпендикулярни и лежат в равнина, която е перпендикулярна на посоката на разпространение на вълната. Нека в даден момент от времето векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ за ЕМ вълна в точка O са насочени, както е показано на *фиг.84-1*. Единичният вектор $\mathbf{n}$, който е перпендикулярен на равнината, определена от векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, показва посоката на разпространение на вълната в точка O . От уравненията на Максвел се получава следната връзка между трите вектора:

$$(84.3) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E} = c\mathbf{B}.$$

Векторното уравнение (84.3) показва, че векторите $\mathbf{n}$, $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ са взаимно перпендикулярни и образуват дясна тройка: ако за дадена точка в определен момент от времето са известни посоките на векторите $\mathbf{n}$ и $\mathbf{E}$, посоката на $\mathbf{B}$ може да се определи по правилото на дясната ръка. Освен това от уравнение (84.3) следва, че в дадена точка от ЕМ вълна векторът на интензитета $\mathbf{E}$ на електричното поле и век-



торът на магнитната индукция **B** се изменяят синфазно, а техните моментни стойности са свързани с равенството (84.2).

Плоски монохроматични ЕМ вълни

Когато във всяка точка от ЕМ вълна проекциите на векторите **E** и **B** върху координатните оси на инерциална отправна система се изменят с течение на времето по синусов закон с една и съща кръгова честота ω , вълната се нарича *хармонична* или *монохроматична* вълна. Терминът *монохроматична* (едноцветна) идва от субективното възприятие на човешкото око за цвят, който се определя от честотата (дължината на вълната) на светлинните вълни.

Най-прости за описване са плоските монохроматични ЕМ вълни. Както при плоските хармонични механични вълни, техните вълнови фронтове представляват успоредни равнини, които са перпендикулярни на посоката на разпространение на вълната. Да разгледаме плоска монохроматична вълна, която се разпространява по посока на оста x на правоъгълна координатна система. Векторите **E** и **B** лежат в равнината yz и във всеки момент от времето са взаимно перпендикулярни. Проекциите на вектора на интензитета **E** на електричното поле върху координатните оси са

$$(84.4) \quad \begin{aligned} E_y &= E_{0y} \sin(\omega t - kx + \varphi_{0y}); \\ E_z &= E_{0z} \sin(\omega t - kx + \varphi_{0z}); \quad E_x = 0, \end{aligned}$$

където $k = 2\pi/\lambda$ е вълновото число. Дължината на вълната λ , честотата $\nu = \omega/2\pi$ и скоростта c на електромагнитната вълна са свързани със същото съотношение, както при механичните вълни

$$(84.5) \quad c = \lambda \nu,$$

което е в сила за всички видове хармонични вълни.

Пример 84.1. Сравнете честотите на звукова вълна и ЕМ вълна, които във въздуха имат еднаква дължина на вълната.

Решение. Скоростта на звука във въздуха е $u = 340$ m/s, а скоростта на ЕМ вълни е приблизително същата, като във вакуум: $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. Тъй като $u = \lambda \nu_{\text{зв}}$ и $c = \lambda \nu_{\text{ЕМ}}$, за отношението

на честотите на двете вълни, които имат еднаква дължина λ , получаваме

$$\frac{\nu_{\text{ЕМ}}}{\nu_{\text{зв}}} = \frac{c}{u} \approx 110^6.$$

Следователно ЕМ вълна има около един милион пъти по-висока честота от звукова вълна със същата дължина на вълната. Това се дължи на много голямата разлика в скоростите на звука и на електромагнитните вълни.

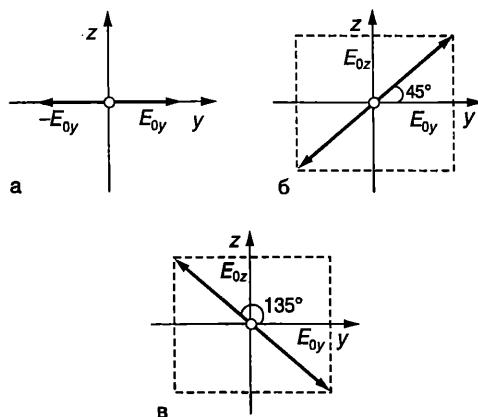
Състояние на поляризация

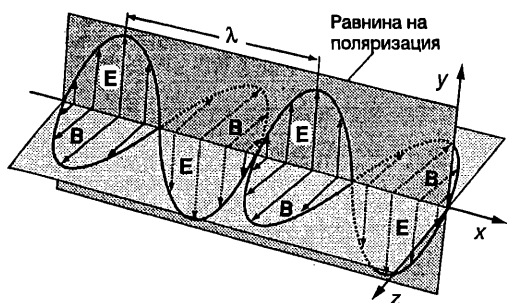
В общия случай амплитудите E_{0y} и E_{0z} на проекциите на вектора **E** и началните фази φ_{0y} и φ_{0z} за дадена точка от ЕМ вълна се изменят хаотично с течение на времето. Когато отношението на двете амплитуди и разликата във фазите не се изменя с течение на времето, т.е. когато

$$(84.6) \quad \frac{E_{0z}}{E_{0y}} = \text{const}, \quad \varphi_{0y} - \varphi_{0z} = \text{const},$$

вълната се нарича *поляризирана*. Съотношенията (84.6) определят *състоянието на поляризация*. Ако $\varphi_{0y} = \varphi_{0z}$ или $\varphi_{0y} = \varphi_{0z} + \pi$, вълната е *линейно* (плоско) поляризирана. При линейно поляризирана вълна електричният вектор извършва трептене в точно определено направление, което не се изменя с течение на времето. Например при $E_{0z} = 0$ векторът **E** винаги е насочен по направление на оста y (фиг.84-2а). При $E_{0y} = E_{0z}$ и $\varphi_{0y} = \varphi_{0z}$ електричният вектор е насочен в направление, което сключва ъгъл

Фиг.84-2.





Фиг.84-3.

45° с оста y (фиг.84-2б). Ако $E_{0y} = E_{0z}$ и $\varphi_{0y} = \varphi_{0z} + \pi$, ъгълът е 135° (фиг.84-2в).

На фиг.84-3 са показани векторите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в даден момент t за различни точки от оста x , по която се разпространява линейно поляризирана плоска монохроматична вълна. Всички вектори $\mathbf{E}$ лежат в равнината xu , която се нарича *равнина на поляризация*. Равнината на поляризация се определя от посоката на разпространение на вълната и направлението, в което е насочен електричният вектор. Векторите $\mathbf{B}$ лежат в равнината xz и са перпендикулярни на $\mathbf{E}$.

Когато $E_{0y} = E_{0z}$ и $\varphi_{0y} = \varphi_{0z} \pm \pi/2$, вълната е с *кръгова поляризация*. Както е известно (вж. §72), при събиране на две взаимно перпендикулярни хармонични треп-

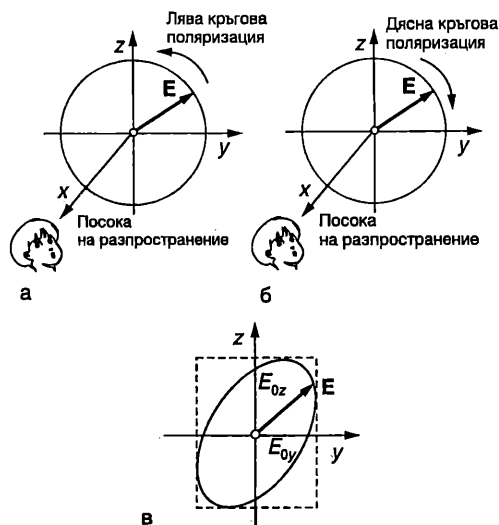
тения с еднакви честоти и амплитуди, между които има фазова разлика $\pi/2$, се получава движение по окръжност. При $\varphi_{0y} = \varphi_{0z} + \pi/2$, гледано срещу посоката на разпространение на вълната (фиг.84-4а), електричният вектор описва окръжност, движейки се в противоположната на часовата стрелка посока. В този случай вълната е с лява кръгова поляризация. Ако $\varphi_{0y} = \varphi_{0z} - \pi/2$, векторът $\mathbf{E}$ описва окръжност, като се върти по посока на часовата стрелка (фиг.84-4б): вълната е с дясна кръгова поляризация.

В общия случай $E_{0y}/E_{0z} = \text{const}$ и $\varphi_{0y} - \varphi_{0z} = \Delta\varphi_0$, където $\Delta\varphi_0$ е произволна, но постоянна във времето фазова разлика. Такава вълна е *елиптично поляризирана* – електричният вектор описва елипса (фиг.84-4в). Вълна с произволна, в общия случай елиптична поляризация, може да се представи като суперпозиция от две линейно поляризирани в две взаимно перпендикулярни направления вълни или като суперпозиция от две кръгово поляризиращи вълни: едната с лява, а другата с дясна кръгова поляризация. В зависимост от характера на задачата, която се решава, може да се предпочете едното или другото представяне. Неполаризираните вълни, например естествената светлина от Слънцето, формално също могат да се разглеждат като суперпозиция от две линейно поляризиращи във взаимно перпендикулярни направления вълни с еднакви амплитуди, фазовата разлика между които обаче се изменя хаотично с течение на времето.

Задачи

1. Максималната стойност на интензитета на електричното поле на електромагнитна вълна, която се разпространява във вакуум, е 200 V/m . Колко е максималната стойност на магнитната индукция?
2. Определете отношението E/H на интензитетите на електричното поле (E) и на магнитното поле (H) за електромагнитна вълна, която се разпространява във вакуум.

Фиг.84-4.



85. Енергия на електромагнитните вълни

Плътност на енергията

Обемната плътност w на енергията на електромагнитното поле във вакуум е равна на сумата от обемната плътност на енергията на електричното поле $w_E = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$ (вж. §49) и обемната плътност на енергията на магнитното поле $w_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$ (вж. §67):

$$(85.1) \quad w = w_E + w_B = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

В електромагнитната вълна интензитетът на електричното поле E и индукцията на магнитното поле B се изменят с течение на времето, поради което уравнение (85.1) изразява моментната стойност на плътността на енергията. Като се отчете, че за ЕМ вълна моментните стойности на E и B са свързани със съотношението $B = E/c$ и се вземе предвид уравнение

$$(84.1) \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \text{ за скоростта } c \text{ на ЕМ}$$

вълни във вакуум, формулата за плътността на енергията на магнитното поле на вълната може да се запише във вида

$$w_B = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{E}{c} \right)^2 = \frac{\epsilon_0 \mu_0}{2\mu_0} E^2 = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}.$$

Следователно за електромагнитните вълни обемната плътност на магнитната енергия е равна на обемната плътност на електричната енергия: $w_B = w_E$. Тогава

$$(85.2) \quad w = w_E + w_B = 2w_E = \epsilon_0 E^2.$$

Интензитетът на електричното поле E на линейно поляризирана в направление на оста y плоска монохроматична вълна, която се разпространява по оста x на правоъгълна координатна система, се изменя по синусовия закон $E_y = E_{0y} \sin(\omega t - kx)$.

Средната стойност на плътността на енергията за такава вълна е

$$(85.3) \quad \overline{w} = \epsilon_0 \overline{E^2} = \epsilon_0 E_{0y}^2 \overline{\sin^2(\omega t - kx)} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_{0y}^2.$$

Вектор на Пойнтинг

На фиг.85-1 е показан малък елемент от плоска повърхност с площ dA , разположен перпендикулярно на посоката на разпространение на плоска монохроматична електромагнитна вълна. За интервал от време dt вълната пренася през повърхността на елемента енергия dW , равна на енергията на електромагнитното поле в паралелепипед с обем $(cdt)dA$:

$$(85.4) \quad dW = w c dt dA = \epsilon_0 E^2 c dt dA = \epsilon_0 E B c^2 dt dA = \frac{1}{\mu_0} E B dt dA,$$

$$(85.5) \quad \text{където е отчетено, че } E = cB \text{ и } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}.$$

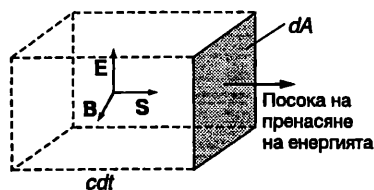
Плътността на потока на енергията, т.е. енергията, преминала за единица време през единица площ, разположена перпендикулярно на посоката на разпространение на бягащата ЕМ вълна, е

$$(85.5) \quad S = \frac{dW}{dA dt} = \frac{1}{\mu_0} E B.$$

Уравнение (85.5) се записва във векторна форма

$$(85.6) \quad \mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \times \mathbf{B},$$

където величината $\mathbf{S}$ се нарича *вектор на Пойнтинг* в чест на английския физик Джон Пойнтинг (1852–1914). Модулът на вектора на Пойнтинг е равен на плътността на потока на енергията, а посоката му



съпада с посоката на разпространение на ЕМ вълна, т.е. с посоката, в която се пренася енергията (фиг.85-1).

Интензитет на ЕМ вълни

Средната стойност на плътността на потока на енергията $\bar{S}$ се нарича *интензитет* /на електромагнитната вълна. От уравнение (85.5) и формулата $B = E/c$ за интензитета I се получава

$$(85.7) \quad I = \bar{S} = \epsilon_0 c \overline{E^2}.$$

Интензитетът на ЕМ вълна е равен на осреднената по времето енергия (средна енергия), която вълната пренася за единица време през единица площ, разположена перпендикулярно на посоката на разпространение.

Интензитетът на плоска, линейно поляризирана в направление на оста y монохроматична вълна, която се разпространява по оста x на правоъгълна координатна система, е

$$(85.8) \quad I = \epsilon_0 c E_{0y}^2 \sin^2(\omega t - kx) = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_{0y}^2.$$

Вълна с произволна поляризация се представя като суперпозиция на две линейно поляризирани в направление на осите y и z вълни с интензитети I_y и I_z . Общият интензитет е

$$(85.9) \quad I = I_{0y} + I_{0z} = \frac{1}{2} \epsilon_0 c (E_{0y}^2 + E_{0z}^2).$$

Това уравнение може да се използва и за неполяризирана монохроматична вълна. Такава вълна формално се разглежда като суперпозиция от две линейно поляризирани във взаимно перпендикулярни направления вълни с еднакъв интензитет, т.е. с еднакви амплитуди на електричните им полета: $E_{0y} = E_{0z} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, където E_0 е максималната стойност на интензитета на електричното поле на неполяризираната ЕМ вълна. От уравнение (85.9) за интензитета на неполяризираната ЕМ вълна се получава

$$(85.10) \quad I = \frac{1}{2} \epsilon_0 c E_0^2.$$

Ще отбележим, че в оптиката под интензитет на светлинните вълни обикновено се разбира величина, която е пропорционална на квадрата на амплитудата E_0 на вектора на интензитета на електричното поле на вълната ($I \propto E_0^2$), без да се пресмята коефициентът на пропорционалност.

Пример 85.1. Интензитетът на слънчевата радиация в горните слоеве на атмосферата на Земята е $I = 1400 \text{ W/m}^2$. Оценете амплитудите E_0 и B_0 на електромагнитното поле.

Решение. Слънцето излъчва електромагнитни вълни с различни честоти и амплитуди, които не са поляризирани. Пълният интензитет е равен на сумата от интензитетите на отделните монохроматични вълни. За оценка ще използваме прост модел, съгласно с който слънчевата радиация представлява плоска монохроматична вълна с амплитуда на интензитета на електричното поле E_0 . Тогава от уравнение (85.10) получаваме

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2(1400 \text{ W/m}^2)}{(8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})(3 \cdot 10^8 \text{ m/s})}} = 1030 \frac{\text{V}}{\text{m}};$$

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 3,4 \cdot 10^{-6} \text{ T}.$$

Ще обърнем внимание, че числените стойности на двете амплитуди силно се различават, но тъй като те се измерват в различни единици, не е коректно да бъдат сравнявани. Може да се сравнява например енергията, която се измерва в едни и същи единици: за електромагнитните вълни плътността на енергията на електричното поле е равна на плътността на енергията на магнитното поле.

Задачи

1. а) Покажете, че във вакуум интензитетът на бягаща плоска електромагнитна вълна с амплитуда на магнитната индукция B_0 се изразява

$$\text{с формулата } I = \frac{c B_0^2}{2\mu_0}.$$

б) Пресметнете интензитета I на плоска бягаща вълна с амплитуда на магнитната индукция $B_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ T}$.

2. Покажете, че векторът на Пойнтинг (85.6) се изразява с формулата $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, където $\mathbf{H}$ е интензитетът на магнитното поле на ЕМ вълна.

86. Излъчване на електро-магнитни вълни

Излъчване на точков заряд

След като се запознахме с някои основни свойства на ЕМ вълни, ще се спрем на въпроса как възникват тези вълни, т.е. кои са техните източници.

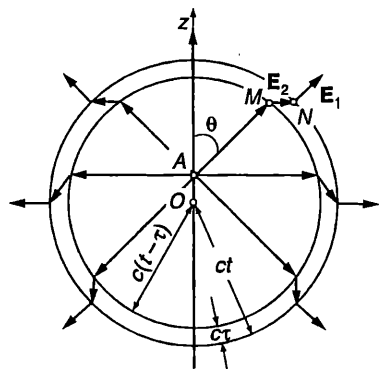
Електромагнитните вълни се излъчват от движещи се с ускорение електрични заряди. При равномерно праволинейно движение заредените частици не излъчват. Полето на излъчване на движещ се с ускорение точков заряд може да се определи с помощта на уравненията на Максвел. Тук ще разгледаме един опростен модел, предложен от Дж. Томсън, който позволява да се разбере механизмът на излъчването и да се получат основните количествени закономерности.

На *фиг. 86-1* е показан точков заряд q ($q > 0$), който отначало се намира в покой в точка O . В момента $t = 0$ зарядът започва да се движи с постоянно ускорение a по посока на оста z . За малък интервал от време τ зарядът достига скорост $v = a\tau$, след което продължава да се движи праволинейно и равномерно. За време $t \gg \tau$ зарядът изминава пътя

$$OA = \frac{1}{2}a\tau^2 + (t - \tau)v \approx vt$$

между точките O и A . Разстоянието, изминато с ускорение, е пренебрежимо малко в сравнение с OA , защото по условие $t \gg \tau$.

Фиг.86-1.



Измененията на полето, свързани с ускорителното движение на заряда, се разпространяват със скоростта на светлината c . В момента t тези изменения още не са достигнали до точките, лежащи извън сферата с радиус ct и център в точка O . На разстояние $r > ct$ от точка O електричното поле е същото, каквото създава неподвижен заряд q , поставен в точка O . Интензитетът на това електростатично поле е

$$(86.1) \quad E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

В сфера с радиус $c(t - \tau)$ електричното поле е поле на движещ се праволинейно и равномерно точков заряд. Доказва се, че когато скоростта v на заряда е много по-малка от скоростта на светлината c , електричното поле на движещия се праволинейно и равномерно точков заряд е приблизително същото, както на неподвижен заряд, който в дадения момент се намира в точката, през която преминава движещият се заряд. Силовите линии на това поле в момента t са показани на *фиг. 86-1*. Измененията на електричното поле, породени от движението с ускорение, са съсредоточени в сферичен слой с дебелина $c\tau$, който се отдалечава от точка O със скорост c . В този слой силовите линии се пречупват (*фиг.86-1*).

Да разгледаме силова линия, която сключва ъгъл θ с оста z (*фиг.86-2a*). Силовите линии винаги са непрекъснати. В участъка AM силовата линия, както вече отбелязахме, съвпада със силова линия на полето на неподвижен заряд q , разположен в точка A . След точка N силовата линия е на електростатично поле на точков заряд q , разположен в точка O . Ще покажем, че в участъка MN силовата линия характеризира електрично поле, което има две компоненти: електростатично поле и електрично поле на лъчението. Пречупването на силовата линия е свързано именно с наличието на електрично поле на лъчението. От правоъгълния триъгълник на *фиг.86-2a* определяме ъгъла α , под който се пречупва силовата линия:

$$(86.2) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{vt \sin \theta}{c\tau}.$$

Точката N лежи върху сферата с радиус $r = ct$ (фиг.86-1). При преминаване през тази точка електричното поле се изменя със скок, поради което силовата линия се пречупва. Непосредствено след N , извън сферата, интензитетът на полето E_1 съвпада с интензитета на електростатичното поле на точков заряд q , разположен в точка O . Векторът на интензитета E_2 на електричното поле в точка N може да се разложи на две компоненти: $E_2 = E_{||} + E_{\perp}$, където компонентата $E_{||}$ е успоредна на E_1 , а компонентата $E_{\perp}$ е перпендикулярна на E_1 (фиг.86-2б). Ще покажем, че двата успоредни вектора $E_{||}$ и E_1 са равни по големина. За целта ще приложим закона на Гаус за малка цилиндрична затворена повърхност, обхващаща точка N , чиито основи с площ ΔA са перпендикулярни на векторите $E_{||}$ и E_1 :

$$\Phi_E = \Delta A E_1 - \Delta A E_{||} = \frac{q_1}{\epsilon_0} = 0,$$

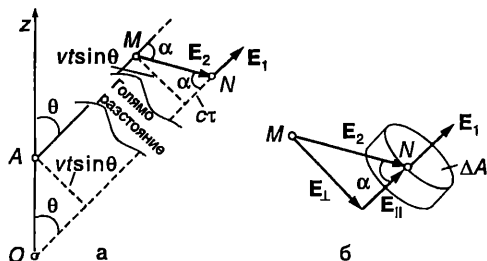
където е отчетено, че в обема, заграден от гаусовата повърхност, няма електрични заряди ($q_1 = 0$). От горното равенство получаваме, че $E_{||} = E_1$. Следователно компонентата $E_{||}$ на електричното поле в точка N съвпада с полето на неподвижен точков заряд, поставен в точка O , и се изразява с формула (86.1). От чертежа на фиг. 86-2б и от уравнение (86.2) определяме компонентата $E_{\perp}$:

$$(86.3) \quad E_{\perp} = \operatorname{tg} \alpha E_{||} = \frac{v t \sin \theta}{c t} E_1.$$

След като заместим $v/\tau = a$, $t = r/c$ и E_1 от уравнение (86.1) в (86.3), за интензитета $E_{\perp}$ окончателно получаваме

$$(86.4) \quad E_{\perp} = \frac{q a \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 c^2 r}.$$

Фиг.86-2.



Напречната компонента $E_{\perp}$ е равна на интензитета на електричното поле на електромагнитната вълна, която е излъчил зарядът при движението с ускорение. Вълната е сферична, разпространява се в радиално направление и във всяка точка от нея векторът $E_{\perp}$ е перпендикулярен на посоката на разпространение. Ще обърнем внимание, че за разлика от интензитета E_1 на електростатичното поле, който намалява обратнопропорционално на квадрата на разстоянието ($E_1 \propto \frac{1}{r^2}$), интензи-

тетът $E_{\perp}$ на електричното поле на вълната намалява много по-бавно: обратнопропорционално на разстоянието ($E_{\perp} \propto \frac{1}{r}$).

Затова на голямо разстояние от източника електростатичното поле може да не се отчита.

Всички получени дотук резултати са в сила и за магнитната индукция B на електромагнитното поле, тъй като за всяка точка от ЕМ вълна $B = E_{\perp}/c$.

Важно е да се отбележи, че интензитетът на електричното поле $E_{\perp}$ на вълната в точка, разположена на разстояние r от източника, не зависи от ускорението на заряда в момента t , когато се определя $E_{\perp}$, а от ускорението му в един по-преден момент $t' = t - r/c$. Това е моментът на излъчването на вълната, която след като измине разстояние r за време r/c , в по-късния момент t преминава през точката на наблюдение.

Уравнение (86.4) за полето на излъчване остава в сила и в случая, когато зарядът през цялото време се движи с ускорение, но по такъв начин, че да остава в близост до точка O . Най-прост пример за такова движение е хармоничното трептене с малка амплитуда около равновесното положение O . Тогава зарядът излъчва непрекъснато ЕМ вълни, чийто интензитет на електричното поле на разстояние r от точка O е

$$(86.5) \quad E_{\perp}(r, t) = \frac{q a(t') \sin \theta}{4 \pi \epsilon_0 c^2 r}.$$

Излъчване на електричен дипол

Електричен заряд q извършва хармонично трептене около точка O в направление на оста z по закона

$$(86.6) \quad z(t) = z_0 \sin \omega t.$$

Ускорението на заряда е

$$(86.7) \quad a(t) = \frac{d^2 z}{dt^2} = -\omega^2 z_0 \sin \omega t.$$

Заместваме ускорението a от уравнение (86.7) в (86.5) и като отчетем „закъснението“ r/c на вълната – интензитетът на електричното поле на вълната на разстояние r от източника в момента t се определя от ускорението на заряда в по-предния момент $t' = t - r/c$, получаваме

$$(86.8) \quad E_{\perp}(r, t) = -\frac{q\omega^2 z_0 \sin \omega t'}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta.$$

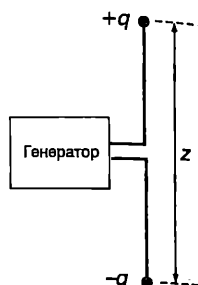
Нека добавим в точка O неподвижен точков заряд $-q$. Двата заряда образуват електричен дипол с променлив диполен момент $p = qz = p_0 \sin \omega t$, където $p_0 = qz_0$ е амплитудата (максималната стойност) на диполния момент. Тъй като неподвижният заряд не излъчва, полето на излъчване не се променя, а уравнение (86.8) може да се запише във вида

$$(86.9) \quad E_{\perp}(r, t) = -\frac{\omega^2 p_0 \sin \omega t'}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta.$$

Полученото уравнение е в сила, ако разстоянието между зарядите в дипола е много по-малко от дължината на вълната λ на излъчване. Освен това точката на наблюдение трябва да е достатъчно отдалечена, т.е. трябва да е изпълнено условието $r \gg \lambda$. Когато $r \gg \lambda$, точката на наблюдение се намира в т.нар. *вълнова зона* на източника.

Формула (86.9) изразява полето на излъчване на електричен дипол, чийто диполен момент се изменя с течение на времето по хармоничен закон. Възможни са два случая: 1. разстоянието между зарядите се изменя по хармоничния закон (86.6); 2. големината на самите заряди на дипола се изменя по хармоничния закон $q = q_0 \sin \omega t$. Вторият случай се използва в радиотехниката. Излъчващата антена

представлява електричен дипол, чийто заряд q се изменя по хармоничен закон с кръгова честота ω , равна на кръговата честота на източника на променливо ЕДН (генератор), към който е свързана антената (фиг.86-3).



Фиг.86-3.

Електричните диполи излъчват сферични вълни. Вълновите фронтове са концентрични сфери, в центъра на които се намира излъчващият дипол. Електричното поле на ЕМ вълна обаче не притежава сферична симетрия. Както се вижда от уравнение (86.8), интензитетът $E_{\perp}$ зависи от ъгъла θ . В направление на оста z , по която е ориентиран диполът, той не излъчва: $E_{\perp} = 0$ при $\theta = 0$. Излъчването е максимално при $\theta = 90^\circ$, т.е. в направление, перпендикулярно на направлението на трептене.

Интензитет и мощност на излъчването

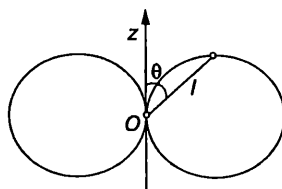
Повдигаме двете страни на уравнение (86.9) на квадрат, осредняваме по време-

то и като отчетем, че $\overline{\sin^2 \omega t'} = \frac{1}{2}$, получаваме средната стойност на $E_{\perp}^2$. След това заместваме $\overline{E_{\perp}^2}$ в уравнение (85.7) и определяме интензитета на ЕМ вълна, излъчена от електричен дипол:

$$(86.10) \quad I = \epsilon_0 c \overline{E_{\perp}^2} = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \sin^2 \theta.$$

Зависимостта на интензитета от направление се определя от множителя $\sin^2 \theta$. Графиката на функцията $I(\theta)$ изразява т.нар. *диаграма на насоченост* (фиг.86-4). По оста z , в направление на която е ориентиран диполът, излъчване няма. При

Фиг.86-4.



увеличаване на ъгъла θ интензитетът нараства и достига максимална стойност в перпендикулярното на оста z направление.

За да определим пълния поток на енергията през сфера с радиус r , в центъра на която се намира излъчващият дипол, ще заменим зависещия от ъгъла θ интензитет I с ефективен среден интензитет I_{ef} , еднакъв за всички точки от сферата. Радиус-векторът r на произволна точка M от сферата има z -компонента (фиг.86-5) $z = r \cos \theta$. Вдигаме двете страни на това равенство на квадрат и изразяваме $\cos^2 \theta$:

$$(86.11) \quad \cos^2 \theta = \frac{z^2}{r^2}.$$

От друга страна, за всяка точка от сферата е в сила уравнението $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const}$. Поради сферичната симетрия средните стойности на x^2 , y^2 , z^2 , когато осредняването се извършва по всички направления, са равни. Следователно

$$\overline{r^2} = \overline{r^2} = \overline{x^2} + \overline{y^2} + \overline{z^2} = 3\overline{z^2}.$$

Средната стойност на $\cos^2 \theta$ е

$$\overline{\cos^2 \theta} = \frac{\overline{z^2}}{\overline{r^2}} = \frac{1}{3}.$$

Следователно средната стойност на функцията $\sin^2 \theta$ е

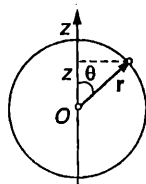
$$(86.12) \quad \overline{\sin^2 \theta} = 1 - \overline{\cos^2 \theta} = \frac{2}{3},$$

където осредняването е извършено за всички направления в пространството, т.е. по всички възможни стойности на ъгъла θ .

От уравнение (86.10), след като отчетем (86.12), получаваме ефективния интензитет на вълната, осреднен по ъгъла θ :

$$(86.13) \quad I_{\text{ef}} = \frac{\omega^4 p_0^2}{48\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2}.$$

Тъй като диполът излъчва във вакуум, излъчената енергия не се поглъща и се пренася от ЕМ вълна без загуби. Съгласно със закона за запазване на енергията средната мощност на излъчването е рав-



Фиг.86-5.

на енергията, пренесена за единица време от вълната през цялата повърхност $4\pi r^2$ на разглежданата сфера:

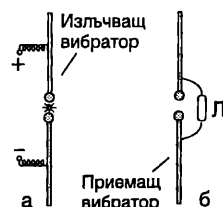
$$(86.14) \quad \overline{P} = 4\pi r^2 I_{\text{ef}} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3}.$$

Следователно излъчената мощност е пропорционална на квадрата на амплитудата p_0 на диполния момент и на четвъртата степен на кръговата честота ω на излъчвателя (кръговата честота, с която се изменя диполният момент). Ще обърнем специално внимание на силната зависимост на мощността от кръговата честота. Например, ако ω нарастне 2 пъти, мощността на излъчване се увеличава 16 пъти! Затова лъчение с достатъчно голяма за практически цели мощност се получи при висока честота на трептене на излъчващия дипол.

Вибратор на Херц

Електромагнитните вълни са открити експериментално от Хайнрих Херц през 1887 г. (8 години след смъртта на Максвел). За да получи необходимата висока честота, Херц използва собствените трептения на открит вибратор, съставен от две еднакви метални пръчки, разделени от искрова междина (фиг.86-6а). Пръчките се зареждат от източник на високо напрежение. При определено напрежение се извършва електричен пробив на въздуха между пръчките и протича искров разряд. Двете части на вибратора се свързват електрически чрез искрата между тях, при което възникват затихващи електромагнитни трептения с висока честота. Вибраторът е свързан към източник на напрежение през две намотки с голяма индуктивност (дросели), които не позволяват височестотните токове да преминават през източника. Токът тече само по пръчките, като отдалечените им краища се зареждат с разноименни заряди, които се изменят с течение на времето по периодичен закон: вибраторът представ-

Фиг.86-6.



лява електричен дипол с осцилиращ диполен момент, излъчващ ЕМ вълни. За регистриране на вълните Херц използва втори vibrator, еднакъв по форма и размери с излъчващия vibrator (фиг.86-66). Под действие на електричното поле на електромагнитната вълна електроните от приемния vibrator извършват принудени трептения и в него протичат високочестотни токове. Възниква променливо напрежение, което може да се регистрира например по светенето на малка газоразрядна тръба Л, свързана към двете половини на vibratora. Когато излъчващият и приемният vibrator имат еднакви размери, собствените честоти на техните ЕМ трептения съвпадат и възбудените в приемника резонансни трептения имат максимална амплитуда. С помощта на подобни vibratorи Херц успява да получи ЕМ вълни с дължина на вълната от 0,6 m до 10 m и потвърждава основните изводи от теорията на Максвел.

В съвременната наука и техника за излъчване и приемане на ЕМ вълни от радиодиапазона се използват различни видове антени. Например в радиоастрономията и за нуждите на спътниковата телевизия се използват антени със сферични или параболични отразяващи повърхности, в чиито фокус е поставен облъчвател. ЕМ вълни се концентрират върху облъчвателя, съдържащ вериги от диполи, в които ЕМ поле на вълната възбужда принудени трептения. Тези трептения след това се усилват и обработват от специална електронна апаратура. Основни характеристики на антената са честотният диапазон, за който тя е предназначена, и нейната диаграма на насоченост на излъчване или приемане на ЕМ вълни.

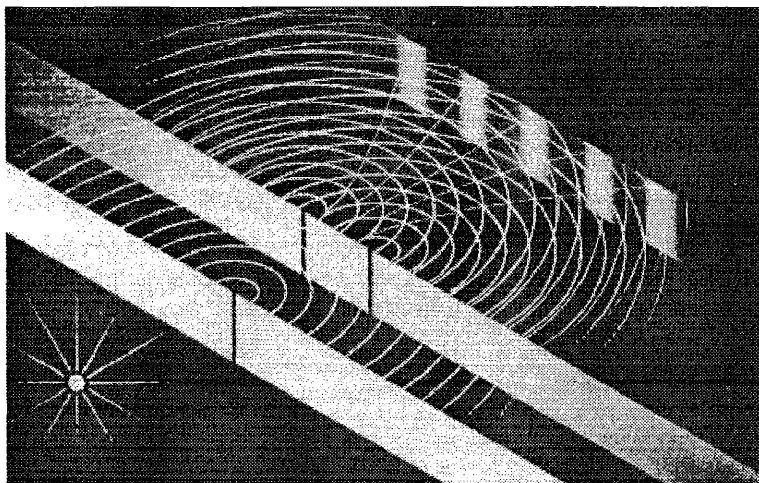
Спектър на електромагнитните вълни

При механичните вълни съществува минимална възможна дължина на вълната $\lambda_{\min}$ (максимална честота), която се определя от дискретния строеж на материалните среди: $\lambda_{\min}$ е от порядъка на разстоянието между два съседни атома (молекули) от средата. Тъй като ЕМ вълни представляват трептения на ЕМ поле, а не на частиците на материална среда, при тях няма принципи ограничения за честотата. На фиг.86-7 е представен спектърът на електромагнитните вълни. С най-голяма дължина на вълната и най-малка честота са *радиовълните*. Те се излъчват от антени, по които текат променливи токове. С по-голяма честота са *микровълните*. За източници на такива вълни се използват специални вакуумни електронни тръби. След микровълните е разположена *инфрачервената област* на спектъра. Инфрачервените лъчи са невидими за човешкото око. Основната част от енергията на топлинното излъчване на телата, които се намират при не много високи температури (например близки до стайната температура), е в инфрачервената област на спектъра. Инфрачервено излъчване предизвикват също трептенията на молекулите на газовете и течностите. Човешкото око е чувствително и възприема като светлина само една много малка част от спектъра на ЕМ вълни. Честотата на видимата светлина лежи в интервала от $3,8 \cdot 10^{14}$ Hz до $7,5 \cdot 10^{14}$ Hz. Главният естествен източник на светлина за нас е Слънцето. Спектърът на топлинното му излъчване съдържа както видима светлина, така и инфрачервено и *ултравиолетово излъчване*. След ултравиолетовата област на спектъра следват *рентгеновите лъчи* и γ -лъчите.

Фиг.86-7. Спектър на електромагнитните вълни.



Светлина



Интерференция на светлината (опит на Юнг)

Светлина се нарича лъчението от оптическия диапазон на спектъра на електромагнитните вълни. Освен видимото за човешкото око лъчение, оптическия диапазон включва инфрачервените лъчи и ултравиолетовите лъчи. В тази глава ще разгледаме основните вълнови явления при светлината: отражение, пречупване, дисперсия, интерференция, дифракция, поляризация, поглъщане и разсейване. Специално внимание ще отделим на практическото приложение на светлинните явления в оптичните уреди, спектралните апарати и за пренасяне на информация.

87. Отражение и пречупване на светлината

Разпространение на светлината в еднородна среда

Във вакуум всички електромагнитни вълни, независимо от честотата, се разпространяват с една и съща скорост $c = 3 \cdot 10^8$ m/s. В материална среда вълните от оптичния диапазон имат скорост u , която зависи от физичните свойства на средата и от честотата ν на вълната. Тя е по-малка от скоростта c на вълните във вакуум. Величината

$$(87.1) \quad n = \frac{c}{u},$$

която показва колко пъти скоростта на светлината в материалната среда е по-малка от скоростта c във вакуум, се нарича показател на пречупване на средата. В оптичния диапазон показателят на пречупване на всички среди е по-голям от единица ($n > 1$). Среда с по-голям показател на пречупване се нарича оптически поплътна от друга среда, която има по-малък показател на пречупване. За повечето материали, които са прозрачни във видимата област, показателят на пречупване n има стойности между 1 и 2 (вж. табл. 87.1).

Таблица 87.1. Показател на пречупване n на някои прозрачни материали за жълтата линия на натриева лампа ($\lambda_0 = 589$ nm)

Материал	Показател на пречупване, n
Въздух	1,00029
Вода	1,333
Етилов алкохол	1,362
Бензол	1,501
Съкло (кроун)	1,517
Съкло (лек флинт)	1,58
Серовъглерод	1,629
Съкло (тежък флинт)	1,89
Диамант	2,417

Честотата ν на светлинните вълни се определя от техния източник – тя е равна на честотата, с която трептят електричните диполи на източника, и не зависи от свойствата на средата, в която се разпространява вълната. От общата формула за хармоничните (монохроматични) вълни $\lambda \nu = u$ и равенство (87.1) за светлинна вълна в материална среда се получава

$$(87.2) \quad \lambda \nu = \frac{c}{n}.$$

Следователно дължината на вълната на светлината зависи от показателя на пречупване на средата. Когато светлината навлиза в оптически по-плътна среда, дължината на вълната намалява, тъй като намалява скоростта на разпространение.

В прозрачна еднородна среда е в сила законът за праволинейното разпространение на светлината. Вълновите фронтове не променят формата си: плоската вълна остава плоска, сферичната – сферична и т.н. Лъчите, които по определение са перпендикулярни на вълновите фронтове и показват посоката на разпространение на вълната, в еднородна среда са прави линии, т.е. те не се пречупват или огъват. В оптиката вместо математическите линии – лъчи, често под лъч се разбира реален тънък успореден сноп от светлина, какъвто би могъл например да се получи при преминаване на светлинен сноп през малък кръгъл отвор. Ще отбележим, че получаването на безкрайно тънки успоредни снопове светлина, които точно да съответстват на математическия модел „лъч“, е невъзможно поради явлението дифракция на светлината, на което ще се спрем в §92.

Пример 87.1. Монохроматична светлина с дължина на вълната във въздуха $\lambda_0 = 600$ nm попада в стъкло с показател на пречупване $n = 1,5$. Определете скоростта u , честотата ν и дължината на вълната λ на светлината в стъклото.

Решение. Тъй като показателят на пречупване на въздуха е много близък до единица (вж. табл. 87.1), в повечето случаи можем да приемем, че той е равен на единица, т.е. да смятаме, че във въздуха светлината има същата скорост, както във вакуум. Скоростта на светлината в стъклото е

$$u = \frac{c}{n} = \frac{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,5} = 2 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Честотата ν не се изменя, когато светлината преминава от една среда в друга среда. Записваме уравнение (87.2) за въздуха (вакуум) $\lambda_0 \nu = c$ и за стъклото $\lambda \nu = c/n$, откъдето определяме λ :

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n} = \frac{600 \text{ nm}}{1,5} = 400 \text{ nm}.$$

При навлизане в оптически по-плътната среда (в стъклото) дължината на вълната намалява.

Явления на границата на две среди

Когато една вълна (електромагнитна или механична) достигне границата на две среди, в които скоростите на разпространението ѝ се различават, наблюдават се явленията *отражение* и *пречупване*. При това възникват две нови вълни. Едната се връща в първата среда и се нарича *отразена вълна*, а другата преминава във втората среда и се нарича *пречупена вълна*. За светлинните вълни връзката между посоките на разпространение, състоянието на поляризация и интензитетите на падащата, отразената и пречупената вълна се получават с помощта на уравненията на Максвел, като се отчетат физичните свойства на средите и граничните условия. Тези задачи се решават от макроскопичната електродинамика. Тук ще се ограничим с представянето само на някои от основните резултати, част от които са били експериментално установени много преди разработването на електродинамиката като физична теория.

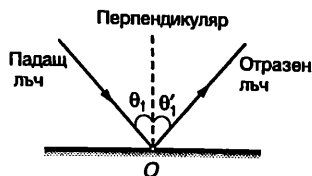
Отражение на светлината

Законите за отражение на светлината са били известни още на древните гърци:

1. Падащият лъч, отразеният лъч и перпендикулярът към граничната повърхност, издигнат в точката на падане O (фиг.87-1), лежат в една равнина, наречена равнина на падане.

2. Ъгълът на отражение θ_2' е равен на ъгъла на падане θ_1 : $\theta_2' = \theta_1$.

Ъглите се измерват от перпендикуляра към мъчя и стойностите им са в интервала от 0 до 90°.

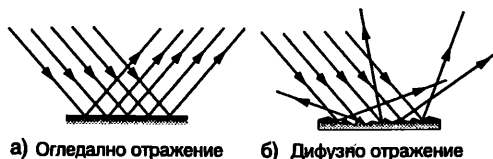


Фиг.87-1.

Доказва се, че когато монохроматична светлина се отразява от оптически поплътна среда, фазата на вълната търпи скок, при който се променя с $\pm\pi$. Изменение на фазата се наблюдава например за светлина, разпространяваща се във въздуха, при отражение от стъкло, метал или от водна повърхност. Казва се, че при такова отражение се „губи“ половин дължина на вълната ($\lambda/2$), защото същото изменение на фазата се получава, ако вълната измине допълнително разстояние $\lambda/2$. Когато отражението се извършва от среда с по-малка оптична плътност, фазата на вълната не се изменя. Например светлина, която се разпространява във вода, не променя фазата си при отражение от границата вода-въздух.

Успоредни лъчи, които попадат върху гладка повърхност, след отражението от повърхността остават успоредни, като само променят посоката си в съответствие със законите за отражение. Такова отражение се нарича *огледално* (фиг.87-2а). Ако отразяващата повърхност е грапава и съдържа неравности, чиито размери са много по-големи от дължината на вълната, отражението е *дифузно*. Неравната повърхност, например лист хартия или парче дърво, може да се разглежда като съставена от голям брой гладки участъци. Всеки участък отразява огледално попадналата върху него светлина (фиг.87-2б), но поради различната (хаотична) ориентация на отделните участъци, отразената от цялата повърхност светлина не се разпрост-

Фиг.87-2.



ранява насочено, а се разпръсква дифузно във всички посоки.

Да означим с I_0 интензитета на падащата светлина, а с I – интензитета на отразената светлина. Величината

$$(87.3) \quad R = \frac{I}{I_0}$$

се нарича *коэффициент на отражение*. Коэффициентът на отражение R е безразмерна величина, която показва каква част от интензитета (енергията) на падащата вълна се отразява от граничната повърхност.

В случай на наклонено падане ($\theta_1 \neq 0$) R зависи както от ъгъла на падане θ_1 , така и от състоянието на поляризация на падащата вълна. Доказва се, че в най-простия за анализ случай на нормално падане ($\theta_1 = 0$) коэффициентът на отражение R не зависи от състоянието на поляризация на светлината и се изразява с формулата

$$(87.4) \quad R = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$$

От нея следва, че R не се променя, ако n_1 и n_2 разменят местата си, т.е. независимо от това, как се разпространява вълната – от средата с показател на пречупване n_1 към средата с показател на пречупване n_2 или обратно, коэффициентът на отражение R от границата на двете среди е един и същ. Формула (87.4) може с приближение да се прилага и за малки ъгли на падане θ_1 .

Коэффициентът на отражение зависи от разликата в показателите на пречупване на двете среди. При $n_1 = n_2$ отражение не се извършва. Това се използва, например в минералогията, за определяне на показателя на пречупване на образци от прозрачни минерали с неправилна форма. Образецът се потапя в смес от бензол и серовъглерод (вж. табл.87.1), чийто състав се подбира така, че да изчезне видимата граница между течността и кристала. Средата става оптически еднородна, когато се изравнят показателите на пречупване на сместа и на минерала.

Пример 87.2. Коэффициентът на пречупване на стъклото е $n = 1,5$.

а) Определете каква част от светлината се отразява на границата стъкло – въздух при нормално падане.

б) Оценете каква част от светлината попада в стаята през стъклата на прозорците в слънчев летен ден.

Решение. а) В уравнение (87.4) заместваем $n_1 = 1$ (въздух) и $n_2 = 1,5$ (стъкло) и определяме коэффициентна на отражение на границата стъкло – въздух: $R = 0,04$. Интензитетът на отразената светлина е $I = R I_0 = 0,04 I_0$, т.е. при нормално падане се отразява 4% от интензитета на падащата светлина.

б) Ще смятаме, че светлината пада нормално върху стъклата на прозорците. Отражение се извършва както от предната, така и от задната повърхност на всяко стъкло. Да означим с k броя на отразяващите повърхности. Интензитетът на преминалата през първата отразяваща повърхност светлина е $I_1 = (1 - R) I_0$, където R е коэффициентът на отражение, а I_0 е интензитетът на падащата светлина. Тъй като поглъщането е пренебрежимо малко, цялата преминала през първата отразяваща повърхност светлина достига втората отразяваща повърхност и през нея преминава светлина с интензитет $I_2 = (1 - R) I_1 = (1 - R)^2 I_0$. По аналогичен начин за интензитета на преминалата през k -тата отразяваща повърхност светлина получаваме $I_k = (1 - R)^k I_0$. Обикновено прозорците са с две стъкла, т.е. имат четири отразяващи повърхности. За $k = 4$ и $R = 0,04$ се получава $I_4 = 0,85 I_0$, т.е. само 85% от светлината, която би влязла в стаята при отворен прозорец, преминава през стъклата на затворения прозорец.

Закон на Снелиус

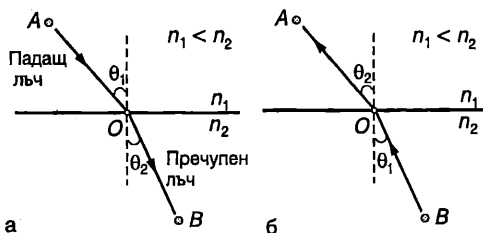
Законът за пречупване на светлината е бил експериментално открит от холандския учен Уилброрд Снелиус (1591 – 1626):

Пречупеният лъч лежи в равнината на падане, а отношението на синуса на ъгъла на падане θ_1 и синуса на ъгъла на пречупване θ_2 не зависи от ъгъла на падане и е равно на

$$(87.5) \quad \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1},$$

където n_1 и n_2 са показателите на пречупване на двете среди (фиг.87-3а).

От закона на Снелиус (87.5) следва, че



Фиг.87-3.

когато светлината навлиза в оптично поплътна среда ($n_2 > n_1$), ъгълът на пречупване θ_2 е по-малък от ъгъла на падане θ_1 ($\theta_2 < \theta_1$) и пречупеният лъч се приближава към нормалата (фиг.87-3а). Обратно, ако при пречупването лъчът навлиза в среда с по-малка оптична плътност, пречупеният лъч се отдалечава от нормалата (фиг.87-3б).

Важно следствие от вълновата теория на светлината е принципът за *обратимост на светлинните лъчи*. Той се илюстрира от фиг. 87-3. На фиг.87-3а в точка А е разположен източник, а в точка В – приемник на светлина. Ако приемникът В стане източник, пътят на лъча остава същия, само се променя посоката на разпространение (фиг.87-3б).

Принцип на Ферма

Френският математик и физик Пиер Ферма (1601–1665), изхождайки от общи съображения за целесъобразност в природата (природата достига своите цели с минимален разход на средства), формулира следния принцип:

При разпространение от една точка към друга точка светлината избира път, който съответства на най-малкото време на разпространение.

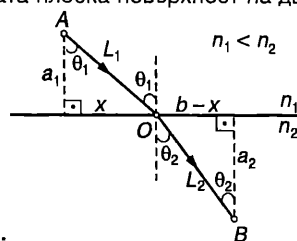
Принципът на Ферма обяснява праволинейното разпространение на светлината в еднородна среда, където скоростта на светлината е постоянна, и светлината избирава разстоянието между две точки за най-малко време, ако се движи по правата линия, която ги свързва.

С помощта на принципа на Ферма може да се изведе законът на Снелиус (вж. пример 87.3) и да се получат редица

други полезни резултати. Ще отбележим, че праволинейното разпространение на светлината и законите за пречупване и отражение се получават като следствия от вълновата теория на светлината, на което обаче тук няма да се спираме.

Пример 87.3. С помощта на принципа на Ферма получите закона на Снелиус за пречупването на светлината.

Решение. Разглеждаме две точки А и В, разположени в оптически еднородни среди с показатели на пречупване n_1 и n_2 (фиг.87-4). Да предположим, че светлинен лъч, който излиза от точка А, след пречупване в точка О от разделителната плоска повърхност на двете сре-



Фиг.87-4.

ди, преминава през точка В. Всички разстояния, които ще използваме при решаване на задачата, са означени на фиг.87-4.

Светлината избирава разстоянието между точките А и В за време

$$t = t_1 + t_2 = L_1/u_1 + L_2/u_2,$$

където $u_1 = c/n_1$ и $u_2 = c/n_2$ са скоростите на светлината в двете среди. След заместване на скоростите u_1 и u_2 и разстоянията L_1 и L_2 (използваме питагоровата теорема – вж. фиг.87-4), за времето t се получава

$$t = \frac{n_1}{c} \sqrt{a_1^2 + x^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{a_2^2 + (b-x)^2},$$

където променливата x задава положението на точка О, т.е времето t е функция на x .

Съгласно с принципа на Ферма положението на точка О трябва да е такова, че функцията $t(x)$ да има минимум. Търсим екстремум на функцията $t(x)$, като намираме първата ѝ производна и я приравняваме на нула:

$$\frac{1}{2} \frac{n_1}{c} \frac{2x}{\sqrt{a_1^2 + x^2}} - \frac{1}{2} \frac{n_2}{c} \frac{2(b-x)}{\sqrt{a_2^2 + (b-x)^2}} = 0.$$

Използваме метричните зависимости в правоъгълните триъгълници от фиг.87-4 и записваме горното равенство във вида

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2,$$

което съответства на закона на Снелиус за пречупването на светлината.

Пълно отражение

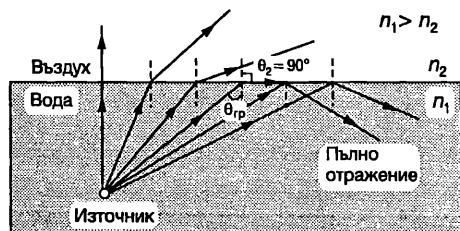
На *фиг.87-5* е показан точков източник на светлина, поставен във вода. На границата вода – въздух се наблюдават явленията пречупване и отражение: част от светлината преминава във въздуха, а останалата част се отразява от границата. Пречупените лъчи се отдалечават от нормалата към разделителната повърхност на двете среди, тъй като въздухът е с по-малка оптична плътност от водата. При определен ъгъл на падане θ_{rp} , наречен *граничен ъгъл*, ъгълът на пречупване става $\theta_2 = 90^\circ$ – пречупеният лъч се плъзга по разделителната повърхност. Когато ъгълът на падане θ_1 е по-голям от граничния ъгъл, светлината изцяло се отразява от границата и не прониква във въздуха.

Явлението, при което светлина, разпространяваща се в дадена среда, изцяло се отразява от границата с друга среда с по-малка оптична плътност, се нарича *пълно отражение* (или пълно вътрешно отражение).

Граничният ъгъл θ_{rp} , след който настъпва пълното отражение, се определя от закона на Снелиус (87.5), където се полага $\sin \theta_2 = \sin 90^\circ = 1$ и $\theta_1 = \theta_{rp}$. Получава се

$$(87.6) \quad \sin \theta_{rp} = \frac{n_2}{n_1}.$$

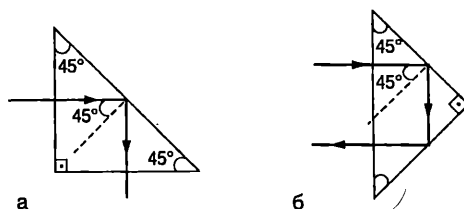
Фиг.87-5. Пълно вътрешно отражение на границата вода-въздух.



Приложения на пълното отражение

Пълното отражение от призми се използва в биноклите, перископите и др. оптични прибори за промяна на посоката на разпространение на светлината (*фиг.87-6*).

Пълното отражение е основа на една от бързо развиващите се области на съвременната приложна физика – влакнестата оптика. Оптичните влакна са много тънки (до няколко микрона) стъклени или кварцови нишки, по чиято дължина се разпространява светлина. Лъчите претърпяват пълно отражение от стените на влакното (*фиг.87-7*) и не го напускат – светлината преминава през влакното практически без загуби. Кабели, изготвени от го-



Фиг.87-6. Пълно отражение от призма.

лям брой оптични влакна, се използват във влакнестооптичните линии за връзка. Една такава линия позволява например едновременно да се предават 24 000 телефонни разговора или 48 телевизионни програми.

Влакнестата оптика намира приложение в медицината за пряко наблюдение на редица вътрешни органи: гласни струни, бронхи, стомах, черва и др. Специален оптичен кабел се вкарва например през хранопровода в стомаха. Източник на светлина осветява вътрешния орган. На входа на оптичния кабел, наречен *световод*, се поставя събирателна леща, която превръща отразените от обекта лъчи в успореден сноп. Световодът съдържа мно-

Фиг.87-7. Разпространение на светлина по оптично влакно.



го голям брой оптични влакна. Върху всяко от тях попада светлина от точно определена много малка област от обекта и влакното пренася информацията за тази област до изхода, където се получава контрастен образ на обекта.

Пример 87.4. Върху равнобедрена правоъгълна призма попада успореден сноп светлина, както е показано на *фиг.87-6а*. При какъв показател на пречупване n_1 на призмата светлината ще претърпи пълно отражение от задната ѝ стена? Разгледайте два случая:

- призмата е във въздух ($n_2 = 1$);
- призмата е потопена във вода ($n_2 = 1,33$).

Решение. Светлината пада върху задната стена на призмата под ъгъл $\theta_1 = 45^\circ$ спрямо нормалата. Отражението е пълно, ако $\theta_1 > \theta_{гр}$, където $\theta_{гр}$ е граничният ъгъл. Тъй като на по-голям ъгъл в интервала от 0° до 90° съответства по-голям синус, от формула (87.6) получаваме неравенството $\sin 45^\circ > n_2/n_1$. Следователно условието за пълно отражение от призмата е

$$n_1 > \frac{n_2}{\sin 45^\circ}.$$

а) Във въздуха: $n_2 = 1$; $n_1 > \sqrt{2} \approx 1,41$.

б) Във водата: $n_2 = 1,33$; $n_1 > n_2 \sqrt{2} \approx 1,88$.

От получените числени стойности може да се направи изводът, че за отражателни призми във въздуха могат да се използват практически всички стъкла, докато при потапяне на призмата във вода пълно отражение ще се наблюдава само ако тя е направена от специално стъкло с голям показател на пречупване (вж. табл.87.1).

Задачи

1. Показателят на пречупване на магнезиевия оксид е $n = 1,75$. Колко е скоростта на светлината в този материал?

2. Светлинен лъч се отразява и пречупва от плоската граница на две среди. При какъв ъгъл на падане θ_i отразеният и пречупеният лъч са взаимно перпендикулярни?

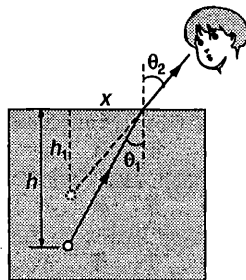
3. Светлинен лъч преминава през плоскопаралелна стъклена пластинка.

а) Докажете, че пластинката не променя посоката на разпространение, а само успоредно премества лъча на разстояние Δx .

б) Определете Δx . Известни са ъгълът на падане θ_1 , показателят на пречупване n на стъклото и дебелината d на пластинката.

4. Когато се гледат отвън, предмети, намиращи се под вода, изглеждат на по-малка дълбочина h_1 от действителната дълбочина h . Докажете, че при наблюдаване под малки ъгли θ_2 (*фиг. 87-8*), е в сила съотношението $h_1 = h/n$, където n е показателят на пречупване на водата.

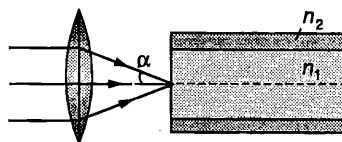
Указание: За малки ъгли θ (в радиани) са в сила приближенията $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$.



Фиг.87-8.

5. В телекомуникационните системи се използват оптични влакна с тънка цилиндрична сърцевина, направена от стъкло с показател на пречупване n_1 , която е покрита с еднороден слой от друго стъкло с показател на пречупване n_2 ($n_1 > n_2$). Лазерен сноп светлина се фокусира от събирателна леща върху предната основа на такова влакно, която е плоска и е перпендикулярна на оста (*фиг.87-9*). При какъв максимален ъгъл на падане $\alpha_{\max}$ светлината ще се разпространява само в сърцевината на влакното? Изразете $\alpha_{\max}$ чрез n_2 и $\Delta = (n_1 - n_2)/n_2$, като отчетете, че стойността на параметъра Δ е много по-малка от единица. Направете числени пресмятания за $n_2 = 1,5$ и $\Delta = 0,005$.

Фиг.87-9.



88. Дисперсия на светлината

Зависимостта на показателя на пречупване n от кръговата честота ω (или от дължината на вълната λ) се нарича *дисперсия на светлината*. Електричните заряди от материалната среда, след като попаднат в променливото електромагнитно поле на светлинната вълна, извършват принудени трептения и сами излъчват ЕМ вълни. Резултантната вълна във веществото е суперпозиция от падащата ЕМ вълна и от вторичните вълни, които се излъчват от всички трептящи заряди. В класическата електронна теория за дисперсията на светлината се доказва, че показателят на пречупване n за среди, в които поглъщането на светлината е слабо, се определя от диелектричната проницаемост ϵ на средата:

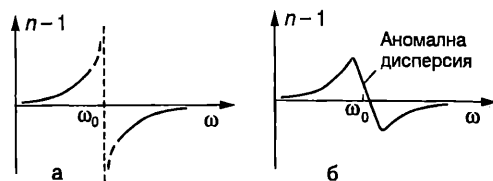
$$(88.1) \quad n = \sqrt{\epsilon}.$$

Ще припомним, че диелектричната проницаемост ϵ характеризира поляризацията на диелектриците, т.е. отместването на заредените частици в атомите и молекулите под действие на външно електрично поле. В §51 разглеждахме поляризацията на диелектриците в постоянни (статични) електрични полета. Диелектричната проницаемост на средата в този случай се нарича *статична диелектрична проницаемост*. Поляризацията на диелектриците под действие на високочестотното електромагнитно поле на светлинната вълна се различава от статичния случай и се описва от диелектрична проницаемост, която зависи от честотата. В най-простия класически модел електроните от средата се разглеждат като осцилатори със собствена кръгова честота на трептене ω_0 , които извършват принудени трептения с кръгова честота ω , равна на кръговата честота на падащата ЕМ вълна. Както е известно (вж. §74), амплитудата на принудените трептения рязко нараства при $\omega \approx \omega_0$ (резонанс). Следователно при честоти на ЕМ вълна, близки до собствените честоти на трептене на електроните, трябва да се очаква силна честотна зависимост на диелектричната проницаемост, както и ефективно поглъщане на елек-

тромагнитна енергия от средата. Когато ω значително се различава от ω_0 , поглъщането на светлината може да се пренебрегне. Тогава от електронната теория се получава следната зависимост на показателя на пречупване n от кръговата честота ω :

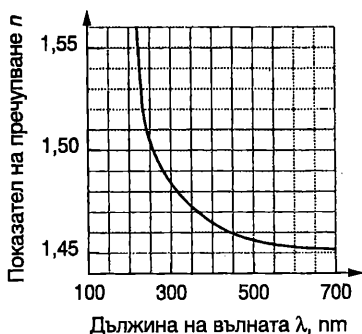
$$(88.2) \quad n(\omega) = \sqrt{\epsilon(\omega)} \approx 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

където N е броят на осцилаторите в единица обем, m и e са масата и зарядът на електрона, а ϵ_0 е електричната константа. Графиката на зависимостта на $n(\omega) - 1$ от ω е показана на *фиг.88-1*.



Фиг.88-1.

Електроните в атомите могат да се разделят на външни – оптични електрони, и вътрешни електрони. Електроните от вътрешните електронни обвивки имат много високи собствени честоти на трептене, поради което електромагнитните вълни от оптичния диапазон на спектъра практически не им влияят. За редица вещества собствените честоти ω_0 на външните (валентни) електрони са в далечната ултравиолетова област на спектъра. Затова в цялата видима част на спектъра е в сила неравенството $\omega \ll \omega_0$ и съгласно с уравнение (88.2) показателят на пречупване n е по-голям от единица и нараства при увеличаване на кръговата честота ω . Такъв характер на зависимостта $n(\omega)$ се нарича *нормална дисперсия*. Всички прозрачни вещества имат нормална дисперсия във видимата област. Техният показател на пречупване нараства при увеличаване на кръговата честота ω (при намаляване на дължината на вълната λ). На *фиг. 88-2* е показана зависимостта на показателя на пречупване n от дължината на вълната λ във видимата и близката ултравиолетова област за топен кварц. Вижда се, че кварцът има нормална дисперсия: показателят на пречупване намалява при увеличаване на дължината на вълната.



Фиг.88-2. Дисперсия на показателя на пречупване на топен кварц.

След като се отчете поглъщането при $\omega \approx \omega_0$, прекъснатата дисперсионна крива от фиг.88-1а преминава в непрекъсната крива с падащ участък в областта на силното поглъщане (фиг.88-1б). В тази област се наблюдава *аномална дисперсия* – показателят на пречупване намалява при увеличаване на кръговата честота.

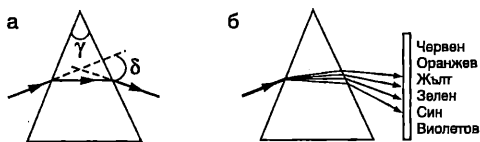
Разлагане на светлината от призма

За пространствено разделяне на лъчите с различна дължина на вълната в редица спектрални апарати се използват призми, изработени от различни материали. На фиг.88-3а е показан ходът на светлинен лъч през призма. Ъгълът γ се нарича *пречупващ ъгъл* на призмата. Ъгълът δ , на който се отклонява лъчът спрямо първоначалната си посока на разпространение след преминаване през призмата, се нарича *ъгъл на девиация*. Доказва се, че ъгълът на девиация е минимален при симетричен ход на лъчите вътре в призмата (фиг.88-3а). Ъгълът на минимална девиация δ зависи от пречупващия ъгъл γ и от показателя на пречупване n на материала, от който е направена призмата. За призма с малък пречупващ ъгъл

$$(88.3) \quad \delta \approx (n-1)\gamma.$$

Когато върху призмата попада сноп от бяла светлина, лъчите се разделят прост-

Фиг.88-3.



ранствено от призмата. Показателят на пречупване на призмата е най-малък за червената светлина, която е с най-голяма дължина на вълната. Затова нейните лъчи се пречупват най-слабо, т.е. техният ъгъл на девиация е най-малък. Най-голям е показател на пречупване на призмата за виолетовите лъчи и те най-силно се пречупват – имат най-голям ъгъл на девиация. Ако поставим екран зад призмата, върху него ще се получи спектър на светлината, съдържащ всички цветове от дъгата (фиг.88-3б). Такива спектри се наричат *дисперсионни*, защото за пространствено разделяне на светлинните вълни с различна дължина на вълната се използва явлението дисперсия на светлината. За разлагане на светлината от видимата и близката ултравиолетова област обикновено се използват кварцови призми. Кварцът и различните стъкла не са прозрачни в инфрачервената област, затова инфрачервените спектрометри използват призми от йонните кристали NaCl, KBr и други, които не поглъщат инфрачервените лъчи. (Например KBr е прозрачен за лъчение с дължина на вълната до 25 μm .)

Цветно зрение

Човешкото око е чувствително и възприема като светлина само много малка част от спектъра на електромагнитните вълни. Дължината на вълната (във вакуум) на видимата светлина лежи в интервала от 400 nm до 750 nm. Цветното зрение е възможно благодарение на рецепторните клетки в ретината на окото, съдържащи фоточувствителни молекули. Съществуват три вида рецепторни клетки, които поглъщат предимно синята, зелената или червената светлина. Всеки спектрален цвят може да се получи чрез подходяща комбинация от основните цветове: син, зелен и червен. Например зрително възприятие за жълт цвят се създава, когато зелените и червените рецептори поглъщат еднакво светлина, а сините почти не поглъщат. Въздействието върху рецепторите на попадналата в окото монохроматична жълта светлина или смес от зелена и червена светлина е едно и също. И в двата случая окото възприема светлината като жълта.

89. Оптични уреди

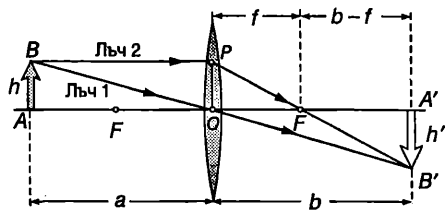
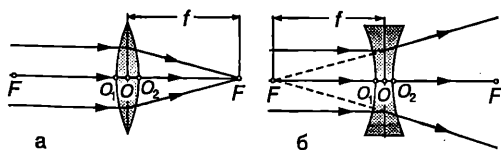
Тънки лещи

Лещи се изготвят предимно от стъкла или прозрачни пластмаси. За получаване на образи във фотоапарати, телескопи, микроскопи и други оптични уреди най-често се използват сферични лещи – техните гранични повърхности са части от сфери. Лещите са два вида: събирателни и разсейвателни. Събирателната леща е по-дебела в средата и по-тънка в краищата. Обратно, средата на разсейвателната леща е по-тънка от краищата. Правата, съединяваща центровете на двете сферични повърхности на лещата, се нарича *главна оптична ос*. Сноп от светлинни лъчи, успоредни на главната оптична ос, след като се пречупи от събирателна леща, става сходящ: лъчите се пресичат от другата страна на лещата в една точка F , наречена *фокус на лещата* (фиг.89-1а). Разстоянието от фокуса F до лещата се нарича *фокусно разстояние* f . Равнината, преминаваща през фокуса и перпендикулярна на главната оптична ос, се нарича *фокална равнина*. Ще разглеждаме лещи, за които разстоянието O_1O_2 (фиг.89-1а) между двете пречупващи повърхности (дебелина на лещата), е много по-малко от фокусното разстояние f . Такива лещи се наричат *тънки лещи*. За тънка леща няма значение дали фокусното разстояние се измерва от оптичния център O , от точка O_1 или от O_2 .

Сноп от лъчи, успореден на главната оптична ос, след като се пречупи от разсейвателна леща, става разходящ (фиг. 89-1б). Продълженията на пречупените лъчи се събират във фокуса F на лещата.

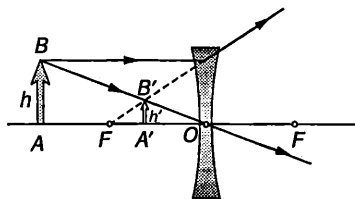
Всяка леща има два фокуса, които лежат върху главната оптична ос и са разположени симетрично от двете страни на лещата (фиг.89-1).

Фиг.89-1.



Фиг.89-2. Построяване на образ от събирателна леща.

На фиг.89-2 е показано построяването на образ на предмет от събирателна леща. За да се получи образът на точка B , се използват два лъча, чийто път е известен: лъчът 1 преминава през оптичния център O на лещата и не се пречупва; лъчът 2, който е успореден на главната оптична ос, след като се пречупи от лещата преминава през фокуса F . Образът е *действителен*, ако се получава при пресичането на пречупените от лещата лъчи (фиг.89-2). Действителните образи могат да се наблюдават върху екран. Когато образът се получава при пресичане на продълженията на пречупените лъчи, той е *недействителен* (фиг.89-3).



Фиг.89-3. Построяване на образ от разсейвателна леща.

Формула за тънка леща

Ще използваме чертежа от фиг.89-2, за да определим връзката между разстоянието a от предмета до лещата и разстоянието b от лещата до образа. От подобните триъгълници AOB и $A'O'B'$ следва, че

$$\frac{h'}{h} = \frac{b}{a}.$$

Това отношение се нарича *линейно увеличение* на лещата. То показва колко пъти височината h' на образа е по-голяма от височината h на предмета. От подобните триъгълници OPF и $A'B'F$ следва, че

$$\frac{h'}{h} = \frac{b-f}{f}.$$

Приравняваме десните страни на двете равенства: $\frac{b}{a} = \frac{b-f}{f}$, откъдето се получава формулата за тънка леща:

$$(89.1) \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Тази формула може да се прилага както за събирателни, така и за разсейвателни лещи, ако се спазва следното правило за знаците:

1. Събирателните лещи имат положително фокусно разстояние ($f > 0$), а фокусното разстояние на разсейвателните лещи е отрицателно ($f < 0$).

2. Разстоянието a винаги е положително ($a > 0$). Предметът е пред лещата: от него излизат лъчите, които след това се пречупват от лещата и преминават в пространството зад нея.

3. Разстоянието b е положително ($b > 0$), когато образът е зад лещата (действителен образ); b е отрицателно ($b < 0$), ако образът е пред лещата (недействителен образ).

Като се отчита правилото на знаците, може да се даде по-общо определение за линейното увеличение на леща:

$$(89.2) \quad M = \frac{h'}{h} = -\frac{b}{a}.$$

Линейното увеличение е положително ($M > 0$), когато образът е прав (фиг. 89-3). Когато образът е обърнат (фиг. 89-2), неговата височина се приема за отрицателна ($h' < 0$) и линейното увеличение също е отрицателно ($M < 0$). При $|M| > 1$ образът е увеличен (фиг. 89-2), а при $|M| < 1$ образът е умален (фиг. 89-3).

Пример 89.1. Предмет се намира на разстояние 15 cm пред разсейвателна леща с фокусно разстояние 10 cm. Определете положението на образа и линейното увеличение на лещата. Характеризирайте образа и след това го постройте геометрично.

Решение. Във формулата за тънка леща (89.1)

заместяваме $a = 15$ cm и $f = -10$ cm (фокусното разстояние е отрицателно, защото лещата е разсейвателна) и определяме $b = -6$ cm. Разстоянието b е отрицателно, което означава, че образът се намира пред лещата (недействителен образ). Линейното увеличение е

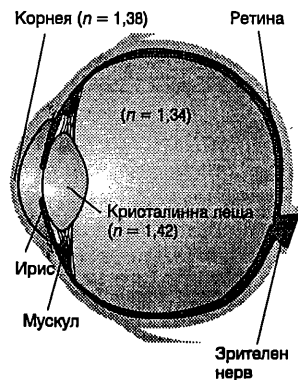
$$M = -\frac{b}{a} = -\frac{-6 \text{ cm}}{15 \text{ cm}} = 0,4.$$

$M > 0$, което показва, че образът е прав; $M < 1$ – следователно образът е умален. Построяването на образа е показано на фиг. 89-3.

Окото като оптичен уред

На фиг. 89-4 е показано напречно сечение на човешко око. Светлината влиза в окото през корnea (роговица) – тънка прозрачна мембрана с приблизително сферична форма. Основното пречупване на светлината става на границата въздух – корnea, тъй като там най-силно се изменя показателят на пречупване: от $n = 1$ за въздуха на $n = 1,38$ за корnea. Пречупването от всички гранични повърхности вътре в окото е по-слабо, защото те разделят среди с близки по стойност показатели на пречупване. Важен оптичен елемент от окото е кристалина – прозрачно тяло с форма на събирателна леща, съставено от слоеве с различен показател на пречупване. Попадащата в окото светлина се фокусира от системата корnea – кристалинна леща върху задната повърхност на окото, наречена ретина. Ретината съдържа милиони фоточувствителни рецептори. При стимулиране на рецепторите със светлина се създават нервни импулси, които по оптичния нерв се изпращат до главния мозък и създават в него зрителни усещания.

Фиг. 89-4.

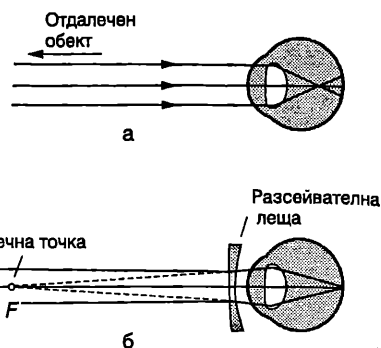


За да виждаме ясно даден предмет, той трябва да се фокусира от окото, т.е. оптичният му образ трябва да попадне върху ретината. Ако кристалинната леща беше твърда, окото би фокусираше само предметите, разположени на някакво точно определено разстояние пред него. Формата и фокусното разстояние на кристалинната леща обаче могат да се изменят, което дава възможност окото да фокусира както близки, така и отдалечени предмети. Този процес се нарича *акомодация* и се осъществява от специален мускул, свързан към лещата. Когато очният мускул е отпуснат, предната повърхност на лещата е приблизително плоска и окото фокусира отдалечени предмети. Най-отдалеченият обект, който окото може да фокусира, се определя от т.н. *далечна точка*. Човек с нормално зрение може ясно да види много отдалечени предмети, например Луната: за нормалното око далечната точка е в безкрайност.

Когато очният мускул се свива, предната повърхност на лещата започва да се огъва. Тя става по-изпъкнала и фокусното разстояние на лещата намалява: окото фокусира предмети, които се намират поблизо до него. Разстоянието до най-близкия предмет, който окото фокусира без да се напруга, се нарича *разстояние на най-ясно гледане* или *близка точка*. Обикновено това разстояние нараства с възрастта: на 10 години то е около 18 cm, а на 60 годишна възраст може да достигне 500 cm. За стандартното око разстоянието на най-ясно гледане се приема за 25 cm.

Коригиране на зрението

Късогледството е дефект на окото, при който не се виждат ясно отдалечените предмети. Далечната точка за късогледното око обикновено се намира на по-малко от 1 m от окото (за нормалното око тя е в безкрайност). Когато предметът се намира зад далечната точка, дори при отпуснат очен мускул лъчите се пречупват от окото твърде силно и образът се получава пред ретината (фиг.89-5а). Този недостатък на окото се коригира с разсейвателна леща (очила или контактни лещи). Подбира се разсейвателна леща, чийто

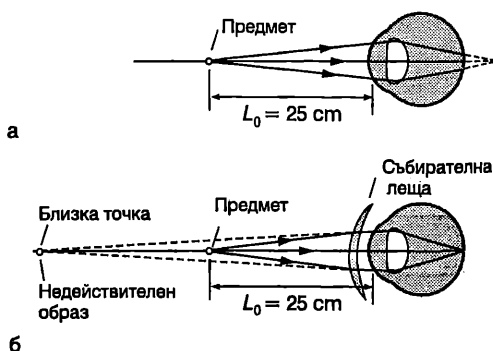


Фиг.89-5. Късогледо око.

фокус да съвпада с далечната точка (фиг. 89-5б). Тогава недействителният образ на безкрайно отдалечен предмет се получава в далечната точка (във фокалната равнина на лещата). По този начин разсейвателната леща все едно пренася предмета от безкрайност в далечната точка, откъдето той може ясно да се види, защото образът му попада върху ретината.

Далекогледството е дефект на окото, при който не се виждат ясно близките предмети. Когато предметът се постави в близката точка за нормално око (на 25 cm от окото), дори при максимална акомодация лъчите не се пречупват достатъчно и образът се получава зад ретината (фиг. 89-6а). Затова далекогледите хора четат вестник отдалече – те отдалечават предмета, докато той попадне в близката точка на далекогледното око. Далекогледството се коригира със събирателни лещи. Подбира се такава леща, че когато предметът се намира на 25 cm пред лещата (окото),

Фиг.89-6. Далекогледо око.



б

неговият недействителен образ да се получи в близката точка на далекогледното око (фиг.89-66). По този начин събирателната леща все едно отдалечава предмета от близката точка за нормалното око в близката точка за далекогледното око, откъдето той ясно се вижда.

Лупа

Лупата, микроскопът и телескопът са оптични уреди, с които се постига една и съща основна цел: да се увеличат размерите на образа върху ретината на окото, който създава разглежданият през съответния уред предмет. Когато гледаме предмета с невъоръжено око, размерът на образа зависи от ъгъла α , под който окото вижда предмета. Когато предметът се приближава към окото, ъгълът α расте и образът върху ретината става по-голям. Ъгълът α достига максимална стойност α_0 , когато предметът е в близката точка (фиг. 89-7а). Той не може да се доближи повече, защото невъоръженото око няма да е в състояние да го фокусира. Ако обаче пред окото се постави събирателна леща с малко фокусно разстояние, наречена лупа, предметът може да се приближи още повече и ъгълът α да стане по-голям от α_0 . Когато предметът се намира между лещата и фокуса F , образът е недействителен, прав и увеличен. При преместване на предмета от фокуса F към лещата образът също се приближава към лещата. Ъгълът α е максимален, когато недействителният образ достигне разстоянието на най-ясно гледане (фиг.89-7б). Предметът и неговият недействителен образ не могат да се доближат повече до лещата, защото окото няма да е в състояние да фокусира образа. По определение **ъглово увеличение** m

на лупата се нарича отношението

$$(89.3) \quad m = \frac{\alpha}{\alpha_0}.$$

От правоъгълния триъгълник на фиг. 89-7а изразяваме $\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{h}{L_0}$ или $\alpha_0 \approx \frac{h}{L_0}$, където

сме отчели, че α_0 е малък ъгъл. От чертежа на фиг.89-7б получаваме аналогично

$$\text{равенство: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{a} \text{ или } \alpha \approx \frac{h}{a}.$$

Във формулата за тънка леща полагаме $b = -L_0$ (образът е недействителен) и получаваме $1/a = 1/f + 1/L_0$ или

$$\alpha = \frac{h}{a} = h \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{L_0} \right).$$

Заместваме α и α_0 във формула (89.3) и за ъгловото увеличение на лупата получаваме

$$(89.4) \quad m = 1 + \frac{L_0}{f}.$$

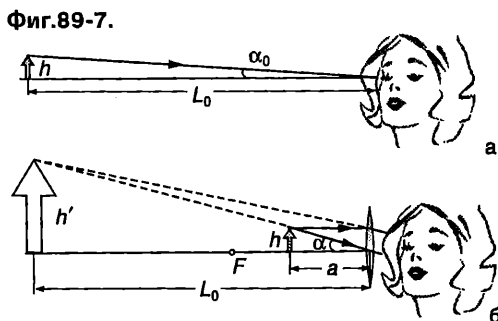
Това е максималното увеличение на лупата. То се постига при максимална акомодация на окото. Нормалното око може да фокусира недействителния образ от лупата, когато той се намира между близката точка и безкрайност. Когато очният мускул е максимално отпуснат (неакомодирано око), недействителният образ от лупата трябва да е в безкрайност. Тогава предметът се намира във фокуса на лупата, т.е. $a = f$ и $\alpha \approx h/f$. След като заместим α_0 и α във формула (89.3), за увеличение то на лупата при неакомодирано око получаваме

$$(89.5) \quad m = \frac{L_0}{f}.$$

С обикновена лупа (единична леща) се постига ъглово увеличение до 3 – 4 пъти.

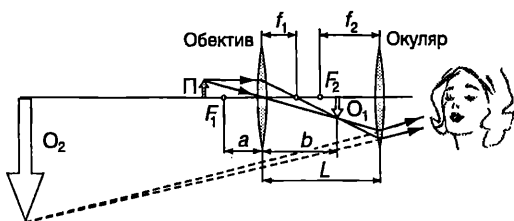
Микроскоп

За по-голямо увеличение при наблюдаване на малки предмети се използват микроскопи. Микроскопът се състои от две събирателни лещи (или две системи от лещи): обектив с много малко фокусно разстояние f_1 ($f_1 < 1$ см) и окуляр с фокусно разстояние f_2 няколко сантиметра. Две-



Фиг.89-7.

те лещи имат обща главна оптична ос и са разположени на разстояние L една от друга. Предметът Π се поставя непосредствено пред фокуса F_1 на обектива (фиг. 89-8). Обективът създава увеличен и обърнат образ O_1 , който се намира зад фокуса F_2 на окуляра (или в самия фокус F_2). Действителният образ O_1 след това се наблюдава през окуляра като през лупа: за окуляра O_1 е предмет, чиито образ O_2 е недействителен, увеличен и прав. Разстоянието L може да се подбере така, че образът O_2 да се намира на разстоянието на най-ясно гледане или в безкрайност (както при лупата). Когато O_2 е в безкрайност, окулярът работи като лупа с ъглово увеличение $m_2 = L_0/f_2$ (вж. формула (89.5)),



Фиг. 89-8. Крайният образ O_2 , който се получава от микроскоп, е недействителен, увеличен и обърнат.

където $L_0 = 25$ cm е разстоянието на най-ясно гледане. Образът O_1 се получава от обектива с линейно увеличение $M_1 = -b/a$. Като отчетем, че $a \approx f_1$ и $b \approx L - f_2$, за линейното увеличение на обектива получаваме $M_1 \approx -(L - f_2)/f_1$. (За да се получи по-нагледен чертеж, на фиг. 89-8 предметът Π и образът му O_1 са поставени сравнително далече от фокусите F_1 и F_2 .)

Ъгловото увеличение на микроскопа по определение е равно на произведението от линейното увеличение на обектива M_1 и ъгловото увеличение на окуляра m_2 :

$$(89.5) \quad m = M_1 m_2 = -\frac{(L - f_2)L_0}{f_1 f_2}.$$

Знакът минус показва, че крайният образ O_2 на предмета Π е обърнат.

Задачи

1. Предмет с височина $h = 1$ cm се намира на разстояние $a = 15$ cm от събирателна леща с фокусно разстояние $f = 5$ cm. Определете положението, височината и вида на образа.
2. Предмет се намира на 20 cm от леща. Определете вида на лещата и фокусното ѝ разстояние, ако образът е обърнат и увеличен 3 пъти.
3. Предмет се намира на 30 cm от леща. Определете вида на лещата и фокусното ѝ разстояние, ако образът се получава с линейно увеличение: а) $M = 0,5$; б) $M = -0,5$.
4. За определяне на фокусното разстояние на събирателна леща е направен следният опит. Екран е разположен на разстояние $L = 50$ cm от точков източник на светлина. Лещата се движи между източника и екрана така, че източникът винаги да лежи върху главната оптична ос. Върху екрана се получава контрастен образ на източника при две положения на лещата, разстоянието между които е $x = 10$ cm. Колко е фокусното разстояние на лещата?

Указание. Запишете формулата за тънка леща във вида $f = \frac{ab}{a+b}$. В случая $a + b = L = \text{const}$.

5. Защо всяко нормално око става далекогле, когато гледа под вода?

Указание. Сравнете показателите на пречупване на въздуха, водата и корnea.

6. Докажете, че когато образът от лупа се намира в близката точка, линейното увеличение и ъгловото увеличение на лупата са равни.
7. Филателист използва като лупа събирателна леща с фокусно разстояние 8 cm. Той държи лупата близо до окото си и наглася разстоянието от лупата до марката така, че недействителният образ на марката да се намира на разстоянието на най-ясно гледане за неговото око, което е $L_0 = 24$ cm. Колко е ъгловото увеличение на лупата?

8. Катя и баба ѝ използват събирателна леща с фокусно разстояние 15 cm като лупа. Колко е максималното ъглово увеличение на лупата за всяка от тях, ако близката точка за окото е: а) $L_{01} = 15$ cm за Катя; б) $L_{02} = 60$ cm за баба ѝ? в) Коя от двете може да разгледа с лупата по-добре малки детайли от предмета?

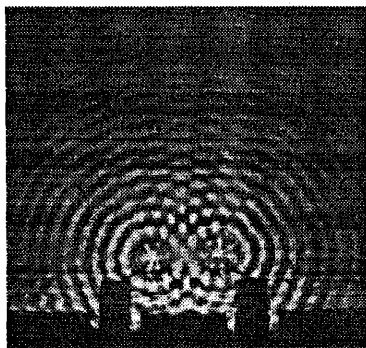
9. Разстоянието между обектива и окуляра на микроскоп е 24 cm. Фокусното разстояние на обектива е 0,6 cm, а на окуляра е 3 cm. Колко е ъгловото увеличение на микроскопа?

90. Интерференция

Вълновите свойства на светлината най-ясно се проявяват в явленията интерференция и дифракция. Тези явления са типични за всички вълнови процеси: както за механичните вълни, така и за електромагнитните вълни. Интерференция се нарича явлението, при което в резултат на едновременното разпространение на няколко вълни се получава постоянно във времето увеличаване на амплитудата на резултантната вълна в едни области и отслабване – в други области.

За вълни по водна повърхност интерференция може да се наблюдава в демонстрационна водна вана, където източници на вълни са две еднакви остриета, свързани към общ вибратор. За някои точки от водната повърхност пристигането на гребен на вълната от единия източник винаги се съпровожда с едновременно пристигане на гребен на вълната от другия източник. Поради това двете вълни взаимно се усилват и в тази област се наблюдава интерференчен максимум (фиг.90-1). В други области вълните взаимно се гасят, за-

Фиг.90-1.
Интерференция на вълни по водна повърхност.



щото винаги едновременно пристигат гребен на едната вълна и дол на другата вълна: наблюдава се интерференчен минимум. Редуващите се максимуми и минимуми създават постоянна във времето интерференчна картина.

Интерференция на светлината

Нека в пространството се разпространяват едновременно две светлинни вълни. Да означим с E_1 и E_2 интензитетите на елек-

тричните полета на двете вълни в дадена точка P . Съгласно с принципа на суперпозицията интензитетът на резултантното поле в точка P е $E = E_1 + E_2$. При механични вълни със сравнително ниски честоти е възможно непосредствено да се измери отклонението на частиците от дадена област от равновесното им положение, неговата амплитуда и зависимост от времето (вълна на отклонението). Може също да се измери зависимостта на звуковото налягане от времето (вълна на налягането). За електромагнитните вълни от видимата област интензитетът на електричното поле се изменя с честота ν от порядъка на 10^{14} Hz. Такова бързо изменение на полето не може да се регистрира непосредствено поради голямата инертност на приемниците на лъчение. Затова всички приемници, както и човешкото око, са чувствителни към енергетични величини, например към интензитета I на светлината, които са осреднени за интервал от време t (определен от инертността на приемника), който е много по-голям от периода на вълната $T = 1/\nu$. Интензитетът I на светлината в точка P е пропорционален на средната стойност на квадрата на интензитета на електричното поле (вж. §85):

$$(90.1) \quad I \propto \overline{E^2} = (\overline{E_1 + E_2})^2 = \overline{E_1^2} + \overline{E_2^2} + 2\overline{E_1 \cdot E_2}.$$

Величината $2\overline{E_1 \cdot E_2}$ се нарича интерференчен член. Когато той е нула, пълният интензитет на светлината е сума от интензитетите на светлината от двата източника: $I = I_1 + I_2$. В този случай интерференция не се наблюдава. Ако интерференчният член е различен от нула, вълните се наричат *кохерентни вълни*. Източниците на такива вълни се наричат *кохерентни източници*. При наслагване на кохерентни вълни интерференчният член има различни стойности в различните области. Там, където той е положителен, интензитетът е по-голям, а където е отрицателен – по-малък. Възникват редуващи се светли и тъмни участъци, наречени *интерференчни ивици*.

Два точкови, идеално монохроматични източника на светлина с една и съща честота ν , винаги са кохерентни. Всички реални източници на светлина обаче имат

крайни размери и излъчват в определен честотен диапазон. Интерференция от такива източници се наблюдава само при изпълнение на определени условия, при които те могат да се смятат за кохерентни. На този въпрос ще се спрем по-подробно в следващия параграф.

Интерференция от два точкови монохроматични източника

Да разгледаме два еднакви точкови монохроматични източника, които излъчват синфазно. Върху отдалечен екран, разположен както е показано на *фиг.90-2*, се наблюдава интерференчна картина. Когато разстоянието d между източниците е много по-малко от разстоянието L до екрана, казва се, че екранът (приемникът) се намира в далечното поле на източниците. Ще смятаме също, че $d \gg \lambda$, където λ е дължината на вълната на излъчването. Задачата за намиране на положението на интерференчните максимуми и минимуми, както и на пространственото разпределение на интензитета на светлината, съществено се опростява, когато се разглежда интерференция в далечното поле. В този случай се правят следните важни приближения:

1. Амплитудите на електричните полета на двете сферични вълни съгласно с уравнение (86.5) на стр.183 намаляват обратнопропорционално на разстоянията r_1 и r_2 до точковите източници S_1 и S_2 . Тъй като в далечното поле всички точки от екрана са на приблизително равни разстояния от двата източника, т.е. $r_1 \approx r_2$, ще смятаме, че амплитудите на двете вълни са еднакви: $E_{01} = E_{02} = E_0$.

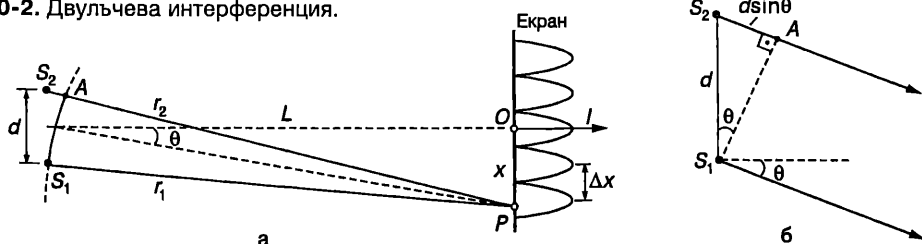
2. Ще приемем, че във всяка точка P от екрана вълните от двата източника се разпространяват в една и съща посока. Тогава електричните вектори E_1 и E_2 ле-

жат в една и съща равнина, перпендикулярна на посоката на разпространение. Ако вълните не са поляризирани, всяка от тях може да се представи като суперпозиция от две линейно поляризирани във взаимно перпендикулярни направления вълни. Вълните от двата източника с еднакво направление на линейна поляризация интерферират помежду си и създават интерференчна картина, която съвпада пространствено с интерференчната картина на вълните, които са поляризирани в перпендикулярното направление. Затова е достатъчно да се ограничим с разглеждането на интерференцията на вълни с еднаква линейна поляризация, за които електричните вектори E_1 и E_2 трептят в едно и също фиксирано направление. Това дава възможност да се прилага методът на векторните диаграми за събиране на трептения с еднаква честота, които се извършват в едно и също направление.

Ще отбележим, че когато вълните от двата източника са линейно поляризирани във взаимно перпендикулярни направления, скаларното произведение $E_1 \cdot E_2$ винаги е нула и интерференция не се наблюдава. Отсъствието на интерференция в този случай е било експериментално установено от Френел и Араго през 1816 година и послужило като доказателство в подкрепа на предположението, че светлинните вълни са напречни.

Построяваме окръжност с радиус r_1 с център в точката на наблюдение P (*фиг.90-2a*). Тъй като $L \gg d$, дъгата S_1A може с приближение да се приеме за отсечка, която едновременно е перпендикулярна на S_1P и S_2P . От правоъгълния триъгълник S_1AS_2 определяме разликата в геометричните пътища Δr на двете вълни от източниците до точката на наблюдение P (*фиг.90-2б*):

Фиг.90-2. Двuwлъчева интерференция.



$$(90.2) \quad \Delta r = r_2 - r_1 = S_2 A = d \sin \theta.$$

Когато разликата в пътищата Δr е равна на цяло число дължини на вълната λ , т.е.

$$(90.3) \quad \Delta r = d \sin \theta = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

в точка P едновременно пристигат гребени (долове) на двете вълни и те взаимно се усилят: наблюдава се интерференчен максимум (конструктивна интерференция).

Условието за деструктивна интерференция (интерференчен минимум) е

$$(90.4) \quad d \sin \theta = (m + \frac{1}{2}) \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тогава гребен на едната вълна винаги пристига едновременно с дол от другата вълна и двете вълни взаимно се гасят.

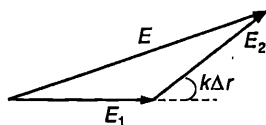
Електричните полета на двете вълни в точка P се изменят по хармоничните закони $E_1 = E_0 \sin(\omega t - k r_1)$ и $E_2 = E_0 \sin(\omega t - k r_2)$, т.е. между двете електромагнитни трептения има фазова разлика

$$(90.5) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = k(r_2 - r_1) = k \Delta r = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

На векторна диаграма представяме двете трептения с вектори, които сключват помежду си ъгъл $k \Delta r$ (фиг.90-3). Резултантното електрично поле се задава с вектор, който е тяхна геометрична сума. Ще подчертаем, че в случая векторното представяне има формален характер. Както при механичните трептения, използваме векторните диаграми за събиране на физични величини, които се изменят по хармоничен закон с еднаква кръгова честота. В действителност, както беше отбелязано, векторите на интензитета E_1 и E_2 на електричните полета на двете вълни са насочени в едно и също направление, а техните проекции върху това направление се изменят по хармоничен закон с постоянна фазова разлика $k \Delta r$. Прилагаме косинусовата теорема за триъгълника от фиг.90-3:

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1 E_2 \cos(k \Delta r).$$

Фиг.90-3.



Амплитудите на електричните полета на двете вълни в далечното поле са равни, т.е. $E_{01} = E_{02} = E_0$. Интензитетът на светлината е пропорционален на квадрата на амплитудата на резултантното електрично поле $I \propto E^2$. Следователно:

$$(90.6) \quad I(\theta) = 2I_0(1 + \cos(k \Delta r)) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{k \Delta r}{2}\right) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin \theta\right),$$

Величината $I_0 \propto E_0^2$ изразява интензитета на светлината в точка P , ако излъчваше само единият източник. От уравнение (90.6) следва, че в точките от екрана, за които е изпълнено условието за интерференчен максимум (90.3), интензитетът на светлината е $I_{\max} = 4I_0$. Следователно в интерференчните максимуми се получава 4 пъти по-голям интензитет, отколкото би създал само един отделен източник, и 2 пъти по-голям интензитет от този, който би се получил от два еднакви, но некохерентни източника. За точките, в които е изпълнено условието за интерференчен минимум (90.4), интензитетът е нула: $I_{\min} = 0$. При интерференцията става преразпределение на интензитета на светлината: върху екрана се редуват светли и тъмни ивици. Интензитетът на светлината се изменя по периодичния закон (90.6), който е представен графично на фиг.90-2а.

Пример 90.1. При интерференцията от два точкови източника практически интерес обикновено представлява интерференчната картина само в централната част на екрана.

Когато е в сила неравенството $x \ll L$, където x е разстоянието от центъра O на екрана до точката на наблюдение P (фиг.90-2а), определете:

а) положението x на интерференчните максимуми и минимуми;

б) широчината Δx на интерференчните ивици, т.е. разстоянието между два съседни интерференчни максимума (минимума).

Решение. а) Когато $L \gg x$, ъгълът θ е малък и използваме приближението $\sin \theta \approx \tan \theta = x/L$ (фиг.90-2а). Заместваме $\sin \theta$ в уравнения (90.3) и (90.4) и намираме условията за интерференчен максимум и минимум:

$$\frac{d}{L} x = m \lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) - \text{максимум};$$

$$\frac{d}{L}x = (m + \frac{1}{2})\lambda \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) - \text{минимум.}$$

Координатите на максимума и минимума от m -ти порядък са

$$x_m(\max) = m \frac{L\lambda}{d}; \quad x_m(\min) = (m + \frac{1}{2}) \frac{L\lambda}{d}.$$

б) Да означим с x_m и x_{m+1} координатите на интерференчните максимуми съответно от m -ти и $m+1$ -ви порядък. Разстоянието между тях, т.е. широчината Δx на интерференчната ивица, е

$$\Delta x = x_{m+1} - x_m = (m+1) \frac{L\lambda}{d} - m \frac{L\lambda}{d} = \frac{L\lambda}{d} = \text{const.}$$

Следователно всички интерференчни ивици, които се наблюдават в централната част на екрана, имат еднаква широчина. Тя е пропорционална на дължината на вълната λ и на разстоянието L от източниците до екрана и е обратнопропорционална на разстоянието d между двата източника.

Оптичен път

Когато вълните от двата точкови източника (фиг.90-2) се разпространяват в оптически еднородна среда, фазовата разлика между двете вълни в точката на наблюдение P се изразява с уравнение (90-5), където λ е дължината на вълната в дадената среда. Да предположим, че вълната от първия източник (фиг.90-2а) изминава разстоянието r_1 в среда с показател на пречупване n_1 , а вълната от втория източник изминава разстоянието r_2 в среда с показател на пречупване n_2 . В този случай фазовата разлика между двете вълни в точка P е

$$\varphi_1 - \varphi_2 = k_2 r_2 - k_1 r_1 = \frac{2\pi}{\lambda_2} r_2 - \frac{2\pi}{\lambda_1} r_1,$$

където k_1 , λ_1 и k_2 , λ_2 са съответно вълновите числа и дължините на вълните в двете среди. Дължината на вълната λ в материална среда може да се изрази чрез дължината на вълната във вакуум λ_0 и показателя на пречупване n на средата: $\lambda = \lambda_0/n$ (вж. пример 87.1 на стр.188). Тъй като двата източника имат еднаква дължина на вълната във вакуум, за фазовата разлика се получава

$$(90.7) \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_2 r_2 - n_1 r_1).$$

Когато светлината се разпространява в оптически еднородна среда, величината, равна на произведението от геометричния път r на лъча и показателя на пречупване n на средата, се нарича *оптичен път* $n r$ на лъча. Фазовата разлика между две вълни с еднакви честоти се определя от разликата в оптичните пътища на съответните лъчи.

Пример 90.2. При интерференция от два точкови източника пред единия от тях поставят стъклена пластинка с дебелина $a = 1$ mm и показател на пречупване $n = 1,5$. Определете порядъка m на интерференчния максимум, който се наблюдава в центъра O на отдалечен екран (фиг.90-2а). Дължината на вълната във вакуум е $\lambda_0 = 500$ nm.

Решение. Лъчите от двата източника изминават еднакво разстояние до центъра на екрана, но оптичните им пътища са различни, защото единият преминава през пластинката. Разликата в оптичните пътища е $n a - n_a a$, където $n_a = 1$ е показателят на пречупване на въздуха. Условието за интерференчен максимум в центъра на екрана е $(n - n_a) a = (m - 1) \lambda_0$, откъдето определяме порядъка m на максимума в центъра на екрана:

$$m = \frac{(n - 1)a}{\lambda_0} = 1000.$$

Задачи

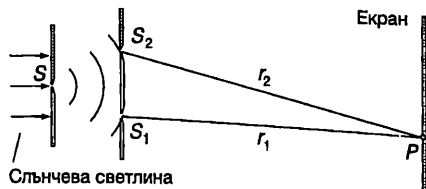
- Двата точкови кохерентни източника от фиг.90-2 излъчват в противофаза. Изразете интензитета на светлината $I(\theta)$ като функция на ъгъла θ .
- Двата точкови кохерентни източника от фиг.90-2 излъчват във фаза. Изразете интензитета на светлината $I(\theta)$ като функция на ъгъла θ , ако вълната от първия източник има 3 пъти по-голяма амплитуда ($E_1 = 3E_2$).
- Пред точковия източник S_1 на фиг.90-2 се поставя стъклена пластинка с дебелина $a = 0,1$ mm и показател на пречупване $n = 1,5$. На какво разстояние x от центъра на екрана ще се премести интерференчният максимум от нулев порядък? Разстоянието между източниците е $d = 5$ mm, разстоянието до екрана е $L = 5$ m, дължината на вълната във въздуха (вакуум) е $\lambda_0 = 500$ nm.

91. Интерференция на светлината – класически опити

Два реални източника на светлина обикновено са некохерентни. За да се наблюдава интерференцията, на практика се налага използването само на един източник. Излъчената от него светлина се разделя на два кохерентни снопа, които изминават различни пътища и отново се събират, при което интерферират помежду си. Ще разгледаме някои от класическите опити за наблюдаване на интерференция на светлината.

Опит на Юнг

През 1801 г. английският физик Томас Юнг (1773–1829) създава експериментална постановка за наблюдаване на интерференция на светлината и пръв успява да определи дължината на светлинните вълни за различните цветове. В опита на Юнг ярък сноп слънчева светлина осветява непрозрачен екран с малък отвор S (фиг.91-1). Съгласно с известния от училищния курс по физика принцип на Хюйгенс (на принципа на Хюйгенс ще се спрем отново в следващия параграф), отворът S може с приближение да се разглежда като нов точков източник на светлина. Сферичната вълна от точковия източник S попада върху втори екран с два малки отвора S_1 и S_2 , разположени симетрично спрямо S и много близо един до друг. Отворите S_1 и S_2 лежат на една и съща вълнова повърхност на падащата вълна и съгласно с принципа на Хюйгенс играят ролята на вторични, излъчващи синфазно източници на сферични вълни с еднаква честота, които са кохерентни. Двете вълни интерферират и върху отдалечен екран E се наблюдават редуващи се светли и тъмни ивици. Поради големите си ъглови размери Слънцето не може да се разглежда като точков източник. Излъчените от различните му части светлинни вълни не са кохерентни. Затова, ако го няма първият екран, вторичните източници S_1 и S_2 също ще бъдат некохерентни и интерференция няма да се наблюдава. За да се увеличи яркостта на интерференчната картина, в

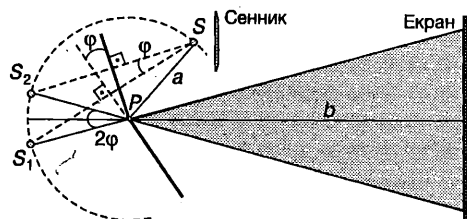


Фиг.91-1. Опит на Юнг.

опита на Юнг вместо малки кръгли отвори се използват тесни, успоредни един на друг процепи S , S_1 и S_2 , които са перпендикулярни на равнината на чертежа от фиг.91-1. Тази замяна не води до изменения в разпределението на интензитета на светлината в централната част на екрана, където всички разглеждания, направени в §90 за интерференция от два точкови източника, остават в сила.

Огледала на Френел

През 1816 г. френският физик Огюст Френел (1788–1827) наблюдава интерференция на светлината с помощта на две огледала, чиито равнини сключват помежду си малък ъгъл φ (фиг.91-2). За източник се използва тесен, ярко осветен процеп S ,



Фиг.91-2. Огледала на Френел.

който е успореден на пресечницата на огледалата. В областта, където се припокриват отразените от двете огледала светлинни снопове, възниква интерференция (сивата област на фиг.91-2). Екранът, върху който се наблюдава интерференчната картина, е защитен със сенник от пряко попадане на светлинни лъчи от източника.

Пример 91.1. В опита с огледалата на Френел определете широчината Δx на интерференчните ивици върху екрана. Дадени са (вж. фиг.91-2) ъгълът между огледалата $\varphi = 10'$, разстоянието от процепа до огледалата $a = 0,15$ m

и разстоянието от огледалата до екрана $b = 1,5 \text{ m}$. Дължината на вълната е $\lambda = 589 \text{ nm}$.

Решение. Построяваме образите S_1 и S_2 на източника S от двете плоски огледала (фиг.91-2). Вместо да разглеждаме хода на лъчите, отразени от двете огледала, можем да заменим огледалата с два кохерентни източника, чието положение съвпада с образите S_1 и S_2 на реалния източник S . Такъв подход се нарича *метод на оптичните образи*. Разликата в ходовете на два лъча, които излизат от образите S_1 и S_2 и интерферират върху екрана, е същата, както за съответните действителни лъчи, отразени от двете огледала. Така задачата се свежда до намиране на положението на образите: разстоянието между тях и от тях до екрана. Всички разсъждения след това са същите, както при вече разгледаната задача в §90 за интерференция от два точкови източника.

Да намерим положението на образите. От фиг.90-2 се вижда, че $S_1P = S_2P = a$, т.е. точките S_1 и S_2 лежат на една окръжност с радиус a и център в точка P . Ъгълът ϕ между двете огледала е равен на ъгъл $\angle S_1SS_2$ (ъгли с взаимноперпендикулярни рамена). Централният ъгъл $\angle S_1PS_2$ и вписаният ъгъл $\angle S_1SS_2$ отсичат от окръжността една и съща дъга S_1S_2 , поради което $\angle S_1PS_2 = 2\angle S_1SS_2 = 2\phi$. За малки ъгли хордата S_1S_2 е приблизително равна на дъгата S_1S_2 . Разстоянието между двата образа е

$$d = S_1S_2 = 2a\phi.$$

Тъй като d е много по-малко от a и b , разстоянието от образите до центъра на екрана е приблизително равно на $L \approx a + b$. По-нататък използваме резултата от пример 90.1 на стр. 204 и определяме широчината на интерференчните ивици:

$$\Delta x = \frac{L}{d}\lambda = \frac{a+b}{2a\phi}\lambda = 1,1 \text{ mm}.$$

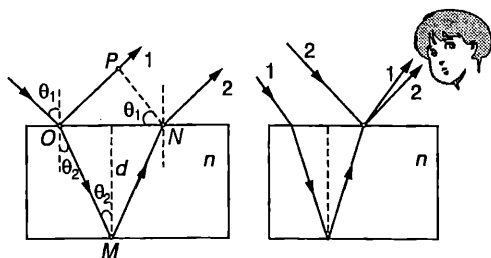
(При числените пресмятания ъгълът ϕ трябва да се превърне от минути в радиани: $\phi = 10' = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$).

се отразява от точка M на долната повърхност на пластинката и след това се пречупва в точка N (фиг.91-3). Отразените от двете повърхности на пластинката вълни, които се представят чрез тези два лъча, имат приблизително еднакъв интензитет, който е около 4% от интензитета на падащата вълна (вж. §87). Няма да отчитаме вълните, получени в резултат на многократно отражение вътре в пластинката, тъй като те имат много по-малък интензитет. Както се вижда от фиг.90-3, успоредните лъчи 1 и 2 изминават различни оптични пътища. Те се пресичат в безкрайност или във фокалната равнина на събирателна леща, където се наблюдават интерференчни ивици. Положението на интерференчните максимуми (минимуми) се определя от разликата в оптичните пътища на двата лъча, която зависи от ъгъла на падане θ_1 , дебелината d на пластинката и от показателя на пречупване n на стъклото. Получените по този начин ивици се наричат интерференчни *ивици на еднакъв наклон*, защото върху пластинката падат успоредни лъчи, които сключват еднакъв ъгъл θ с нейната нормала. Казва се, че интерференчните ивици на еднакъв наклон са локализирани в безкрайност, защото формално погледнато там се пресичат успоредните лъчи и интерферират помежду си. Такива ивици могат да се наблюдават и с невъоръжено око, което играе ролята на леща, събираща успоредните лъчи върху ретината, където се получава интерференчната картина.

Друг случай на интерференция от тънка пластинка е показан на фиг.91-4. Интерференчната картина е локализирана върху самата повърхност на пластинката или в близост до нея. За да се наблюдава интерференция, пластинката трябва да е до-
Фиг.91-3. **Фиг.91-4.**

Интерференция от тънки слоеве

Плоска монохроматична вълна с дължина във вакуум (въздух) λ_0 пада под ъгъл θ_1 върху плоскопаралелна стъклена пластинка с дебелина d . На фиг.91-3 е показан ходът на един от лъчите. На двете граници стъкло-въздух се извършва отражение и пречупване на светлината. Ще се ограничим с разглеждането само на два лъча: отразения от точка O лъч 1 и лъч 2, който



статъчно тънка (от порядъка на микроми). Не е необходимо нейните повърхности да са идеално успоредни, дори те може да не са плоски. В бяла светлина интерференчните ивици са оцветени. Такива ивици лесно се наблюдават върху сапунени мехури, тънки слоеве масло или бензин върху мокрия асфалт и др. На местата, където дебелината на слоя е такава, че се изпълнява условието за интерференчен максимум за дадена дължина на вълната от видимата област, слойът е оцветен в съответстващия на нея цвят. Затова наблюдаваните ивици се наричат *ивици на еднаква дебелина*.

Пример 91.2. От плоскопаралелна пластинка с дебелина d и показател на пречупване n в отразена светлина се наблюдават интерференчни ивици на равен наклон (фиг.91-3). Изразете условието за интерференчен максимум (минимум) чрез ъгъла на пречупване θ_2 . Дължината на светлинната вълна във въздуха е λ_0 .

Решение. При отражение от оптически поплътна среда, в случая от границата въздух – стъкло, вълната променя фазата си с $\pm\pi$, което е равносилно на геометричен път $\pm\lambda_0/2$. За определеност ще приемем, че поради отражението от оптически поплътната среда лъчът 1 изминава допълнителен път $\lambda_0/2$. Тогава разликата в оптичните пътища на лъчите 1 и 2 е

$$2n|OM| - \left(|OP| + \frac{\lambda_0}{2}\right) \quad (\text{фиг.91-3}).$$

От правоъгълните триъгълници на фиг.91-3 определяме отсечките $|OM|$ и $|OP|$:

$$|OM| = \frac{d}{\cos\theta_2};$$

$$|OP| = |OM|\sin\theta_1 = 2d\tg\theta_2\sin\theta_1.$$

Изразяваме $\sin\theta_1$ от закона на Снелиус $\sin\theta_1 = n\sin\theta_2$ и за разликата в оптичните пътища получаваме

$$\begin{aligned} \frac{2nd}{\cos\theta_2} - \frac{2nd\sin^2\theta_2}{\cos\theta_2} - \frac{\lambda_0}{2} = \\ = 2nd\cos\theta_2 - \frac{\lambda_0}{2}. \end{aligned}$$

Условието за интерференчен максимум (минимум) е

$$2nd\cos\theta_2 - \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0 \quad - \text{максимум};$$

$$2nd\cos\theta_2 - \frac{\lambda_0}{2} = (m + \frac{1}{2})\lambda_0 \quad - \text{минимум},$$

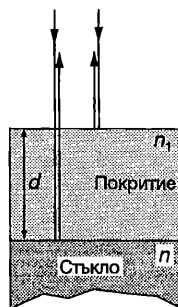
където $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Пример 91.3. За да се намали отражението от лещите на оптичните апарати (фотоапарати, камери, бинокли и др.), и по този начин да се увеличи интензитетът на преминалата светлина, се използват т. нар. просветляващи покрития. Върху лещата се нанася тънък слой от прозрачен диелектрик с определена дебелина и показател на пречупване, който е по-малък от този на лещата.

При каква дебелина d и показател на пречупване n_1 на просветляващото покритие интензитетът на отразената светлина ще бъде минимален за жълто-зелената светлина ($\lambda_0 = 550 \text{ nm}$)? Показателят на пречупване на стъклото на лещата е $n = 1,89$. Да се приеме, че светлината пада перпендикулярно на повърхността на покритието.

Решение. Интерферираат лъчите, отразени от двете повърхности на покритието (фиг.91-5). Разликата в оптичните им пътища е $2n_1d$. И двете отражения стават от оптически поплътна среда, поради което измененията на фазите на двете вълни взаимно се компенсират. Когато интерференцията между двете отразени вълни е деструктивна, резултантната вълна ще има минимален интензитет. Условието за интерференчен минимум е

$$2n_1d = (m + \frac{1}{2})\lambda_0.$$



Фиг.91-5.

Минималната дебелина на покритието, удовлетворяваща това условие, е при $m = 0$:

$$d_{\min} = \frac{\lambda_0}{4n_1}.$$

За да се получи пълно гасене на двете вълни, те трябва да имат еднакъв интензитет. Интензитетите на отразените вълни ще са приблизително равни, ако коефициентите на отражение от двете граници въздух – покритие и покритие – стъкло са еднакви. От формула (87.4) на стр.190 изразяваме коефициентите на отражение от двете граници и ги приравняваме:

$$\frac{(n_1 - 1)^2}{(n_1 + 1)^2} = \frac{(n - n_1)^2}{(n + n_1)^2}.$$

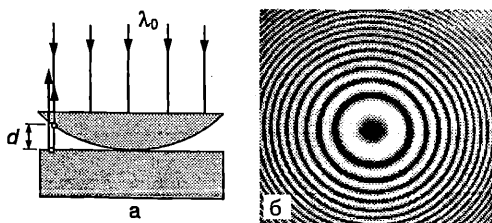
След елементарни преобразования получаваме $n_1 = \sqrt{n} \approx 1,37$.

Заместваме стойността на n_1 в израза за минималната дебелина на покритието и получаваме $d = 0,1 \mu\text{m}$. Ще отбележим, че условието за интерференчен минимум в този случай не се изпълнява за червената и виолетовата светлина, затова част от светлината от тези области на спектъра се отразява. Чрез по-сложни трислойни покрития се постига намаляване на отразението в сравнително широка област от спектъра. Често за просветляващи покрития се използва магнезиев флуорид ($n_1 = 1,38$).

Нютонови пръстени

Роберт Хук (същият, който изследва еластичните свойства на телата и е известен със закона на Хук) пръв наблюдава интерференчни ивици на еднаква дебелина от въздушния слой между плоскопаралелна пластинка и плоскоизпъкнала леща (фиг.91-6а). Сноп монохроматична светлина с дължина на вълната λ_0 пада перпендикулярно върху плоската повърхност на лещата. Интерферираат лъчите, които се отразяват от пластинката, с тези, които се отразяват от изпъкналата повърхност на лещата, т.е. от границата стъкло-въздух. На местата, където дебелината d на въздушния слой удовлетворява условието $2d + \lambda_0/2 = m\lambda_0$, се наблюдава интерференчен максимум. В условието за максимум е отчетено, че лъчът, отразен от долната пластинка, два пъти преминава през въздушния слой и е прибавен допълнителен път $\lambda_0/2$, отчитащ отражението от оптически по-плътната среда (пластинката). Интерференчната картина е локализирана върху повърхността на въздушния слой и е съставена от редуващи се светли и тъмни концентрични кръгове с център в допирната точка на лещата и пластинката

Фиг.91-6. Нютонови пръстени.



(фиг.91-6б). Интерференчните ивици по-късно били наречени нютонови пръстени, в чест на Нютон, който подробно изследва явлението, но не успява напълно да го обясни, защото разглежда светлината като поток от частици, а не като вълна.

Кохерентност

В разгледаните опити приехме, че източникът излъчва монохроматична светлина. Реалните източници на светлина обаче излъчват в цял спектрален диапазон с дължини на вълната от λ до $\lambda + \delta\lambda$ (в случая с λ е означена дължината на вълната във вакуум). Широчината $\delta\lambda$ на този диапазон е различна за различните източници. За някои от тях той покрива цялата видима област (източници на бяла светлина). В най-тесен спектрален диапазон излъчват лазерните източници на светлина, които в най-голяма степен се доближават до модела „монохроматичен източник“. Светлината на реален източник може да се разглежда като суперпозиция от монохроматични вълни с различни дължини. В опитите за наблюдаване на интерференция всяка от вълните се разделя на две части, които изминават различни оптични пътища, след което интерферира помежду си и създават своя интерференчна картина. Върху екрана се наслагват една върху друга независими интерференчни картини, всяка от които съответства на определена дължина на вълната. В областите от екрана, където интерференчните максимуми (минимуми) за различните дължини на вълната се получават на едни и същи места, се наблюдава контрастна интерференчна картина. Там, където максимумите за едни дължини на вълната съвпадат с минимумите за други дължини на вълната, екранът е равномерно осветен, т.е. интерференция не се наблюдава. Контрастна картина се получава, когато разликата в оптичните пътища на интерфериращите лъчи е малка (например в централната част от екрана при опита на Юнг). Видимостта на интерференчните ивици от по-висок порядък намалява – те се наблюдават върху светъл фон и стават все по-трудно различими. Доказва се, че максималният порядък m_{max} на ивицата, която все още ясно

се вижда, се определя от равенството

(91.1)

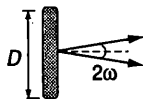
$$m_{\max} = \frac{\lambda}{\delta \lambda}.$$

Затова интерференция на слънчева (бяла) светлина може да се наблюдава само от много тънки ципи, където разликата в оптичните пътища на интерфериращите лъчи е малка и се получават ивици от нисък порядък m ($m < m_{\max}$). Ще отбележим, че визуалното наблюдение на ивиците се подпомага от различната чувствителност на човешкото око към светлината с различна дължина на вълната, както и от способността му да различава цветовете.

Реалните източници освен това имат крайни размери, т.е. те не са точкови. Всяка малка област от повърхността им може да се разглежда като точков източник. Тези отделни точкови източници обаче не са кохерентни. Всеки от тях създава своя интерференчна картина (например при опита на Юнг или с нютоновите пръстени). Лъчите от различните части на източника изминават различни оптични пътища, поради което съответните интерференчни картини са изместени една спрямо друга и контрастът намалява. Контрастна картина се получава само ако интерфериращите лъчи излизат от всички точки на източника приблизително под един и същ малък ъгъл 2ω , наречен *апертура на интерференцията* (фиг.91-7). Доказва се, че интерференчната картина е контрастна, ако е изпълнено неравенството

$$(91.2) \quad 2\omega D \leq \frac{\lambda}{2},$$

където D е размерът на из-



Фиг.91-7.

точника в направление, перпендикулярно на излизащите от него лъчи (фиг.91-7).

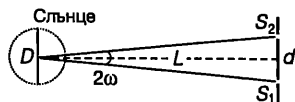
И така, интерференция от реални източници на светлина се получава само при определени условия: когато източниците не са монохроматични, изисква се малка разлика в ходовете на интерфериращите лъчи, а когато имат крайни размери, необходима е малка апертура на интерференцията. Само при тези условия двата снопа, на които се разделя светлината от реален източник, са кохерентни.

Пример 91.4. Повече от 140 години преди Юнг италианският учен Грималди извършва подобен на неговия опит. В опита на Грималди обаче слънчевата светлина пада непосредствено върху екран с два процепа (липсва първият екран от фиг.91-1). Грималди наблюдава равномерно осветен екран.

Какво трябва да бъде разстоянието d между процепите в този случай, за да се наблюдава контрастна интерференчна картина? Дължината на вълната да се приеме за $\lambda = 550 \text{ nm}$, ъгловият диаметър на Слънцето е $\delta = 32'$.

Решение. От чертежа на фиг.91-8 определяме апертурния ъгъл $2\omega = d/L$, където L е разстоянието от Земята до Слънцето. Заместваме 2ω в неравенство (91.2):

$$\frac{dD}{L} \leq \frac{\lambda}{2},$$



Фиг.91-8.

където D е диаметърът на Слънцето. След като отчетем, че отношението D/L е равно на ъгъла δ , измерен в радиани, под който Слънцето се вижда от Земята, получаваме

$$d \leq \frac{\lambda}{2\delta} = 30 \text{ } \mu\text{m}.$$

За нанасяне на шрихи (процепи) на такива малки разстояния се изисква специална технология, което обяснява защо през XVII век Грималди не е успял да наблюдава интерференция.

Задачи

1. Тънък слой от ацетон ($n_1 = 1,25$) покрива дебела стъклена пластинка ($n_2 = 1,50$). Перпендикулярно на слоя пада бяла светлина. В отражена светлина се наблюдава интерференчна картина. Определете дебелината на слоя, ако за светлината с дължина на вълната 700 nm интерференцията е конструктивна, а за светлината с дължина на вълната 600 nm – деструктивна.

2. Покажете, че радиусите на нютоновите пръстени (фиг.91-6) са

$$r_m(\text{тъмен}) = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}} \sqrt{2m}; \quad r_m(\text{светъл}) = \sqrt{\frac{R\lambda}{2}} \sqrt{2m-1},$$

където R е радиусът на лещата, $m = 1, 2, 3, \dots$

92. Френелова дифракция

Под дифракция обикновено се разбират отклоненията от закона за праволинейното разпространение на светлината в еднородна среда. Дифракция се наблюдава, например, когато на пътя на светлината се постави непрозрачно тяло или когато светлината преминава през отвор в непрозрачен екран. Съгласно със закона за праволинейното разпространение зад непрозрачните тела трябва да се образува сянка, т.е. област с ясно очертани граници, в която светлината не прониква. Опитът обаче показва, че вместо рязка граница между светлото и тъмното, се наблюдава сложно разпределение на интензитета на светлината: редуват се светли и тъмни участъци, наречени *дифракционни ивици*. Най-силно изразени са дифракционните ефекти, когато размерите на преградите (или отворите) са сравними с дължината на вълната на светлината (например когато са от порядъка на микрони или десетки микрони).

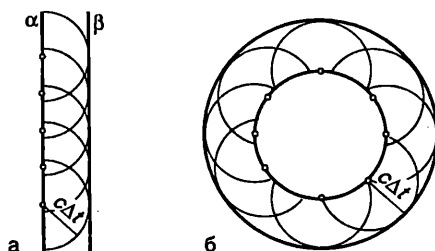
Принцип на Хюйгенс

Явлението дифракция се описва количествено от електромагнитната теория на светлината. Решаването на уравненията на Максвел при съответните гранични условия обаче е много сложна задача. За да се намери разпределението на интензитета на дифрактиралата, т.е. отклонилата се от праволинейното си разпространение светлина, в редица важни за практиката случаи е достатъчно да се използва приближен метод, предложен за пръв път през 1678 година от холандския физик Християн Хюйгенс (1629–1695) и наречен в негова чест *принцип на Хюйгенс*. Съгласно с принципа на Хюйгенс всички точки от даден вълнов фронт се разглеждат като точкови източници на вторични (елементарни) сферични вълни. Вълновият фронт след време Δt представлява повърхност, която е допирателна към фронтите на вторичните вълни (обвиваща повърхност). Принципет на Хюйгенс се прилага не само за светлината, но и за всички вълнови процеси. Фиг. 92-1 илюстрира как

с помощта на принципа на Хюйгенс се построяват вълновите фронтове на плоска и на сферична вълна. Нека в момента t вълновият фронт на плоска вълна е равнината α (фиг.92-1а). Всяка точка от равнината α е източник на вторични сферични вълни. В момента $t + \Delta t$ фронтите на вторичните вълни са полусфери с радиуси $c\Delta t$, където c е скоростта на вълните (за нагледност на чертежа са построени фронтите само на няколко вторични вълни). Повърхността, която е допирателна към вълновите фронтове на вторичните вълни, в случая е равнината β . По аналогичен начин се построява фронтът на сферична вълна (фиг.92-1б).

За да обясни защо вторични вълни не се разпространяват в обратна посока, Хюйгенс предполага, че вторичните вълни са много слаби и оказват доловимо „светлинно действие“ само в точките от обвиващата повърхност. Това предположение лишава елементарните вълни от физично съдържание и ги превръща единствено в геометричен модел, чрез който може да се построи вълновият фронт. Френел допълва принципа на Хюйгенс. Той разглежда точките от вълновия фронт като източници на вторични кохерентни вълни, които интерферират помежду си. В точките от обвиващата повърхност всички вторични вълни пристигат с еднакви фази, взаимно се усиливат и формират фронта на разпространяващата се вълна. Вторичните вълни, които се разпространяват назад, интерферират не само помежду си, но и с идващата (първична) вълна. При интерференцията те гасят първичната вълна, така че след преминаване на вълната вълновият процес в пространството зад нея се прекратява.

Фиг.92-1. Построяване на вълнови фронтове на: а) плоска вълна; б) сферична вълна.



Зони на Френел

Точков източник S излъчва монохроматична светлина с дължина λ . Да означим с $E = E_0$ интензитета на електричното поле в точка P . Как ще се измени E , ако между точките S и P поставим непрозрачен екран с малък кръгъл отвор, така че правата SP да минава през центъра на отвора и да е перпендикулярна на екрана (фиг.92-2)? Ще решим задачата с помощта на принципа на Хюйгенс. Всеки малък елемент от частта на вълновия фронт A , която покрива отвора, се разглежда като източник на вторични вълни. Електричното поле в точка P е суперпозиция от полетата на вторичните вълни. Повърхността A е сегмент от сфера с радиус r_0 и център в точка S (фиг.92-2). Построяваме сфери с център в точка P и радиуси r ($r = PC$), $r + \lambda/2$, $r + 2(\lambda/2)$, ..., $r + n(\lambda/2)$. Те разделят сегмента A на пръстени, наречени **зони на Френел**. От построението следва, че вторичните вълни, излъчени от двете граници на една зона, пристигат в точката на наблюдение P в противофаза. Доказва се (вж. пример 92.1), че радиусът на окръжността, разделяща n -тата от $n + 1$ -вата зона на Френел, е

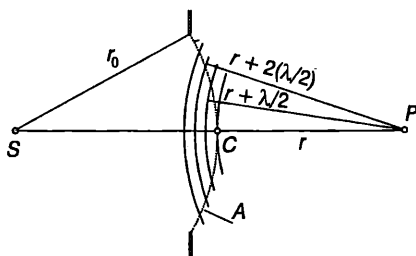
$$(92.1) \quad R_n = \sqrt{\frac{n\lambda r r_0}{r + r_0}}.$$

Всички зони имат приблизително еднаква площ

$$(92.2) \quad A_n = \frac{\pi \lambda r r_0}{r + r_0}.$$

Нека диаметърът на отвора е такъв, че да се разкрива само първата зона на Френел. Разделяме я на много голям брой N тънки пръстени с еднаква площ. До точката на наблюдение P вторичната вълна от всеки следващ по-външен пръстен изми-

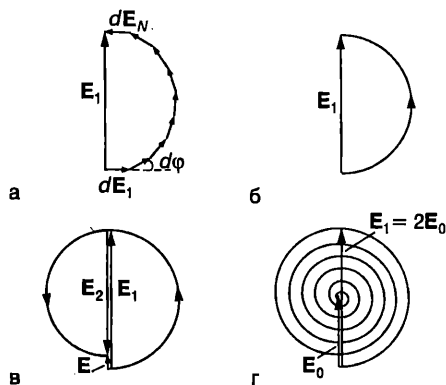
Фиг.92-2. Зони на Френел.



нава по-голям оптичен път и изоставя по фаза спрямо вълната от предния пръстен. Ще приемем, че вторичните вълни имат еднакви амплитуди и ще използваме метода на векторните диаграми, за да определим интензитета на резултантното електрично поле в точка P . На векторната диаграма вторичните вълни се представят с вектори $d\mathbf{E}_i$ ($i = 1, 2, \dots, N$), които са завъртени един спрямо друг на ъгъл, равен на фазовата разлика $d\phi$ между вторичните вълни от два съседни пръстена (фиг.92-3а). Двата крайни вектора $d\mathbf{E}_1$ и $d\mathbf{E}_N$ са насочени в противоположни посоки, защото вторичните вълни от двата края на зоната пристигат в точка P в противофаза. Амплитудата на резултантното електрично поле в точка P е равна на модула на вектора $\mathbf{E}_1$, който затваря тази начупена линия (фиг.92-3а). В граничния случай, когато $N \rightarrow \infty$, начупената линия преминава в полукръжност (фиг.92-3б).

Да увеличим радиуса на отвора, така че в него да се вмести изцяло първите две зони на Френел. Ако вълните от всички елементарни участъци пристигаха в точка P с еднакви амплитуди, резултантното поле при открити първа и втора зона на Френел щеше да е нула (вълната от втората зона гаси изцяло вълната от първата зона). Различните елементарни участъци обаче сключват различни ъгли с оста SP , поради което амплитудата на вторичните вълни намалява при отдалечаване от центъра на отвора. Затова модулет на интензитета E_2 на електричното поле, създадено от втората зона на Френел, е по-малък,

Фиг.92-3.



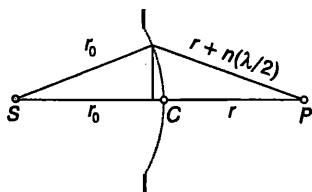
отколкото този на първата зона, и интензитетът на резултантното поле $E = E_1 + E_2$ има много малка, но различна от нула стойност (фиг.92-3в).

Ако продължим да увеличаваме радиуса на отвора (или да приближаваме точката на наблюдение P), амплитудата на интензитета на електричното поле в точка P периодично ще се изменя: тя е голяма, когато се разкриват нечетен брой зони на Френел, и малка, когато техният брой е четно число. Граничният случай, когато радиусът на отвора става безкрайно голям, съответства на свободно разпространение на сферичната вълна от източника S . Векторната диаграма в този случай представлява спирала, която се свива към центъра на окръжност с диаметър E_1 (фиг. 92-3г). От чертежа се вижда, че $E_1 = 2E_0$, т.е. при наличие на екран, който открива само първата зона на Френел, амплитудата на интензитета E_1 на електричното поле в точката на наблюдение P е два пъти по-голям от амплитудата E_0 при свободно разпространение на вълната. Това означава, че при наличие на екран с отвор, разкриващ само първата зона на Френел, интензитетът на светлината $I_1 \propto E_1^2$ в точка P е 4 пъти по-голям от интензитета $I_0 \propto E_0^2$ при свободно разпространение на вълната.

Пример 92.1. Определете радиуса R_n на окръжността, която разделя n -тата от $n + 1$ -вата зона на Френел. Известни са (вж. фиг.92-2) разстоянията r и r_0 и дължината на вълната λ . В сила са неравенствата: $r \gg \lambda$; $r_0 \gg \lambda$, $R_n/r \ll 1$, $R_n/r_0 \ll 1$. Докажете, че всички зони на Френел имат приблизително еднаква площ.

Решение. От правоъгълните триъгълници на фиг.92-4 с помощта на Питагоровата теорема получаваме

$$r_0 + r = \sqrt{r_0^2 - R_n^2} + \sqrt{\left(r + n\frac{\lambda}{2}\right)^2 - R_n^2} \approx \sqrt{r_0^2 - R_n^2} + \sqrt{r^2 + r n \lambda - R_n^2},$$



Фиг.92-4.

където сме пренебрегнали члена $n^2\lambda^2/4$. Като отчетем, че $R_n/r \ll 1$ и $R_n/r_0 \ll 1$ и използваме приближението $(1+x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$, получаваме

$$r_0 + r = r_0 \left(1 - \frac{R_n^2}{r_0^2}\right)^{1/2} + r \left[1 + \frac{(rn\lambda - R_n^2)}{r^2}\right]^{1/2} \approx r_0 \left(1 - \frac{R_n^2}{2r_0^2}\right) + r \left[1 + \frac{(rn\lambda - R_n^2)}{2r^2}\right],$$

откъдето изразяваме R_n :

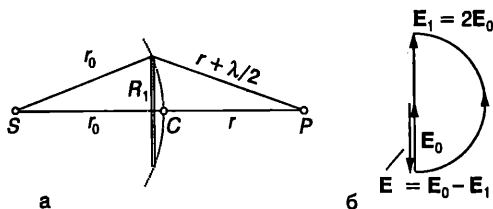
$$R_n = \sqrt{\frac{n\lambda r_0 r}{r_0 + r}}.$$

Площта на n -тата зона на Френел е приблизително равна на

$$A_n \approx \pi(R_{n+1}^2 - R_n^2) = \frac{\pi\lambda r_0 r}{r_0 + r}.$$

Следователно, в рамките на направените приближения, всички зони на Френел имат еднаква площ.

Пример 92.2. Екранът с отвор от фиг.92-2 се заменя с непрозрачен диск, който покрива само първата зона на Френел (фиг.92-5а). Определете интензитета I на светлината в точка P . Как ще се изменя интензитетът, ако се увеличава радиусът на диска? Интензитетът на светлината в точка P при свободното ѝ разпространение е I_0 .

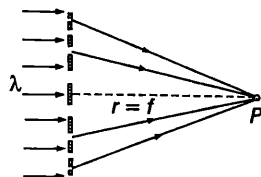


Фиг.92-5.

Решение. Интензитетът на електричното поле E в точка P може да се получи, ако от интензитета E_0 , съответстващ на свободно разпространение на вълната, се извади интензитетът $E_1 = 2E_0$ на полето от първата зона на Френел, която в случая е покрита от непрозрачния диск и не дава принос в резултантното поле (фиг.92-5б): $E = E_0 - E_1 = -E_0$. Интензитетът на светлината е $I \propto E^2 = E_0^2$, т.е. $I = I_0$.

Следователно в центъра на геометрична-

та сянка на диска (точка P) се наблюдава светло петно. Ако се увеличава радиусът на диска, той ще покрива все повече зони на Френел, поради което интензитетът на петното ще намалява, но то ще остава светло. Този извод за пръв път е бил направен през 1818 г. от Поасон, след което е бил експериментално потвърден от Араго. Наблюдаваните светли петна в центъра на геометричната сянка на диск били наречени петна на Араго–Поасон. Те послужили като още едно доказателство в подкрепа на вълновата теория на светлината.



Фиг.92-7.

Решение. Повдигаме на квадрат двете страни на уравнение (92-1) и го записваме във вида

$$\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r} = \frac{n\lambda}{R_n^2} = \frac{\lambda}{R_1^2},$$

където R_1 е радиусът на първата ($n = 1$) зона на Френел, т.е. на централния непрозрачен кръг на разглежданата зонна пластинка. Сравняваме получения резултат с формулата на събирателна леща (вж. §89), $1/a + 1/b = 1/f$, където a е положението на предмета, b – положението на образа, а f е фокусното разстояние на лещата. Сравнението показва, че зонната пластинка може да се разглежда като събирател-

на леща с фокусно разстояние $\frac{1}{f} = \frac{\lambda}{R_1^2}$.

Успоредният сноп светлина, който пада върху зонната пластинка, може да се приеме за излъчен от точков източник, разположен на безкрайно голямо разстояние r_0 от пластинката.

Та. Тогава $1/r = 1/f$ или $r = f = \frac{R_1^2}{\lambda} = 0,5 \text{ m}$.

Следователно успореден сноп светлина се събира във фокуса на зонната пластинка, където се наблюдава ярко петно.

Задачи

1. Радиусът R на отвора от фиг.92-2 може да се изменя. Определете дължината на вълната λ на монохроматичния точков източник S , ако вторият максимум на интензитета на светлината в точка P се получава при $R = 0,8 \text{ mm}$.

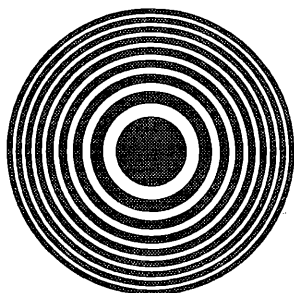
Дадени са разстоянията $r_0 = 800 \text{ mm}$ и $r = 1200 \text{ mm}$.

2. Покажете, че за разлика от лещата, зонната пластинка има много фокуси. Определете съответните фокусни разстояния.

3. Източник на монохроматична светлина е разположен на разстояние $r_0 = 2,50 \text{ m}$ от зонна пластинка, а неговият образ се получава на разстояние $r = 1,80 \text{ m}$ от пластинката. Определете мястото на образа, ако цялата опитна постановка се потопи в течност с показател на пречупване $n = 1,4$.

Зонна пластинка

Интензитетът на светлината в точка P може многократно да се увеличи, ако се направи специален екран с отвори във вид на концентрични пръстени, които да разкриват първите N на брой нечетни (или само четни) зони на Френел. Тогава вторичните вълни от всички открити зони ще пристигат в точката на наблюдение P във фаза и взаимно ще се усилят. Такъв екран се нарича *зонна пластинка* (фиг.92-6).



Фиг.92-6. Зонна пластинка

Интензитетът на светлината, получен от зонна пластинка с N открити зони, е приблизително $4N^2$ пъти по-голям, отколкото при свободно разпространение на светлината ($E \approx 2NE_0$). Увеличаването на интензитета от зонна пластинка е аналогично на фокусиращото действие на събирателна леща.

Пример 92.3. Върху зонна пластинка, която разкрива само четните зони на Френел, пада успореден сноп монохроматична светлина с дължина на вълната $\lambda = 500 \text{ nm}$. На какво разстояние r от пластинката ще се фокусират лъчите (фиг.92-7)? Радиусът на централния непрозрачен кръг на пластинката е $R_1 = 0,5 \text{ mm}$.

93. Фраунхоферова дифракция

За описване на дифракцията от важно значение е какъв брой зони на Френел се покриват от отвора или от преградата, от които дифрактира светлината. Това зависи преди всичко от положението на точката на наблюдение. Нека върху кръгъл отвор с диаметър D (вж. фиг.92-2 на стр. 211), който е сравним с дължината на вълната λ на светлината (например $D = 10\lambda$), пада успореден сноп светлина, излъчен от безкрайно отдалечен източник ($r_0 = \infty$). Тогава от формула (92.1) за радиуса на първата зона на Френел се получава

$R_1 = \sqrt{r\lambda}$. Следователно, когато точката на наблюдение се намира на малко разстояние r от отвора, радиусът на първата зона на Френел е сравним с диаметъра D на отвора и за такава точка на наблюдение са разкрити първата или първите няколко зони на Френел. Този случай на дифракция, който вече разгледахме, се нарича *френелова дифракция*.

Когато точката на наблюдение се намира на много голямо разстояние от отвора, в сила е неравенството $R_1 \gg D$. Тогава отворът разкрива само много малка част от първата зона на Френел и може да се използват някои съществено опростяващи задачата приближения. Този случай на дифракция е изследван от германския физик Йозеф фон Фраунхофер (1787–1826) и се нарича в негова чест *фраунхоферова дифракция* (или дифракция в далечното поле). Фраунхоферовата дифракция има голямо практическо значение в оптичните прибори.

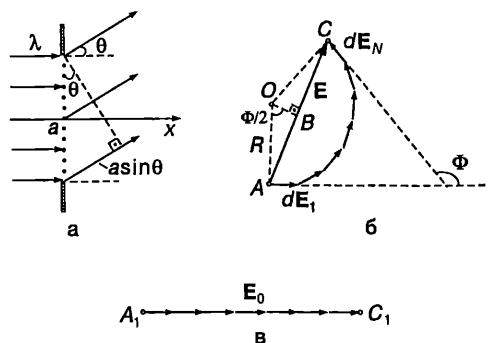
Ще отбележим, че когато отворът е много широк, т.е. при $D \gg R_1$, се разкриват много голям брой зони на Френел и дифракционните ефекти са незначителни. В сила е законът за праволинейното разпространение на светлината, като дифракционни ивици с много малък интензитет се наблюдават само около границата на геометричната сянка.

Дифракция от процеп

Плоска монохроматична светлинна вълна с дължина на вълната λ пада перпендикулярно върху дълъг тесен процеп в непрозрачен екран (фиг.93-1а). Широчината на процепа е $a > \lambda$. Според закона за праволинейното разпространение на светлината зад процепа трябва да се формира успореден сноп светлина с широчина, равна на широчината на процепа, който се разпространява в същата посока, както падащата вълна (по оста x). В резултат на дифракцията обаче се появяват допълнителни светлинни вълни, които се разпространяват в посоки, различни от първоначалната. Тези вълни се наричат *дифрактирани вълни*, а нормалите към вълновите им повърхности – *дифрактирани лъчи*. Те включват различни ъгли θ с оста x (фиг. 93-1а). Ще определим интензитета на дифрактиралата светлина като функция от ъгъла θ . Разделяме мислено процепа на N еднакви тесни успоредни ивици, които съгласно с принципа на Хюйгенс са кохерентни източници на вторични цилиндрични вълни. Когато $a > \lambda$ може да се приеме, че електричното поле в равнината на процепа е приблизително същото, както ако падащата плоска вълна се разпространяваше свободно. Симетрията позволява допълнително да се опрости задачата, като се замени процепът с отсечка, върху която на равни разстояния един от друг са разположени N еднакви кохерентни точкови източника (фиг.93-1а).

Ще определим интензитета на електричното поле на дифрактиралата под ъгъл θ вълна с помощта на векторна диаграма.

Фиг.93-1.



На нея трептенията на електричните поле-та на вторичните вълни се представят с век-тори с равни модули, които са завъртени един спрямо друг на един и същ ъгъл, ра-вен на фазовата разлика между вълните от два съседни източника. Векторът, който свързва двата края A и C на получената начупена линия, задава интензитета E на резултантното електрично поле на дифрак-тиралата под ъгъл θ вълна (фиг.93-1б). При $N \rightarrow \infty$ начупената линия преминава в дъга от окръжност. Централният ъгъл Φ е равен на фазовата разлика между вторичните вълни, излъчени от двата края на процепа. От фиг.93-1а се вижда, че разликата в пъти-щата на тези вълни е $\Delta r = a \sin \theta$. Следова-телно

$$(93.1) \quad \Phi = k \Delta r = k a \sin \theta,$$

където $k = 2\pi/\lambda$ е вълновото число. От пра-воъгълния триъгълник ABO изразяваме амплитудата E на електричното поле:

$$(93.2) \quad E = 2R \sin \frac{\Phi}{2}.$$

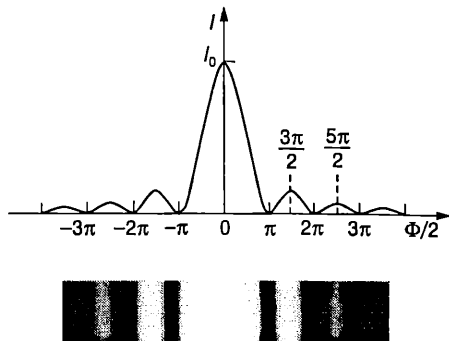
Да означим с E_0 амплитудата на елек-тричното поле на вълната, която не проме-ня посоката си на разпространение ($\theta = 0$). В този случай между вторичните вълни не възникват фазови разлики и E_0 е сума от амплитудите на вторичните вълни (фиг.93-1в). Дължината на отсечката A_1C_1 е равна на дължината на дъгата AC от фиг.93-1б. Следователно $E_0 = AC = \Phi R$. Заместяваме R в уравнение (93.2) и за амплитудата E на електричното поле на дифрактиралата под ъгъл θ вълна получаваме

$$(93.3) \quad E = E_0 \frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}}.$$

Интензитетът на дифрактиралата свет-лина ($I \propto E^2$) е

$$(93.4) \quad I = I_0 \left(\frac{\sin \frac{\Phi}{2}}{\frac{\Phi}{2}} \right)^2,$$

където $I_0 \propto E_0^2$ е интензитетът на неди-фрактиралата светлина ($\theta = 0$). Графиката на функцията $I(\Phi/2)$ е показана на фиг.93-2а.



Фиг.93-2. Фраунhoferова дифракция от про-цеп: а) зависимост на интензитета I от $\Phi/2$; б) фотография на дифракционната картина.

Тя има минимуми $I_{\min} = 0$ при $\sin(\Phi/2) = 0$, т.е. при

$$(93.5) \quad \frac{\Phi}{2} = m\pi \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots),$$

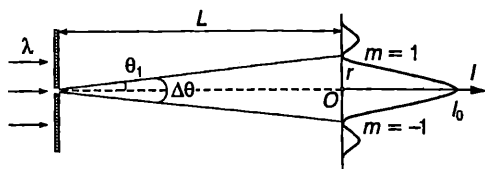
където цялото число m определя порядъ-ка на дифракционните минимуми. Замес-тваме Φ от уравнение (93.1) в (93.5) и оп-ределяме ъглите θ_m , при които се получа-ват дифракционните минимуми:

$$(93.6) \quad a \sin \theta_m = m\lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Дифракционните максимуми са разпо-ложени приблизително по средата между два съседни минимума. Основният макси-мум, в който е съсредоточена по-голяма-та част от преминалия през процепа свет-линен поток, се намира при ъгъл $\theta = 0$. Интензитетът на дифракционните макси-муми намалява при увеличаване на тех-ния порядък m .

В описания случай на фраунhoferова дифракция от процеп точковият източник на светлина е безкрайно далеч, така че върху процепа попада плоска вълна. Ди-фракционната картина се наблюдава върху безкрайно отдалечен екран, където се събират успоредните лъчи, дифракти-рали под съответните ъгли θ . На практи-ка обаче източникът и екранът се разпо-лагат сравнително близо от двете страни на процепа. Тогава се използват две съби-рателни лещи. Източникът се поставя във фокуса на първата леща, при което тя фор-мира успореден сноп светлина, който па-да върху процепа. Дифрактиралите под

различни ъгли θ успоредни снопове светлина (плоски вълни) се събират от втората леща във фокалната ѝ равнина, където се поставя екранът, върху който се получава дифракционната картина. С помощта на лазерен източник на светлина може да се наблюдава дифракция от процеп без да се използват лещи. Успоредният сноп светлина от лазера пада непосредствено върху процепа, а зад него, на разстояние около 1m (в далечното поле), се поставя екранът, където се наблюдава дифракционната картина: редуващи се светли и тъмни ивици, разположени симетрично от двете страни на ярката централна светла ивица (фиг.93-26).



Фиг.93-3.

чина на централния максимум е (фиг.93-3)

$$(93.7) \quad \Delta\theta = 2\theta_1 = \frac{2\lambda}{a}.$$

Ъгълът $\Delta\theta$ определя *дифракционната разходимост* на снопа светлина в резултат на преминаването му през процеп с широчина a .

И така, след преминаване през процеп, успоредният сноп светлина става разходящ. Появяват се дифрактирани вълни, които се разпространяват под различни ъгли θ спрямо първоначалната посока на разпространение на снопа. Дифрактираните под големи ъгли θ вълни имат малък интензитет, поради което може да се приеме, че целият светлинен поток е съсредоточен в ъгловия интервал $\Delta\theta$ около първоначалната посока на разпространение.

При преминаване на успореден сноп светлина през кръгъл отвор в непрозрачен екран се получава аналогична на уравнение (93.7) зависимост за ъгъла $\Delta\theta$ на дифракционна разходимост:

$$(93.8) \quad \Delta\theta = \frac{1,22 \lambda}{a},$$

където a е радиусът на отвора.

Следователно всеки опит да се намали напречното сечение на светлинен сноп, например чрез пропускането му през тесен отвор (диафрагма), води до поява на дифракционно разширение: снопът става разходящ, придобива форма на конус с ъгъл при върха $\Delta\theta$ и напречното му сечение непрекъснато нараства при отдалечаването от отвора. Дифракционното разширение е свързано с вълновата природа на светлината и при зададено сечение на снопа не може да бъде отстранено. От уравнения (93.7) и (93.8) следва, че колкото по-тесен е снопът (малка стойност на радиуса a на напречното сечение на снопа), толкова е по-голяма неговата дифракционна разходимост.

Пример 93.1. Определете интензитета на първия и на втория максимум на дифрактиралата от процеп светлина, ако интензитетът на централния максимум ($\theta = 0$) е I_0 .

Решение. Ще смятаме, че максимумите са разположени по средата между два съседни минимума. Тогава от фиг.93-2а се вижда, че

$$\frac{\Phi}{2} = \pm \frac{3}{2} \pi \text{ за максимумите от } m = \pm 1 \text{ порядък и}$$

$$\frac{\Phi}{2} = \pm \frac{5}{2} \pi \text{ за максимумите от } m = \pm 2 \text{ порядък.}$$

Заместваме тези стойности за $\Phi/2$ в уравнение (93.4) и определяме интензитети I_1 и I_2 на дифракционните максимуми от първи и втори порядък:

$$I_1 = I_0 \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 \approx 0,045 I_0; \quad I_2 = I_0 \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \approx 0,016 I_0.$$

Следователно интензитетът на най-яркия от дифракционните максимуми (първия) е само 4,5% от интензитета на централния максимум. Затова в повечето случаи можем с приближение да смятаме, че целият преминал през процепа светлинен поток е съсредоточен в централния максимум, т.е. в ъгловия интервал между дифракционните минимума от ± 1 -ви порядък.

Дифракционна разходимост

Съгласно с уравнение (93.6) първият дифракционен минимум от процеп се получава при ъгъл θ_1 , за който $\sin\theta_1 = \lambda/a$. Когато процепът е достатъчно широк, т.е. при $\lambda/a \ll 1$, ъгълът θ_1 е много малък и е в сила приближението $\theta_1 \approx \lambda/a$. Ъгловата широ-

Пример 93.2. Лазерен сноп светлина с радиус $a = 1$ cm, разходимостта на който се определя от дифракцията, е насочен към Луната. Колко е радиусът на осветената лунна повърхност? Какво трябва да се направи, за да се намали този радиус?

Разстоянието до Луната е $L = 384\,000$ km. Дължината на вълната на лазерното излъчване е $\lambda = 633$ nm. Разсейването и поглъщането на светлината от атмосферата се пренебрегва.

Решение. Началният радиус a на снопа определя неговата дифракционна разходимост:

$\Delta\theta = \frac{1,22\lambda}{a}$. От чертежа на фиг.93-3, като отчетем, че $\Delta\theta$ е малък ъгъл ($\tan(\Delta\theta/2) \approx \Delta\theta/2$), намираме радиуса r на петното върху лунната повърхност:

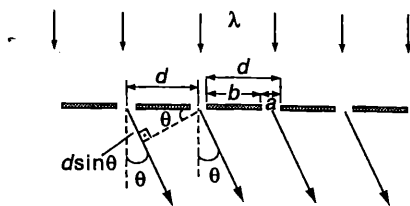
$$\frac{\Delta\theta}{2} = \frac{r}{L}; \quad r = \frac{\Delta\theta L}{2} = \frac{1,22\lambda L}{2a} \approx 15 \text{ km}.$$

За да се намали r , трябва да се увеличи началната широчина на снопа, което може да стане например с помощта на сферично или параболично огледало с голяма площ.

Дифракционна решетка

Най-простата дифракционна решетка представлява стъклена пластинка, върху която на малко разстояние един от друг машинно са нанесени голям брой нарязи (штрихи), които разсейват светлината. Така върху пластинката периодично се редуват еднакви, тънки, прозрачни за светлината ивици (процепи), разделени от непрозрачни нарязи. В по-общ смисъл дифракционна решетка се нарича всяко устройство, създаващо пространствена периодична модулация на падащата върху него светлинна вълна по амплитуда или по фаза. За стъклените решетки дифракционна картина се получава след като светлината премине през тях. Ако штрихите се нанесат върху огледална метална повърхност, дифракционната картина ще се наблюдава в отразена светлина. Такива решетки се наричат отражателни.

Да означим с a широчината на прозрачните, а с b – на непрозрачните области от решетката. Величината $d = a + b$ се нарича константа на дифракционната решетка (фиг.93-4). Когато перпендикулярно на дифракционна решетка с N процепа



Фиг.93-4.

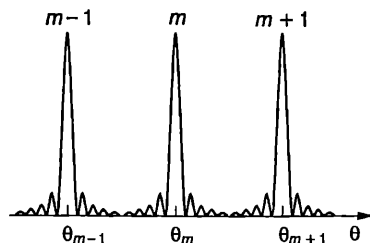
пада плоска монохроматична вълна с дължина на вълната λ , върху отдалечен екран или във фокалната равнина на събирателна леща се наблюдава френелова дифракционна картина. Тя е съставена от резки максимуми с голям интензитет, наречени *главни дифракционни максимуми*. Между два съседни главни максимума са разположени $N-1$ на брой второстепенни максимуми с много по-малък интензитет (фиг.93-5). Ще определим положението на главните максимуми. От фиг.93-4 се вижда, че разликата в оптичните пътища на дифрактираните под ъгъл θ от два съседни процепа вълни е

$$(93.9) \quad \Delta r = d \sin \theta.$$

Тези вълни се събират в точка върху безкрайно отдалечен екран или във фокалната равнина на събирателна леща, където интерферират помежду си. Ако разликата в пътищата на вълните от два съседни процепа е равна на цяло число дължини на вълната, вълните от всички процепа взаимно се усилват и за съответната стойност θ_m на ъгъла θ се получава главен максимум. Условието за напълно конструктивна интерференция (главен максимум) е

$$(93.10) \quad d \sin \theta_m = m\lambda; \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Следователно ъглите θ_m , при които се получават главните максимуми, зависят само от константата d на решетката и от Фиг.93-5.



дължината на вълната λ на светлината.

Ще определим интензитета I на централния максимум ($m = 0$). Означаваме с E_0 амплитудата на електричното поле на вторичната вълна от един процеп в направление $\theta = 0$. Тъй като в това направление между вълните от отделните процепи не възниква фазова разлика, амплитудите на полетата се сумират и амплитудата на резултантното поле е $E = NE_0$. За интензитета на централния дифракционен максимум, който е пропорционален на E^2 , се получава

$$(93.11) \quad I = N^2 I_0,$$

където $I_0 \propto E_0^2$ е интензитетът, който би създал само един процеп.

Когато процепите на дифракционната решетка са много тесни, те са подобни на точкови източници, които излъчват с еднакъв интензитет във всички посоки. Тогава формула (93.11) е в сила за всички главни максимуми, които имат еднакъв интензитет. Той нараства право пропорционално на квадрата на броя на процепите на дифракционната решетка. Освен това при увеличаване на N максимумите стават по-тесни. Ще отбележим, че в общия случай интензитетът на главните максимуми зависи от размера и формата (профила) на процепите. Те могат да се подберат така, че интензитетът на някои от главните максимуми да е голям, а на други – малък или равен на нула.

Пример 93.3. Върху дифракционна решетка с 5000 штрихи на 1 cm дължина пада нормално успореден сноп монохроматична светлина с дължина на вълната $\lambda = 550$ nm. Колко главни максимума ще се наблюдават?

Решение. Най-напред ще определим константата на дифракционната решетка:

$$d = \frac{1 \text{ cm}}{5000} = 2 \text{ }\mu\text{m}.$$

Положението на главните максимуми се

определя от уравнение (93.10): $\sin \theta_m = \frac{m\lambda}{d}$. Тъй

като синусът на един ъгъл не може да бъде по-голям от единица, за да се наблюдава главен максимум от m -ти порядък, трябва да е изпълнено неравенството $m\lambda/d \leq 1$. Непосредствено проверяваме, че $m = 3$ удовлетворява това

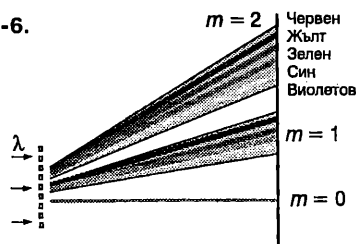
неравенство, а $m = 4$ – не го удовлетворява. Следователно ще се наблюдават общо 7 главни максимума ($m = 0, \pm 1, \pm 2$ и ± 3).

Дифракционни спектри

От уравнение (93.10) следва, че положението на главните максимуми на дифракционната решетка (с изключение на централния $m = 0$) зависи от дължината на вълната λ на падащата светлина. Колкото по-голяма е λ , толкова под по-голям ъгъл θ_m се наблюдава главният максимум от m -ти порядък. Бялата светлина е суперпозиция от монохроматични вълни с различни дължини. Всяка от тях, след като премине през дифракционната решетка, създава своя дифракционна картина. Дифракционните картини, съответстващи на различните дължини на вълната, са отместени в пространството една спрямо друга – решетката разлага бялата светлина и върху екрана се наблюдават *дифракционни спектри*. В центъра на екрана се получава бяла ивица (централен максимум $m = 0$). Най-близо до нея е разположен главният дифракционен спектър от първи порядък $m = 1$, който представлява цветна ивица, съдържаща всички цветове на дъгата (фиг.93-6): от червен (най-голяма дължина на вълната) до виолетов (минимална дължина на вълната). След това е главният дифракционен спектър от втори ($m = 2$) порядък и т.н.

Дифракционните решетки, подобно на призмите, се използват в спектралните апарати за разлагане на бялата светлина. За да се изследва определена спектрална област (от λ до $\lambda + \Delta\lambda$), трябва спектрите от съседни порядъци (m и $m + 1$) да не се припокриват. Максималната ширина $\Delta\lambda$ на спектъра, при която все още няма припокриване, се нарича *дисперсионна област* на спектралния апарат. Ще определим дисперсионната област на спек-

Фиг.93-6.



трален апарат с дифракционна решетка. Припокриването на спектрите от m -ти и $m+1$ -ви порядък започва, когато главният максимум от m -ти порядък за най-голямата дължина на вълната ($\lambda + \Delta\lambda$) съвпадне с главния максимум от $m+1$ -ви порядък за най-малката дължина на вълната (λ) от изследваната спектрална област. Записваме условието (93.10) за главен максимум:

$$d \sin \theta_m = m(\lambda + \Delta\lambda); \quad d \sin \theta_{m+1} = (m+1)\lambda.$$

Припокриването на двата спектъра започва при $\theta_m = \theta_{m+1}$. Приравняваме десните страни на горните две равенства и определяме дисперсионната област на дифракционната решетка:

$$(93.12) \quad \Delta\lambda = \frac{\lambda}{m}.$$

Следователно при зададена дължина на вълната λ дисперсионната област на решетката се определя единствено от порядъка m на спектъра. В спектрометрите с дифракционни решетки се използват спектри от нисък порядък (обикновено втори или трети). Те имат голяма дисперсия $\Delta\lambda$, което позволява с такива решетки да се изследва широка спектрална област.

Голямата област на дисперсия обаче не гарантира, че две близки спектрални линии с дължини на вълната λ и $\lambda + \delta\lambda$ ще се наблюдават като две отделни линии, а няма да се слеят в една линия. Величината

$$(93.13) \quad R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

където $\delta\lambda$ е минималната разлика в дължините на вълната на двете линии, при която спектралният апарат ги разделя, се нарича *разделителна способност*. Доказва се, че разделителната способност на спектрален апарат с дифракционна решетка е

$$(93.14) \quad R = Nm,$$

където N е броят на процеците на решетката, а m – порядъкът на дифракционния спектър.

Пример 93.4. Какъв минимален брой процеци трябва да има дифракционна решетка, за да разделя дублета на жълтата линия на на-

триева лампа ($\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$; $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$)? Наблюдава се дифракционният спектър от втори порядък ($m = 2$).

Решение. От уравнения (93.13) и (93.14) за необходимия минимален брой процеци получаваме

$$N = \frac{\lambda}{m\delta\lambda} = \frac{\lambda_1}{m(\lambda_2 - \lambda_1)} \approx 500.$$

Задачи

1. Защо не се наблюдава дифракция на слънчевата светлина от прозорците на стаята? Защо в гъста гора двама души, намиращи се на известно разстояние един от друг, могат да разговарят помежду си, но не се виждат? Ако видимата светлина имаше два милиона пъти по-голяма дължина на вълната (около 1 m), щяхме ли да виждаме предметите зад ъгъла?

2. Наблюдавайте вечер през опъната носна кърпа отдалечен източник на светлина (например улична лампа). Вместо източника ще видите цяла мрежа от светли петна (точки). Обяснете явлението.

3. Монохроматична светлина с дължина на вълната $\lambda = 589 \text{ nm}$ пада перпендикулярно на дифракционна решетка. Колко е константата на решетката, ако дифракционният максимум от втори порядък се получава при ъгъл $\theta_2 = 45^\circ$?

4. Върху дифракционна решетка с 8000 процепа на един сантиметър дължина пада перпендикулярно монохроматична светлина. При каква максимална дължина на вълната може да се наблюдава дифракционен максимум от втори порядък?

5. Успореден сноп монохроматична светлина с дължина на вълната λ пада перпендикулярно върху много широк процеп. На екран, разположен на разстояние L от процепа, се наблюдава светла ивица с широчина, равна на широчината a на процепа. При намаляване на процепа светлата ивица също се стеснява и широчината ѝ достига минимална стойност при широчина на процепа $a = a_0$. При по-нататъшното стесняване на процепа светлата ивица върху екрана започва да се разширява. Обяснете явлението и определете a_0 .

6. Две спектрални линии на смес от водород (H_2) и деутерий (D_2) имат дължини на вълната съответно 656,30 nm и 656,48 nm. Колко е минималният брой на процеците на дифракционна решетка, с която двете линии се разделят в дифракционния спектър от първи порядък?

94. Поляризация на светлината

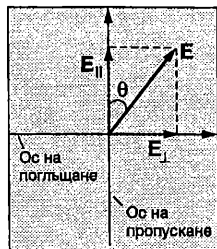
Светлинните вълни, както всички електромагнитни вълни, са напречни. В §75 беше отбелязано, че плоска монохроматична вълна, която се разпространява по оста x , може да се представи като суперпозиция от две вълни, чиито електрични полета извършват трептения в направление на осите y и z . Съотношението на амплитудите и фазите на тези две компоненти определя състоянието на поляризация на вълната. Когато направлението, в което трепти електричният вектор $\mathbf{E}$ на вълната, не се променя с течение на времето, вълната е линейно поляризирана в това направление. Слънчевата светлина не е поляризирана. Амплитудите и фазите на двете компоненти E_y и E_z на неполяризираната вълна се изменят хаотично с течение на времето, поради което векторът $\mathbf{E}$ на резултантното електрично поле също така хаотично променя направлението си, оставайки винаги перпендикулярен на посоката на разпространение на вълната. Явлението, при което в резултат на взаимодействието с веществото неполяризираната светлина се превръща в линейно поляризирана, се нарича *поляризация на светлината*. При взаимодействието става разделяне на двете компоненти – например чрез поглъщане, отражение или разсейване само на едната от тях. В общия случай взаимодействието с веществото води до изменение на състоянието на поляризация на светлината.

Поляроиди. Закон на Малюс

В някои вещества, например в турмалин, се наблюдава явлението *дихроизъм* – силна зависимост на поглъщането на светлината от направлението, в което трепти електричният вектор. Дихроичните вещества се използват в най-простите устройства за поляризация на светлината, наречени *поляроиди*. Поляроидите са листови от прозрачен материал, в който са вградени микроскопични, ориентирани по определен начин кристалчета от силно дихроично вещество (обикновено херапатит или

родствени на него съединения). Поляроидът се характеризира с две взаимно перпендикулярни оси: ос на пропускане и ос на поглъщане. Линейно поляризирана в направление на оста на пропускане светлина преминава през идеалния поляроид без да се поглъща. Обратно, ако светлината е линейно поляризирана в направление на оста на поглъщане, тя изцяло се поглъща от поляроида. Неполяризираната светлина може да се разложи на две компоненти, линейно поляризирани в направление на двете оси на поляроида. През поляроида преминава само компонентата, за която електричният вектор трепти в направлението на оста на пропускане. Следователно след преминаване през поляроид от неполяризираната светлина се получава линейно поляризирана светлина, чието направление на поляризация съвпада с оста на пропускане на поляроида. Тъй като двете компоненти на неполяризираната светлина имат еднакъв интензитет, преминалата през поляроида светлина е с два пъти по-малък интензитет от падащата светлина. Затова бяла хартия, разглеждана през поляроид, изглежда сива.

Нека върху идеален поляроид пада линейно поляризирана светлина, чието направление на поляризация сключва ъгъл θ с оста на пропускане на поляроида (фиг. 94-1). Разлагаме електричния вектор $\mathbf{E}$ на падащата вълна на две компоненти $\mathbf{E}_{\parallel}$ и $\mathbf{E}_{\perp}$, насочени в направление на осите на пропускане и на поглъщане. Компонентата $\mathbf{E}_{\perp}$ се поглъща от поляроида, докато компонентата $\mathbf{E}_{\parallel}$ с амплитуда $E_{\parallel} = E_0 \cos \theta$, където E_0 е амплитудата на падащата вълна, преминава без да се поглъща. Интензитетът I ($I \propto E^2$) на преминалата светлина е



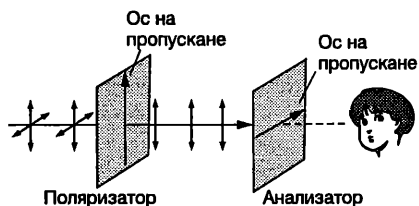
Фиг. 94-1.

$$(94.1) \quad I = I_0 \cos^2 \theta,$$

където $I_0 \propto E_0^2$ е интензитетът на падащата светлина. Уравнение (94.1) изразява *закона на Малюс* за интензитета на преми-

налата през поляроид поляризирана светлина.

От два поляроида може да се конструира най-прост поляриметър – уред за изследване на състоянието на поляризация. Ако върху първия поляроид, наречен *поляризатор*, пада неполяризирана светлина, след преминаването през него светлината става линейно поляризирана (фиг.94-2). Вторият поляроид се нарича *анализатор*. Когато осите на пропускане на поляризатора и анализатора склучват прав ъгъл (кръстосани поляроиди), поляризираната светлина не преминава през анализатора. Ако между двата кръстосани поляроида се постави вещество, което изменя състоянието на поляризация на преминалата през него светлина, например превръща линейно поляризираната светлина



Фиг.94-2. Поляриметър.

в елиптично поляризирана или само завърта равнината на поляризация, тогава през анализатора преминава светлина, чийто интензитет зависи от свойствата на веществото.

Пример 94.1. Слънчева светлина с интензитет I_0 преминава през система от два успоредни поляроида. Как се изменя интензитетът I_2 на преминалата светлина в зависимост от взаимното положение на осите на пропускане на поляроидите? Определете I_2 , ако двете оси склучват ъгъл 45° .

Решение. През първия поляроид винаги преминава 50% от интензитета на слънчевата (неполяризирана) светлина: $I_1 = I_0/2$. Преминалата светлина е линейно поляризирана в направление на оста на пропускане на първия поляроид. Съгласно със закона на Малюс интензитетът I_2 на преминалата през втория поляроид светлина ще се изменя от $I_2 = 0$ при $\theta = 90^\circ$ (кръстосани поляроиди) до $I_2 = I_1 = I_0/2$ при $\theta = 0$ (поляроиди с успоредни оси на пропускане).

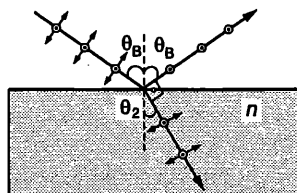
$$\text{За } \theta = 45^\circ: I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2 45^\circ = \frac{I_0}{4}.$$

Ще отбележим, че поради отражението от двете повърхности на поляроидите, интензитетът на преминалата светлина в действителност е по-малък от пресметнатия.

Поляризация при отражение. Закон на Брюстер

Върху плоска стъклена пластинка с показател на пречупване n пада успореден сноп неполяризирана светлина. На границата стъкло–въздух се наблюдават явленията пречупване и отражение (фиг.94-3). Падащата неполяризирана вълна може да се представи като суперпозиция от две независими линейно поляризирани във взаимно перпендикулярни направления вълни. Едното направление на поляризация е успоредно на повърхността на стъклото (перпендикулярно на равнината на чертежа от фиг.94-3), а другото направление лежи в равнината на чертежа. По същия начин се представя пречупената вълна. Електричните диполи на стъклото се намират в електромагнитното поле на пречупената вълна и извършват независими принудени трептения в две взаимно перпендикулярни направления, съвпадащи с избраните направления на поляризация на пречупената вълна. Всеки трептящ дипол излъчва вторични вълни, които интерферират помежду си и формират фронта на отразената вълна. Излъчването на електричен дипол се характеризира с диаграма на насоченост (вж. фиг.86-4 на стр. 186). Диполите не излъчват в направлението, в което трептят. Да подберем такъв ъгъл на падане θ_1 , при който отразеният лъч е перпендикулярен на пречупения лъч. Тогава едното от трептенията на диполите (което се извършва в равнината на чертежа от

Фиг.94-3.



фиг.94-3), съпада с посоката на разпространение на отразената вълна, поради което не предизвиква излъчване в това направление. Отразената вълна се формира само от вълните на излъчване на диполите, които трептят успоредно на повърхността на стъклото. Затова отразената вълна е линейно поляризирана в това направление.

Ъгълът на падане $\theta_1 = \theta_B$, при който отразената вълна е линейно поляризирана, се нарича *ъгъл на Брюстер*, в чест на шотландския физик Дейвид Брюстер (1781–1868). При падане под ъгъла на Брюстер отразеният лъч е перпендикулярен на пречупения лъч. От фиг.94-3 се вижда, че в този случай ъгълът на падане θ_B и ъгълът на пречупване θ_2 са свързани със съотношението $\theta_2 = \pi/2 - \theta_B$. Заместваем θ_2 в

$$\text{закона на Снелиус } \frac{\sin \theta_B}{\sin \theta_2} = n \text{ и получаваме} \\ (94.2) \quad \operatorname{tg} \theta_B = n.$$

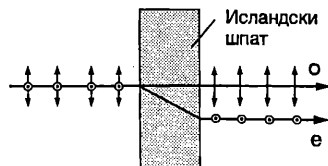
Това равенство изразява закона на Брюстер:

Тангенсът на ъгъла на падане θ_B (ъгъл на Брюстер), при който отразената светлина е изцяло линейно поляризирана, е равен на показателя на пречупване n на отразяващата среда.

При други ъгли на падане отразената светлина е само частично поляризирана, т.е. съдържа неполяризирана компонента и линейно поляризирана компонента. Поляризацията при отражение от водна повърхност се използва от някои насекоми, които са чувствителни към поляризирана светлина, за ориентирание.

Двойно лъчепречупване

Явлението двойно лъчепречупване е наблюдавано за пръв път през 1670 година от Бертолини в кристала исландски шпат – разновидност на калцита (CaCO_3). Ако перпендикулярно към естествената стена на кристала се насочи успореден сноп светлина, от противоположната стена излизат два лъча (фиг.94-4). Единият от тях е продължение на падащия лъч и е наречен *обикновен лъч* (означава се с „o“ – от

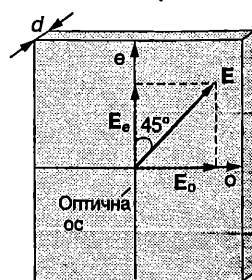


Фиг.94-4.

„ordinary“). Вторият е отместен встрани, т.е. той се пречупва, независимо че ъгълът на падане е равен на нула. Затова е наречен *необикновен лъч* (означава се с „e“ – от „extraordinary“). Опитът показва, че обикновеният лъч и необикновеният лъч са линейно поляризирани във взаимно перпендикулярни направления (фиг.94-4).

Двойно лъчепречупване се наблюдава в анизотропни кристали. Те притежават ос на анизотропия: определено кристалографско направление, характерно за дадения кристал, в което някои от физическите характеристики на кристала – еластични модули, диелектрична проникваемост и свързания с тях показател на пречупване, имат различни стойности в сравнение със съответните стойности във всички направления, перпендикулярни на оста на анизотропия. Следователно скоростта на разпространение на светлината по оста на анизотропия също е различна от скоростта в направленията, които са перпендикулярни на оста на анизотропия. В оптиката оста на анизотропия се нарича *оптична ос*.

На фиг.94-5 е показана тънка плоско-паралелна пластинка от двойнолъчепречупващ кристал (например кварц), която е изрязана така, че оптичната ос (e) да лежи в равнината на пластинката. Успореден сноп линейно поляризирана монохроматична светлина с дължина на вълната във вакуум λ_0 е насочен перпендикулярно на пластинката. Ще разгледаме частния случай, когато направлението на поляризация сключва ъгъл 45° с оптичната ос на пластинката. Падащата вълна може да се представи като супер-



Фиг.94-5.

позиция от две линейно поляризирани вълни с равни амплитуди. Електричният вектор на едната вълна трепти в направление на оптичната ос, а на другата – в перпендикулярното направление. Да означим с n_o показателя на пречупване за вълната, чиито електричен вектор е успореден на оптичната ос, а с n_e – за вълната с електричен вектор, перпендикулярен на оптичната ос. Вътре в пластинката двете вълни изминават еднакво разстояние, равно на нейната дебелина d . Оптичните им пътища обаче са различни, защото се различават показателите на пречупване за двете вълни. Разликата в оптичните пътища е $(n_o - n_e)d$. Следователно след преминаване през пластинката възниква фазова разлика δ между двете вълни:

$$(94.3) \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e) d.$$

Ще разгледаме два важни частни случая:

1. $\delta = \pi/2$. Тогава уравнение (94.3) придобива вида

$$(94.4) \quad (n_o - n_e) d = \frac{\lambda_0}{4}.$$

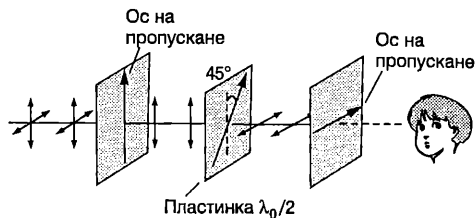
Пластинка, за която е изпълнено горното условие, се нарича четвъртвълнова пластинка или пластинка $\lambda_0/4$ (ламбда върху четири). На изхода на пластинка $\lambda_0/4$ между двете поляризирани във взаимно перпендикулярни направления вълни възниква фазова разлика $\pi/2$. При тяхната суперпозиция (вж. §84) се получава кръгово поляризирана вълна. Обратно, ако падащата светлина е кръгово поляризирана, след преминаване през пластинка $\lambda_0/4$ тя става линейно поляризирана.

2. $\delta = \pi$. Тогава уравнение (94.3) има вида

$$(94.5) \quad (n_o - n_e) d = \frac{\lambda_0}{2}.$$

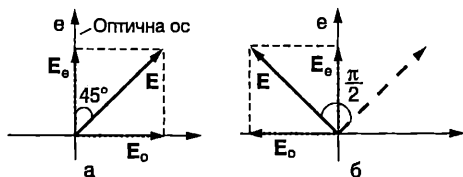
Пластинка, за която е изпълнено условие (94.5), се нарича полу вълнова пластинка или пластинка $\lambda_0/2$ (ламбда върху две). С пластинка $\lambda_0/2$ се променя направлението на поляризация на линейно поляризирана светлина (вж. пример 94.2).

Пример 94.2. Между два кръстосани поляроида се поставя пластинка $\lambda_0/2$, чиято оптична ос сключва ъгъл 45° с осите на пропускане на поляроидите (фиг.94-6). Определете интензитета на преминалата през системата светлина преди и след поставянето на пластинката. Падащата светлина с интензитет I_0 е неполяризирана.



Фиг.94-6.

Решение. Тъй като поляроидите са кръстосани, преди да се постави пластинката през втория поляроид (анализатор) не преминава светлина. Падащата върху пластинката $\lambda_0/2$ светлина е линейно поляризирана от поляризатора. Нейният интензитет е $I_0/2$. Съгласно с условието на задачата направлението на поляризация сключва ъгъл 45° с оптичната ос на пластинката. На фиг.94-7 схематично са представени електричните вектори на двете вълни, на които може да се разложи падащата вълна: преди да навлезе в пластинката (а) и при излизането от нея (б). По условие пластинката внася фазова разлика $\delta = \pi$ между двете вълни. Затова на фиг. 94-7б единият от електричните вектори (E_o) има противоположна посока, т.е. ако при преминаване през пластинката фазата на E_o се изменя с $2m\pi$ (m – цяло число), фазата на E_e се изменя с $2m\pi + \pi$. Тъй като при ъгъл 45° двете вълни имат еднакви амплитуди ($E_o = E_e$), на изхода резултантният електричен вектор $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \mathbf{E}_e$ е завъртян на ъгъл $\pi/2$ спрямо направлението му на входа.

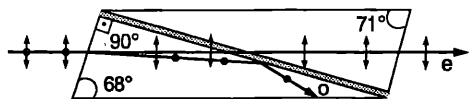


Фиг.94-7.

Следователно пластинката $\lambda_0/2$ завърта направлението на поляризация на 90° и то става успоредно на оста на пропускане на анализатора: светлината преминава през анализатора без да се поглъща.

Поляризационни призми

Явлението двойно лъчепречупване намира практическо приложение в поляризационните призми, които се използват за получаване и изследване на поляризирана светлина. Първата такава призма е изработена през 1828 година от шотландския физик Никол и по-късно призмите от този вид са наречени в негова чест *никколи*. Николът е съставен от две шлифовани под точно определени ъгли призми от исландски шпат, които са залепени една към друга с тънък слой канадски балсам (фиг.94-8). Канадският балсам е прозрачен материал с показател на пречупване $n = 1,550$, който е междинен спрямо показателя на пречупване на необикновения лъч $n_o = 1,486$ и обикновения лъч $n_e = 1,658$ за исландския шпат. Ъглите в призмата на Никол са пресметнати така, че обикновения лъч претърпява пълно вътрешно отражение от канадския балсам и се поглъща от страничната стена на призмата, върху която е нанесено поглъщащо покритие. През призмата преминава само необикновения лъч (фиг.94-8), който, както вече отбелязахме, е линейно поляризиран.



Фиг.94-8. Поляризационна призма (никол).

Оптическа активност

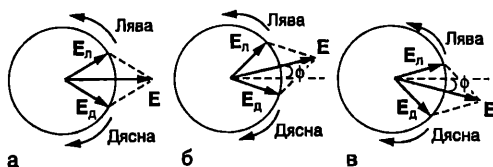
Изменението на направлението на поляризация на линейно поляризирана светлина в резултат на преминаването ѝ през захарни разтвори и някои други вещества, се нарича *оптична активност*. Веществата, които въртят направлението на поляризация, се наричат *оптично активни вещества*. Оптичната активност се дължи на асиметрията на молекулите на тези вещества, които имат винтова (спирална) структура. Както отбелязахме в §84, всяка линейно поляризирана вълна може да се представи като суперпозиция от две кръгово поляризирани вълни с еднакви амплитуди: едната с лява, другата с дясна кръгова поляризация. Веществата със

спирални молекули имат различни показатели на пречупване за вълните с лява и с дясна кръгова поляризация. Вълната, за която показателят на пречупване на веществото е по-малък, се движи с по-голяма фазова скорост и след преминаване през оптически активното вещество изпреварва по фаза другата вълна. На векторната диаграма от фиг.94-9 са представени електричните вектори на двете кръгово поляризирани вълни и на резултантната линейно поляризирана вълна: а) преди преминаване през оптически активното вещество; б) и в) – след преминаване през веществото. Когато вълната с лява кръгова поляризация се движи с по-голяма фазова скорост, на векторната диаграма електричният вектор E на резултантното поле се завърта наляво (фиг.94-9б). Вещества, които завъртат направлението на поляризация наляво (гледано срещу посоката на разпространение на вълната) се наричат *лявовъртящи*. Обратно, веществата, в които вълната с дясна кръгова поляризация се разпространява с по-голяма фазова скорост, са *дясновъртящи* (фиг.94-9в). Повечето аминокиселини и белтъци са лявовъртящи вещества, докато обикновената захар и декстрозата са дясновъртящи. Ъгълът на завъртане ϕ на направлението на поляризация е пропорционален на концентрацията c на оптически активното вещество. За разреждени разтвори той е равен на

$$(94.6) \quad \phi = \alpha Lc,$$

където L е дължината на кюветата, в която е поставен разтворът. Константата α характеризира свойствата на веществото и се нарича специфичен ъгъл на въртене. Ъгълът ϕ може да се измери с поляриметър и по него да се определи концентрацията c на разтвора.

Фиг.94-9.



95. Поглъщане и разсейване на светлината

Закон на Бугер

Френският физик Пиер Бугер (1698–1758) експериментално установява, че при разпространение на монохроматична светлина в еднородна поглъщаща среда нейният интензитет намалява по експоненциалния закон

$$(95.1) \quad I = I_0 e^{-\alpha x},$$

където I_0 е интензитетът на светлината преди да навлезе в слой от дадената среда (вещество) с дебелина x , а I – след като премине през този слой. Константата α се нарича *коэффициент на поглъщане* на веществото. Коэффициентът на поглъщане се измерва в единици m^{-1} (или cm^{-1}). Той е равен на реципрочната стойност на разстоянието x_0 , при изминаването на което интензитетът на светлината намалява $e = 2,718...$ пъти ($\alpha = 1/x_0$).

Коэффициентът на поглъщане $\alpha(\lambda)$ за различните вещества зависи по сложен начин от дължината на светлинната вълна λ . Ако във видимата област на спектъра α е нула или има много малка стойност, средата се нарича прозрачна. Това название е условно и се определя от спецификата на човешкото зрение. Всички вещества поглъщат светлината. Например стъклото е прозрачно във видимата област, но поглъща ултравиолетовото и инфрачервеното лъчение. Коэффициентът на поглъщане за различните вещества се изменя в широки граници. Например във видимата област за въздуха $\alpha \approx 2 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-1}$, за стъклото $\alpha \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-1}$, докато при металите и разтворите на багрила $\alpha \approx 10^4 \text{ cm}^{-1}$.

Съгласно със закона на Бугер (95.1) ко-ефициентът на поглъщане α за монохроматична светлина не зависи от нейния интензитет. Отсъствието на такава зависимост е потвърдено експериментално в много широк интервал интензитети – от преки слънчеви лъчи, концентрирани във фокуса на леща, до изключително малки интензитети, съответстващи на прага на зрителната чувствителност на човешкото

око. След откриването на лазерите, които дават възможност да се получат изключително мощни светлинни импулси, е наблюдавано намаляване на коефициента на поглъщане при свръхвисоки интензитети. Това отклонение от закона на Бугер е свързано с нарушаване на принципа на суперпозицията, когато полето на електромагнитната вълна стане сравнимо по големина с вътрешномолекулните и вътрешноатомните полета на материалната среда. При такива условия се наблюдават цял клас нови явления, които се изучават от *нелинейната оптика* – бързоразвиваща се съвременна област от физиката.

Разсейване на светлината в мътна среда

В еднородна среда плоска вълна се разпространява праволинейно, без да се разсейва встрани. Среда, чийто показател на пречупване се изменя от точка в точка, се нарича оптично нееднородна среда. В оптично нееднородна среда се наблюдава явлението разсейване на светлината, изразяващо се в отклонение на част от светлината от първоначалната посока на разпространение и поява на несобствено светене на веществото.

Пример за оптически нееднородни среди са аерозолите, емулсиите, колоидните разтвори, матовите стъкла и др., които в оптиката се наричат мътни среди. Те съдържат частички с размери, по-малки от дължината на вълната на видимата светлина, които имат различен показател на пречупване от околната среда. В оптически еднородна среда всички точки, до които е достигнала светлинната вълна, съгласно с принципа на Хюйгенс стават кохерентни източници на вторични вълни, които интерферират и формират фронта на разпространяващата се вълна. Вторичните вълни, излъчени встрани от посоката на разпространение, взаимно се гасят, поради което в еднородна среда светлината не се разсейва. В мътна среда ситуацията се променя. Когато средното разстояние между малките твърди частички, които мътната среда съдържа, е значително по-голямо от дължината на вълната, тези частички играят ролята на независими източници, излъчващи некохерентно.

Техните вълни се разпространяват самостоятелно във всички посоки, поради което мътната среда разсейва светлината.

Основните закономерности при разсейване на светлината от мътна среда се наблюдават с помощта на следния прост опит. Интензивен сноп бяла светлина преминава през стъклена кювета, запълнена с вода, в която са добавени няколко капки мляко. Разсеяната светлина, наблюдавана отстрани, има синкав оттенък, докато преминалата през кюветата светлина е с червен оттенък. От опита може да се направи изводът, че най-силно се разсейва синята светлина, т.е. светлината с най-голяма кръгова честота ω (най-малка дължина на вълната λ). Най-слабо се разсейва червената светлина (най-малка кръгова честота ω), поради което преминалата през кюветата светлина има червен оттенък.

Зависимостта на интензитета I на разсеяната светлина от кръговата честота ω може да се разбере, ако се разгледа системата от излъчващи електрони на всяка малка частичка като електричен дипол, извършващ принудени трептения под действие на електричното поле на светлинната вълна. Съгласно с уравнение (86.13) на стр.185 интензитетът на излъчената от електричен дипол електромагнитна вълна е пропорционален на ω^4 .

Теорията за разсейване на светлината е била развита от британския физик Джон Релей (1842–1919). Според закона на Релей интензитетът на разсеяната светлина е пропорционален на четвъртата степен на кръговата честота:

$$(95.2) \quad I \propto \omega^4.$$

Като се отчете връзката между кръговата честота ω и дължината на вълната λ ($\omega \propto 1/\lambda$), законът на Релей се записва също така във вида

$$(95.3) \quad I \propto \lambda^{-4},$$

т.е. интензитетът на разсеяната светлина е обратнопропорционален на четвъртата степен на дължината на вълната λ .

Разсейването на светлината от мътни среди се използва в ултрамикроскопите за наблюдаване и следене движението на колоидни частици с много малки размери (до 10^{-9} m). В окоето на наблюдателя попа-

да разсеяната от частичките светлина и те се виждат като блестящи звездички на черния фон на зрителното поле.

Молекулно разсейване

Оптически нееднородности, разсейващи светлината, има дори в чистите течности и газове. В резултат на хаотичното топлинно движение на молекулите възникват флуктуации в плътността, т.е. области с малки размери, чиято плътност, а следователно и показател на пречупване, са различни от тези на околната среда. Тези области, подобно на твърдите частици на мътна среда, разсейват светлината.

Количествената теория на молекулното разсейване, разработена от Айнщайн през 1910 година, дава същата зависимост на интензитета на разсеяната светлина от кръговата честота (дължина на вълната), както законът на Релей. Молекулното разсейване от атмосферата на късовълновата част от видимата слънчева светлина обяснява синия цвят на небето. Флуктуациите на плътността нарастват при увеличаване на температурата и разсейването на светлината се усилва. Затова в горещ летен ден небето е по-наситено синьо, отколкото в ясен зимен ден.

При изгрев и залез слънчевите лъчи изминават значително разстояние през долните по-плътни слоеве на атмосферата, където разсейването е по-интензивно. Тогава Слънцето изглежда червено, защото директно до окоето достига повече червено-оранжева светлина, която се разсейва по-слабо.

Задачи

1. За определяне коефициента на поглъщане α на неизвестно вещество от него са изготвени две пластинки с дебелини $d_1 = 5$ mm и $d_2 = 10$ mm, през които последователно се пропуска сноп лазерна светлина, насочен перпендикулярно на повърхността им. Определете α , ако интензитетът на преминалата през първата пластинка светлина е $I_1 = 0,8I_0$, а през втората – $I_2 = 0,7I_0$, където I_0 е интензитетът на падащата светлина.

Указание. Отчетете отражението от двете повърхности на пластинките.

Глава 17

Относителност и кванти



Алберт Айнщайн

В края на XIX класическата физика (нютонова механика, термодинамика и молекулнокинетична теория, електромагнитна теория на Максвел) достига забележителни резултати при обясняването на много широк кръг от явления и повечето учени смятат, че всички основни физични закони са вече известни. В самото начало на XX век обаче възникват принципно нови идеи, които поставят началото на съвременната физика. През 1900 г. Планк изказва хипотезата за светлинните кванти, която довежда до създаването на квантовата теория. През 1905 г. Айнщайн публикува специалната теория на относителността, предизвикала радикална промяна в представите за пространството и времето.

В тази глава ще се спрем на принципите, върху които се изгражда специалната теория на относителността, на лоренцовите трансформации, изразяващи връзката между координатите и времето на две събития, разглеждани в различни инерциални отправни системи, и ще обсъдим най-важните следствия от тази теория. Ще анализираме основните закономерности при топлинното излъчване, фотоелектричния ефект и други явления, които се обясняват с квантовата теория на светлината.

96. Принципи на теорията на относителността

Галилеев принцип на относителността

Да разгледаме две инерциални отправни системи K и K' , които се движат една спрямо друга. Ще се ограничим с частния случай, когато в началния момент $t = t' = 0$ началото O на K съвпада с началото O' на K' . Освен това ще смятаме, че осите x, y и z са съответно успоредни на осите x', y' и z' (всички величини с штрих „'“ се отнасят за отправната система K'). Ще приемем отправната система K за неподвижна. Системата K' се движи спрямо K в направление на оста x с постоянна скорост v (фиг.96-1). Нека материална точка в момента t се намира в положение P . Тогава, както се вижда от фиг.96-1, радиус-векторите на точка P в двете отправни системи са свързани с равенството $\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{OO'}$, където $\mathbf{OO'} = \mathbf{vt'}$ е преместването на началото O' за време t' . Следователно:

$$(96.1) \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{vt}'; \quad t = t'.$$

Векторното уравнение се записва по компоненти:

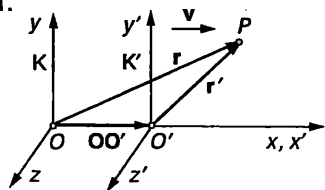
$$(96.2) \quad x = x' + vt'; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = t'.$$

Уравнения (96.1) и (96.2) изразяват *галилеевите трансформации* – преобразуването на координатите и времето в класическата механика при преминаване от една инерциална отправна система (K) в друга инерциална отправна система (K'). Те се основат на две предположения, върху които се изгражда класическата механика:

1. абсолютност на времето;
2. абсолютност на разстоянията в пространството.

В класическата механика се приема, че времето тече по един и същ начин във всички отправни системи. В галилеевите

Фиг.96-1.



трансформации абсолютността на времето се изразява с равенството $t = t'$. От него произтичат очевидни на пръв поглед следствия, които преди създаването на теорията на относителността не будели съмнения. Например, ако две събития стават едновременно за някакъв наблюдател, те са едновременни и за всеки друг наблюдател. Освен това от абсолютността на времето следва, че интервалът от време между две събития е еднакъв във всички отправни системи.

Ако радиус-векторите $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ (фиг.96-1) и векторът $\mathbf{OO'} = \mathbf{vt'}$ се измерваха в една и съща отправна система, равенство (96.1) би било очевидно. В действителност обаче $\mathbf{r}$ се измерва в отправната система K , докато $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{OO'}$ се измерват в K' . Следователно галилеевите трансформации (96.1) не могат да се получат, без да се използва предположението, че дадена отсечка има една и съща дължина във всички отправни системи (абсолютност на разстоянията).

Диференцираме двете страни на уравнение (96.1) по времето, отчитайки, че $t =$

$$t'. \text{ Получаваме } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{v}, \text{ или}$$

$$(96.3) \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{v},$$

където $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ е скоростта на материалната

точката в отправната система K , а $\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'}$ е скоростта ѝ спрямо K' . Уравнение (96.3) изразява *галилеевия закон за събиране на скорости* в класическата механика.

Диференцираме двете страни на уравнение (96.3) по времето и намираме връзката между ускоренията на материалната точка, измерени в двете отправни системи:

$$(96.4) \quad \mathbf{a} = \mathbf{a'},$$

където сме отчели, че $\mathbf{v} = \text{const.}$ От равенство (96.4) следва изводът, че ускорението на една материална точка е еднакво във всички инерциални отправни системи. Казва се, че ускорението е инвариантно по отношение на галилеевите трансформации.

В класическата механика силата $\mathbf{F}$, масата m , както и законите на Нютон, също

са инвариантни по отношение на галилеевите трансформации:

$$F = F'; m = m'; F = ma \text{ и } F' = m'a'.$$

В нютоновата механика е в сила т. нар. *механичен принцип на относителността* (галилеев принцип на относителността), според който законите на механиката са еднакви във всички инерциални отправни системи. Това означава, че в различните инерциални отправни системи механичните процеси протичат еднакво, ако условията са едни и същи. С никакъв механичен експеримент, проведен в затворена система, не може да се установи дали тя е в покой или се движи праволинейно и равномерно. Всички инерциални отправни системи са напълно равноправни. С помощта на законите на механиката не може да се отдели някаква „абсолютна“ отправна система, спрямо която да се разглежда „абсолютното“ движение и покой.

Опит на Майкелсон

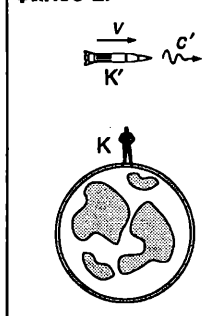
Уравненията на Максвел, за разлика от уравненията на механиката, не са инвариантни спрямо галилеевите трансформации. Например от тях следва, че във вакуум електромагнитните вълни се разпространяват със скорост $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Възниква въпросът, в коя отправна система се измерва тази скорост. Съгласно с галилеевия закон за събиране на скорости (96.3) скоростта на светлината би трябвало да е различна в различните отправни системи. Това се илюстрира от следния прост пример. Ракета, която се движи със скорост v спрямо Земята, излъчва светлинен импулс (фиг.96-2). Означаваме със c' скоростта на светлината спрямо ракетата. В съответствие с галилеевия закон за събиране на скорости, скоростта на светлината спрямо земната повърхност е

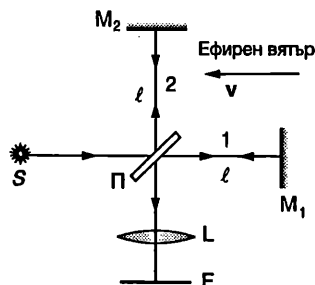
$$c = c' + v > c'.$$

Фиг.96-2.



В края на XIX век учените предполагат, че електромагнитните вълни и светлината представляват трептения на ефира – хипотетична среда, която изпълва цялото пространство и пронизва всички тела, без да влияе на движението им. Смятало се е, че уравненията на Максвел имат своя обичаен вид само в отправна система, свързана с ефира. Това означава, че в електродинамиката, за разлика от механиката, би трябвало да съществува привилегирована инерциална отправна система, която се различава от всички останали. Това е отправната система, в която ефирът е неподвижен. Предполагало се е, че във всички други отправни системи ефирът се движи („духа“ ефирен вятър), поради което уравненията на Максвел променят вида си, а скоростта на светлината е различна. Откриването на ефирния вятър е една от главните задачи на физиката в края на XIX век. С тази цел са проведени редица изключително прецизни за възможностите на тогавашната техника физични експерименти, централно място сред които заема знаменитият опит на американския физик Алберт Майкелсон (1852–1931). Майкелсон си поставя задачата да измери скоростта на абсолютноното движение на Земята спрямо привилегированата отправна система (световния ефир). За целта той използва конструирания от него *интерферометър на Майкелсон*, чиято принципна схема е показана на фиг.96-3. Сноп монохроматична светлина с дължина на вълната λ преминава през пластинката П, върху едната повърхност на която е нанесен тънък слой метал. Светлината частично се отразява и частично преминава през покритието. Така снопът се разделя на две части, които се отразя-

Фиг.96-3. Интерферометър на Майкелсон.



ват от огледалата M_1 и M_2 , след което отново преминават през пластинката и интерферират помежду си. Интерференчната картина се наблюдава във фокалната равнина F на лещата L . Двете рамена на интерферометъра имат еднаква дължина ℓ . Ако скоростта на светлината е еднаква във всички направления, двата снопа биха изминали разстоянието 2ℓ от пластинката до огледалата и обратно за еднакво време $t = 2\ell/c$, при което не би възникнала фазова разлика между двете вълни. Да приемем, че Земята заедно с опитната постановка се движи със скорост v спрямо ефира. За наблюдател от Земята ефирът се движи в противоположната посока със същата по големина скорост v (фиг.96-3). Според теорията на ефира скоростта на светлината е c спрямо неподвижния ефир. Съгласно с галилеевия закон за събиране на скорости скоростта на снопа 1 е $c - v$ при движение към огледалото, а скоростта на отразения от огледалото сноп е $c + v$. Може да се направи аналогия с движението на лодка: срещу течението лодката се движи с по-малка скорост, отколкото по течението. В случая ефирният вятър, който „духа“ от огледалото към източника, променя скоростта на светлинния сноп 1. Доказва се (вж. пример 96.1), че в този случай снопът 1 изминава разстоянието 2ℓ за по-голямо време от снопа 2. Ако интерферометърът се завърти на 90° , тогава снопът 2 ще се движи в направление на „ефирния вятър“ и ще закъснява. Следователно интерференчната картина при завъртане на интерферометъра трябва да се измести. Пресмятанията показват, че през центъра на екрана, върху който се наблюдава интерференчната картина,

трябва да преминат $\Delta N = \frac{2\ell}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}$ интерференчни ивици. Тъй като за отношението v^2/c^2 се очаквала много малка стойност, от порядъка на 10^{-8} (при $v = 30 \text{ km/s}$ – скорост на орбиталното движение на Земята около Слънцето), Майкелсон и неговите сътрудници проявяват изключителни качества на експериментатори, за да подобрят точността на измерванията. За намаляване на вибрациите и изкривяванията при завъртането на интерферометъра послед-

ният е монтиран върху масивна квадратна каменна плоча със страна $1,5 \text{ m}$, чиято кръгла поставка плува в съд с живак. Чрез система от огледала е постигната ефективна дължина на рамената на интерферометъра $\ell = 11 \text{ m}$.

Този знаменателен за развитието на физиката опит е осъществен от Майкелсон през 1881 година, а след това е повторен с по-голяма точност от Майкелсон съвместно с Морли през 1887 година.

Всички опити дават **отрицателен резултат** – не е регистрирано отнемстване на интерференчната картина. Майкелсон стига до извода, че ефирен вятър не съществува. Ще отбележим, че точността на опита дава основание да се твърди, че скоростта на ефирния вятър не може да е по-голяма от 7 km/s . В последствие опитът на Майкелсон е многократно повтарян и точността на измерванията постоянно нараства. Опитите, проведени с лазери и γ-лъчи в съвремените лаборатории показват, че с точност около 1 m/s скоростта на светлината във вакуум спрямо Земята е еднаква във всички направления.

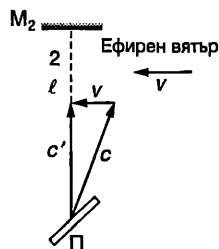
Пример 96.1. Колко интерференчни линии би трябвало да преминат през центъра на зрителното поле в опита на Майкелсон и Морли (фиг.96-3), ако съществуваше ефирен вятър със скорост $v = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$? Ефективната дължина на всяко от двете рамена на интерферометъра е $\ell = 11 \text{ m}$. Приемете дължината на вълната на светлината за $\lambda = 500 \text{ nm}$.

Решение. Времето, за което снопът 1 (фиг.96-3) изминава разстоянието от пластинката P до огледалото M_1 и обратно, е

$$t_1 = \frac{\ell}{c-v} + \frac{\ell}{c+v} = \frac{2\ell c}{c^2 - v^2} = \frac{2\ell}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}.$$

В лабораторната отправна система (спрямо Земята) светлинният сноп 2 се движи перпендикулярно на ефирния вятър със скорост $c' = c + v$, където c е скоростта на снопа спрямо ефира, а v е скоростта на ефирния вятър. От правоъгълния триъгълник, който образуват трите вектора (фиг.96-4),

Фиг.96-4.



определяме: $c' = \sqrt{c^2 - v^2}$.

Снопът 2 изминава разстоянието 2ℓ от пластинката Р до огледалото M_2 и обратно за време

$$t_2 = \frac{2\ell}{c'} = \frac{2\ell}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\ell}{c} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Разликата във времената, за които двата снопа изминават съответните разстояния 2ℓ в направление на двете взаимно перпендикулярни рамена на интерферометъра, е

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{2\ell}{c} \left[\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Тъй като $v^2/c^2 \ll 1$, използваме приближението $(1-x)^n \approx 1 - nx$ (при $x \ll 1$; в случая $x = v^2/c^2$) и получаваме

$$\Delta t = t_1 - t_2 \approx \frac{\ell v^2}{c^3}.$$

Разликата във времената Δt е еквивалентна на ефективен допълнителен път $\Delta r = c\Delta t$ за снопа 1. След завъртането на интерферометъра на 90° ефективният допълнителен път $\Delta r = c\Delta t$ е за втория сноп. При изменение на ефективния път на единия от лъчите с λ през центъра на екрана преминава една интерференчна ивица. Относителното изменение в ефективните пътища на двата лъча при завъртането на интерферометъра е $2\Delta r$. Затова през центъра на екрана трябва да преминат

$$\Delta N = \frac{2\Delta r}{\lambda} = \frac{2\ell v^2}{\lambda c^2} \text{ ивици.}$$

След заместване на числените стойности получаваме $\Delta N = 0,4$. Точността, с която Майкелсон и Морли извършват експерименталните измервания, дава възможност да се регистрира отместване на интерференчната картина, ако $\Delta N > 0,01$. Опитът обаче показва, че очакваното отместване ($\Delta N = 0,4$) не се наблюдава.

Принципи на теорията на относителността

Отрицателният резултат от опита на Майкелсон и невъзможността да се прилага за светлината законът на Галилей за събиране на скорости се обясняват от теорията на относителността. Айнщайн изгражда тази теория върху два принципа.

1. Принцип на относителността: Всички физични закони са еднакви във всички инерциални отправни системи.

2. Принцип за постоянството на скоростта на светлината във вакуум: Скоростта на светлината във вакуум има една и съща стойност $c = 3 \cdot 10^8$ m/s във всички инерциални отправни системи, независимо с каква скорост се движи източникът или приемникът на светлина.

Принципът на относителността на Айнщайн обобщава механичния принцип на относителността. Според него не е възможно с никакъв експеримент – не само механичен, но и електромагнитен, оптичен (например измерване на скоростта на светлината) и т.н., да се установи дали лабораторията, в която той се провежда, е в покой или се движи праволинейно и равномерно. Следователно всички инерциални отправни системи са напълно равностойни и не съществува признак, по който да се отдели една от тях като „абсолютна“.

Класическата механика предполага, че взаимодействието на телата се осъществява мигновено: силата, действаща в даден момент на едно тяло, се определя от положението и скоростите на другите тела в същия този момент. Според теорията на относителността обаче, скоростта на светлината във вакуум е максималната скорост, с която се разпространяват взаимодействията в природата. Тази скорост е еднаква във всички инерциални отправни системи и е универсална природна константа.

Задачи

1. Каква е била целта на опита на Майкелсон? Какъв е резултатът от него?
2. В какво се състои разликата между Галилеевия принцип на относителността и принципа на относителността на Айнщайн?
3. Космически кораб, който се движи спрямо Земята със скорост $c/10$ (с е скоростта на светлината), изпраща два светлинни сигнала: единия по посока на движението на кораба, а другия – в противоположната посока. Колко е скоростта на двата сигнала спрямо Земята?

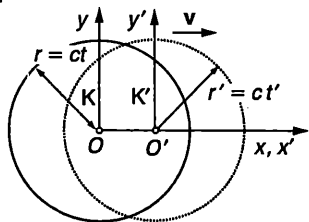
97. Лоренцови трансформации

Едновременност

Да разгледаме две инерциални отправни системи K и K' . Отправната система K' се движи със скорост v спрямо K . В нейното начало O' е разположен точков източник на светлина, който е неподвижен спрямо K' . В момента $t = 0$, когато началото O' на K' съвпада с началото O на K , източникът излъчва светлинен импулс. Тъй като, съгласно с принципа за постоянството на скоростта на светлината, светлината се разпространява с еднаква скорост c във всички инерциални отправни системи, в момента t вълновият фронт на импулса в системата K' е сфера S' с радиус $r' = ct'$ и център O' (фиг.97-1). От принципа на относителността на Айнщайн следва, че вълновият фронт, наблюдаван от отправната система K , е сфера с радиус $r = ct$, чийто център е точката O , в която се е намирал източникът в момента на излъчване $t = 0$. В противен случай по формата на вълновия фронт бихме могли да установим коя отправна система е в покой и коя се движи. Така стигаме до парадоксалния извод, че вълновият фронт трябва едновременно да съвпада както със сферата S , така и със сферата S' .

Направеният извод е неправилен, защото той се базира на нашата интуитивна представа за едновременност. За разлика от класическата физика, в теорията на относителността понятието едновременност има относителен характер. Две събития, станали в различни точки от пространството, могат да са едновременни в една отправна система и да не бъдат такива в друга отправна система. С относи-

Фиг.97-1.



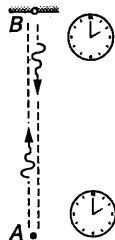
телността на едновременността се обяснява привидният парадокс в разглеждания пример. За наблюдател от отправната система K' вълновият фронт едновременно достига до всички точки от сферата S' , докато за наблюдател от системата K това не е така. За него светлината преминава в различни моменти от времето през различните точки от сферата S' . Обратно, за наблюдател от K светлината едновременно преминава през всички точки от сферата S , докато за наблюдателя от K' това става в различни моменти от времето. Следователно S' е вълнов фронт само за наблюдател от K' , а S – само за наблюдател от K .

Правило на Айнщайн за синхронизиране на часовниците

Как да се установи дали в дадена отправна система две събития са едновременни? Ако те са станали в една и съща точка, достатъчно е наблюдателят да се намира на мястото на събитията. Задачата се усложнява, ако събитията са станали в различни точки A и B от пространството. Проблемът е в това, че наблюдателят не може едновременно да се намира на мястото и на двете събития, а трябва да получи информация за тях от разстояние, например чрез светлинни сигнали, които не се разпространяват мигновено, а с крайна скорост. Следователно в зависимост от положението на наблюдателя информацията за събитията ще достига до него за различно време, което той трябва да отчете, преди да направи извода дали събитията са едновременни. Затова, вместо да се отчита времето само с един часовник, който например е поставен в началото на координатната система, може да се използва цяла мрежа от еднакви часовници, поставени един до друг. За да отчитат единно време, часовниците трябва да се синхронизират. Айнщайн предлага синхронизацията на пространствено разделени часовници да се извършва със светлинни сигнали.

Нека в точките A и B са поставени еднакви часовници, които са неподвижни спрямо инерциалната отправна система K . От точка A в момента t_1 се изпраща светлинен сигнал, който след като се отрази

от огледало, поставено в точка B , попада отново в точка A в момента t_2 (фиг. 97-2). Моментите t_1 и t_2 се измерват по часовника в точка A . Тогава, по определение, часовникът в точка B е синхронизиран с този в точка A , ако в момента на пристигане на сигнала в точка B той показва време

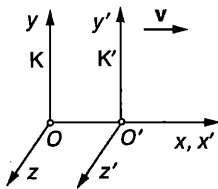


Фиг. 97-2.

$t = (t_1 + t_2)/2$. По този начин могат да се синхронизират всички часовници, които са неподвижни спрямо отправната система K . Две пространствено разделени събития са едновременни в отправната система K , ако синхронизираните часовници, намиращи се в точките, където са станали събитията, показват едно и също време.

Лоренцови трансформации

Инерциалната отправна система K' се движи със скорост v спрямо инерциалната отправна система K , както е показано на фиг. 97-3. Във всяка от двете отправни системи са разположени голям брой неподвижни часовници, синхронизирани по правилото на Айнщайн. Нека x, y, z и t са координатите и времето на някакво събитие (например разпадане на частица), измерени в отправната система K . С x', y', z' и t' ще означим координатите и времето на същото събитие, измерени в K' . Айнщайн показва, че въз основа на двата принципа на теорията за относителността за връзката между координатите и времето на събитията, измервани в двете инерциални отправни системи, се получават уравнения, които са различни от галилеевите трансформации (96.2). Те са:



Фиг. 97-3.

Инерциалните отправни системи, се получават уравнения, които са различни от галилеевите трансформации (96.2). Те са:

$$(97.1) \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \\ t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Тъй като всички инерциални отправни системи са равноправни, наблюдател от K' може да смята себе си за неподвижен: от негова гледна точка отправната система K се движи със скорост $-v$. Затова обратната трансформация от K' в K се получава, като в уравнение (97.1) v се замени с $-v$:

$$(97.2) \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \\ t = \frac{t' + \frac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Уравнения (97.1) и (97.2) са получени преди Айнщайн от холандския физик Хендрих Лоренц още през 1890 година и са наречени в негова чест *лоренцови трансформации*. Лоренц обаче изхожда от теорията на неподвижния ефир, като търси подходяща координатна трансформация, при която уравненията на Максвел да запазват вида си. Според Лоренц величината t' само формално математически се разглежда като време, докато „истинско“ е времето t , измерено в отправната система, където ефирът е неподвижен. В теорията на Айнщайн, както вече подчертахме, всички инерциални отправни системи са равноправни. Затова времената t и t' са „еднакво истински“.

Интервал между две събития

Нека x_1, y_1, z_1, t_1 и x_2, y_2, z_2, t_2 са координатите и времето на две събития, определени в отправната система K (например избухване на две свръхнови звезди). Величините $\Delta x = x_2 - x_1, \Delta y = y_2 - y_1, \Delta z = z_2 - z_1$ и $\Delta t = t_2 - t_1$ изразяват разликите в координатите и времето на двете събития. Съгласно с лоренцовите трансформации (97.1) разликите в координатите и времето на двете събития, измерени в инерциалните отправни системи K и K' , са свързани със съотношенията

$$(97.3) \quad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z;$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Всички величини с шрих „‘“ се отнасят за отправната система K' .

Тъй като $\Delta x \neq \Delta x'$, разстоянието

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

между точките на двете събития, измерено в K , е различно от разстоянието

$$\Delta r' = \sqrt{(\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2}$$

между същите точки, измерено в K' . Различни са и интервалите от време Δt и $\Delta t'$.

И така, от лоренцовите трансформации следва, че при преминаване от една инерциална отправна система в друга такава се изменят както пространственият интервал между двете събития, така и интервалът от време между тях. Следователно разстоянията в пространството и интервалите от време са относителни: те зависят от отправната система, в която се измерват.

Забележка. От галилеевите трансформации също следва, че когато две събития не са едновременно, разстоянието между точките на събитията е различно в различните отправни системи ($\Delta x \neq \Delta x'$ при $\Delta t = \Delta t' \neq 0$). В класическия случай обаче, когато събитията са едновременно ($\Delta t = \Delta t' = 0$), разстоянието между тях (пространственият интервал) е едно и също във всички отправни системи.

Умножаваме последното от уравненията (97.3) по скоростта на светлината c , вдигаме на квадрат двете страни на всички равенства и събираме почленно левите и десните им страни. След съответните алгебрични преобразования получаваме

$$\begin{aligned} c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \\ c^2(\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2. \end{aligned}$$

Следователно величината

$$\begin{aligned} (97.4) (\Delta S)^2 &= c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = \\ &= c^2(\Delta t')^2 - (\Delta r')^2 = inv \end{aligned}$$

не се изменя при преминаване от една

отправна система в друга, т.е. тя е инвариантна по отношение на лоренцовите трансформации. Величината ΔS се нарича *интервал* (или пространствено-времеви интервал) между двете събития. Ще подчертаем още веднъж, че поотделно както интервалът от време Δt , така и пространственият интервал Δr между двете събития зависят от избора на отправната система. Пространствено-времевият интервал ΔS обаче е инвариант: има една и съща стойност във всички инерциални отправни системи.

Преобразуване на скоростите

Уравнения (97.3) изразяват също така връзката между компонентите на преместването на една материална точка и интервала от време, за което то е извършено, измерени в две инерциални отправни системи (K и K'). Да разделим първото от уравненията (97.3) на последното:

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - \frac{v\Delta x}{c^2}}.$$

Разделяме числителя и знаменателя на дясната страна на полученото равенство на Δt :

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{\Delta x}{\Delta t}}.$$

Следователно

$$(97.5) \quad u'_{x'} = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}},$$

където $u_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ и $u'_{x'} = \frac{\Delta x'}{\Delta t'}$ са x -компонентите на скоростта на материалната точка, измерени съответно в K и в K' . По аналогичен начин за останалите компоненти на скоростта се получава

$$(97.6) \quad u'_{y'} = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}; \quad u'_{z'} = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}.$$

Уравнения (97.5) и (97.6) изразяват

закона на Айнщайн за събиране на скорости в теорията на относителността. Обратната трансформация на скоростите (от K' в K) се получава, като в уравнения (97.5) и (97.6) v се замени с $-v$:

$$(97.7) \quad u_x = \frac{u'_{x'} + v}{1 + \frac{vu'_{x'}}{c^2}}; \\ u_y = \frac{u'_{y'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_{x'}}{c^2}}; \quad u_z = \frac{u'_{z'} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{vu'_{x'}}{c^2}}.$$

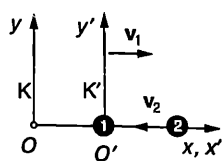
Теорията на относителността се нарича още *релятивистка теория*. Специфичните явления, описвани от тази теория, се наричат *релятивистки ефекти*. Колкото по-големи са скоростите на движение, толкова по-силно се проявяват релятивистките ефекти. Движенията с малки скорости с голяма точност се описват от класическата механика. Например, когато скоростите v и $u'_{x'}$ са много по-малки от скоростта на светлината, релятивисткият закон за събиране на скорости (97.7) преминава в класическия галилеев закон за събиране на скорости: $u_x = u'_{x'} + v$. Скорости, които са сравними със скоростта на светлината, се наричат релятивистки скорости. Движението с релятивистки скорости се изучава от релятивистката механика (теорията на относителността).

Непосредствено се проверява, че релятивисткият закон за събиране на скорости (97.7) се съгласува с принципа за инвариантност на скоростта на светлината. Действително, нека по оста x' на отправната система K' (фиг.97-3) се разпространява светлинен импулс. В първото от уравненията (97.7) замества $u'_{x'} = c$ и получаваме $u_x = c$, т.е. скоростта на светлината е еднаква в двете инерциални отправни системи.

Пример 97.1. Две частици се движат една срещу друга със скорости $v_1 = c/2$ и $v_2 = 3c/4$, където c е скоростта на светлината. Скоростите v_1 и v_2 са измерени в инерциална отправна система K , свързана със Земята (лабораторна отправна система). Определете относител-

ната скорост на двете частици.

Решение. Ще разгледаме движението на частиците в две инерциални отправни системи: лабораторната сис-



Фиг.97-4.

тема K и системата K' , свързана с първата частица. K' се движи спрямо K със скорост v_1 (фиг.97-4). За да определим скоростта $u'_{x'}$ на втората частица в системата K' , използваме релятивисткия закон за събиране на скорости (97.5). В случая $v = v_1$ и $u_x = -v_2$. Знакът „-“ показва, че скоростта v_2 на втората частица в K -системата е насочена в отрицателната посока на оста x (фиг.97-4). След заместване в (97.5) получаваме

$$u'_{x'} = \frac{-v_2 - v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Знакът „-“ показва, че скоростта $u'_{x'}$ е насочена в отрицателната посока на оста x' , т.е. към първата частица.

Относителната скорост $v_{отн}$ на две частици е равна на модула на скоростта на едната частица, измерена в отправна система, в която другата частица е в покой. Следователно

$$v_{отн} = |u'_{x'}| = \frac{v_2 + v_1}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{10}{11} c.$$

Относителната скорост на две частици винаги е по-малка от скоростта на светлината във вакуум. Действително, $v_{отн}$ е скоростта на движение на едната частица, измерена в определена отправна система (в отправната система, в която другата частица е неподвижна). Съгласно с принципите на теорията на относителността в никоя отправна система частицата не може да се движи със скорост, по-голяма от скоростта на светлината във вакуум.

Задачи

1. Лодка се движи по течението на „вълшебна река“. Скоростта на течението е $v = 0,9c$, а скоростта на лодката спрямо водата е $u' = 0,2c$. Колко е скоростта на лодката спрямо брега?
2. Две частици се движат спрямо лабораторната отправна система със скорости $v_1 = c/2$ и $v_2 = 3c/4$, които са взаимно перпендикулярни (насочени са съответно по оста x и по оста y). Определете относителната скорост на двете частици.

98. Релативистки ефекти

Лоренцово скъсяване

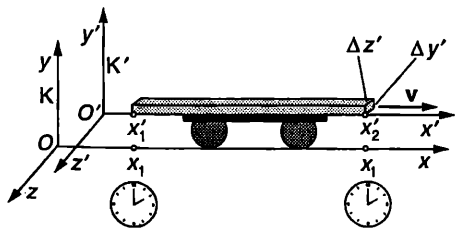
Пръчка е в покой спрямо инерциалната отправна система K' (фиг.98-1). Наблюдател от K' може да измери дължината $L_0 = \Delta x' = x'_2 - x'_1$ на пръчката например с линейка. Ще обърнем внимание, че по време на измерването линейката и пръчката са неподвижни една спрямо друга. Величината L_0 се нарича *собствена дължина* на пръчката.

За наблюдател от отправната система K пръчката се движи със скорост v (фиг.98-1). Как да се измери дължината на движеща се пръчка? Да си представим следния „мислен опит“. Неподвижно спрямо K -системата (например край магистралата, по която се движи пръчката) са разположени един до друг голям брой еднакви часовници, синхронизирани по правилото на Айнщайн. До всеки часовник стои джудже с молив в ръка. Джуджетата гледат часовниците си и в даден момент t (например точно в 12 часа) две от тях, покрай които в този момент преминават двата края на пръчката, отбелязват върху асфалта точките x_1 и x_2 , съвпадащи с двата края. След това разстоянието между двата белега се измерва с линейка. По определение дължината L на движеща се спрямо отправната система K пръчка е равна на разстоянието между две точки от K -системата, покрай които краищата на пръчката преминават едновременно: $L = \Delta x = x_2 - x_1$.

За да намерим връзката между L и L_0 , ще използваме лоренцовите трансформации

(97.3). В уравнението $\Delta x' = \frac{\Delta x - v \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

Фиг.98-1.



полагаме $\Delta x' = L_0$, $\Delta x = L$ и $\Delta t = 0$. (Двете събития – отбелязването на точките x_1 и x_2 в отправната система K са станали едновременно, т.е. времевият интервал между тях е $\Delta t = 0$). Тогава

$$(98.1) \quad L_0 = \frac{L}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{или} \quad L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

От полученото уравнение следва, че дължината на движеща се пръчка е по-малка от нейната собствена дължина. Този релативистки ефект се нарича *лоренцово скъсяване*. Той не е породен от сили, които свиват тялото в направление на движението: в тялото не възникват механични деформации. Ще отбележим, че напречните размери на пръчката, които са перпендикулярни на посоката на движение, не се изменят:

$$\Delta y = \Delta y'; \quad \Delta z = \Delta z'.$$

Тъй като напречните размери не се променят, обемът V на движещо се тяло се изменя, както линейният размер в направление на движението, т.е.

$$(98.2) \quad V = V_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

където V_0 е собственият обем на тялото, измерен в отправната система, в която то е в покой.

Пример 98.1. Космически кораб на извънземна цивилизация се приближава към Слънчевата система със скорост $v = c/3$. Собствената дължина на кораба е $L_0 = 500$ m. Колко метра е дълг корабът за наблюдател от Земята?

Решение.

$$L = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} L_0 = 471 \text{ m}.$$

Забавяне на времето

Последното от уравненията (97.3) на стр. 234 изразява връзката между интервалите от време Δt и $\Delta t'$ между две събития, измерени в различни инерциални отправ-

ни системи (К и К'). Обратната трансформация се получава, като в това уравнение v се замени с $-v$:

$$(98.3) \quad \Delta t' = \frac{\Delta t + \frac{v\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Да разгледаме две събития, станали в една и съща точка А от отправната система К'. За тях $\Delta x' = 0$. За наблюдател от отправната система К същите събития са станали в различни точки. Връзката между интервалите от време между събитията, измерени в двете отправни системи, се изразява с уравнение (98.3), където трябва да се положи $\Delta x' = 0$ и $\Delta t' = \Delta t_0$:

$$(98.4) \quad \Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

От уравнение (98.4) следва, че $\Delta t > \Delta t_0$, т.е. интервалът от време между двете събития е минимален в инерциалната отправна система, спрямо която събитията са станали в една и съща точка. Този релативистки ефект често се нарича *забавяне хода на движещия се часовник*. Откъде идва това название?

Ще разгледаме следния пример. Часовник е поставен в ракета (отправна система К'), която се движи със скорост $v = c/2$ спрямо Земята (отправна система К). В даден момент секундната стрелка преминава през точка А от циферблата (събитие 1). След това тя извършва една пълна обиколка и отново преминава през точка А (събитие 2). За наблюдател от ракетата двете събития са станали в една и съща точка. Интервалът от време между тях е $\Delta t_0 = 60$ s. За наблюдател от Земята часовникът се движи и двете събития са станали в различни точки. Интервалът от време между тях се определя по формула (98.4), в която полагаме $v = c/2$:

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Delta t_0 \approx 69 \text{ s}.$$

Следователно движещият се часовник

върви по-бавно (забавя своя ход). В конкретния случай, докато според часовника от ракетата изминат 60 s, неподвижните часовниците на Земята ще отчетат време 69 s. Времето, което измерва часовник, движещ се заедно с даден обект, се нарича *собствено време* за обекта. Колкото по-бързо се движи обектът, толкова по-бавно тече неговото собствено време в сравнение с времето, измервано от неподвижен наблюдател. Забавят се също всички физични, химични и биологични процеси.

Пример 98.2. Мю (μ)-мезоните са частици, които се пораждаат от космичните лъчи в горните слоеве на атмосферата. Те са нестабилни и след известно време се разпадат на други частици. Установено е, че μ -мезони, които са в покой, живеят средно $\Delta t_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ s.

а) Колко секунди е средното време на живот Δt на μ -мезоните за наблюдател от Земята?

б) Ще достигнат ли μ -мезоните до земната повърхност преди да се разпаднат?

Приемете, че μ -мезоните се създават на височина 10 000 m и имат скорост 0,999c, където c е скоростта на светлината.

Решение. а) Δt_0 е собственото време на живот на μ -мезоните, измерено в отправна система К', спрямо която те са в покой. Спрямо Земята (отправна система К) μ -мезоните се движат със скорост $v = 0,999c$, поради което средното време на живот, измерено от земния наблюдател, е по-голямо. То се определя от уравнение (98.4):

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 4,92 \cdot 10^{-5} \text{ s} \approx 22 \Delta t_0.$$

Следователно поради релативисткия ефект на забавяне на времето, за земния наблюдател μ -мезони, които се движат със скорост близка до скоростта на светлината, живеят средно 22 пъти по-дълго, отколкото μ -мезони, движещи се с нерелативистки скорости.

б) За наблюдател от Земята μ -мезоните се движат със скорост, която практически е равна на скоростта на светлината c . За време Δt те изминават разстояние

$$L = c\Delta t = 14 \text{ 800 m}.$$

„Средният“ μ -мезон, който „живее“ време Δt , ще достигне земната повърхност преди да се разпадне. Ако не съществуваха релативистки ефекти, той би изминал само

$$L_1 = c\Delta t_0 = 660 \text{ m.}$$

Полученият резултат се потвърждава от опитите с μ -мезони, които са едно от многобройните доказателства за правилността на релативистката теория.

Ефект на Доплер

Нека в началото O на отправната система K е поставен приемник Π на светлинни импулси. Техният източник I се движи с постоянна скорост v спрямо приемника. С него ще свържем втора инерциална отправна система K' (фиг.98-2). Източникът излъчва къси светлинни импулси през интервал от време Δt_0 (собствено време между импулсите, измерено в отправната система K' , спрямо която източникът е в покой). Съгласно с уравнение (98.4) интервалът между импулсите, измерен в отправ-

ната система K , е $\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. За време

Δt източникът се отдалечава на разстояние $\Delta x = v\Delta t$. Затова всеки следващ импулс изминава допълнително разстояние Δx преди да достигне приемника, т.е. той се движи $\Delta x/c = v\Delta t/c$ секунди по-дълго време в сравнение с предшестващия го импулс. Следователно приемникът ще регистрира два последователни импулса през интервал от време

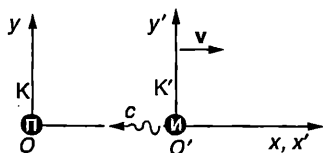
$$(98.5) \quad T = \Delta t + \frac{v\Delta t}{c} = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\Delta t.$$

Заместваме Δt и получаваме

$$(98.6) \quad T = \frac{\Delta t_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = T_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}},$$

където $T_0 = \Delta t_0$ е собственият период (период на излъчване на импулсите, измерен в отправна система, в която източникът е

Фиг.98-2.



в покой). Честотата на приемане на периодичните сигнали $\nu = 1/T$ е свързана със собствената честота $\nu_0 = 1/T_0$ на излъчване на източника с уравнението

$$(98.7) \quad \nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Ако източникът се приближава към приемника, в уравнение (98.7) трябва v да се замени с $-v$, тъй като скоростта v на източника е променила посоката си:

$$(98.8) \quad \nu = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}}.$$

Уравнения (98.7) и (98.8) описват изменението на честотата на електромагнитните вълни при преминаване от една инерциална отправна система в друга такава (релативистки ефект на Доплер). Получим тези формули за случая, когато се движи източникът, а приемникът е неподвижен. Съгласно с принципа на относителността същите уравнения трябва да са в сила, когато се движи приемникът. В тях под v трябва да се разбира относителната скорост на движение на приемника и източника един спрямо друг.

От уравнение (98.7) следва, че $\nu < \nu_0$, т.е. когато източникът и приемникът се отдалечават един от друг, приемникът регистрира по-ниска честота (по-голяма дължината на вълната $\lambda = c/\nu$). Този ефект се нарича *червено отместване*, тъй като поради ефекта на Доплер приетите светлинни сигнали са „отместени“ към дълговълновата (червена) част на спектъра. Обратно, ако източникът и приемникът се приближават, наблюдава се *виолетово отместване*. В този случай съгласно с уравнение (98.8) $\nu > \nu_0$, т.е. става доплерово отместване към високочестотната (късовълновата) част на спектъра, където за видимата светлина се намира виолетовият цвят.

От приведения елементарен извод на релативисткия ефект на Доплер става ясно, че той се определя от два фактора: 1. изменението на разстоянието между източника и приемника; 2. преобразуване-

то на интервала от време при преминаване от една отправна система в друга такава. Първият фактор, който няма отношение към теорията на относителността, води до т.н. *класически ефект на Доплер*. Класическият акустичен ефект на Доплер е разгледан в §81. При движение с малки скорости ($v/c \ll 1$), уравненията на релативисткия ефект на Доплер преминават в уравненията за класическия ефект на Доплер, получени в §81. Действително, като се използва приближението $(1+x)^n \approx 1+nx$ при $x \ll 1$, например уравнение (98.7) се записва във вида

$$(98.9) \quad v = v_0 \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \approx v_0 \sqrt{(1-\frac{v}{c})(1-\frac{v}{c})} = v_0(1-\frac{v}{c}),$$

т.е. получава се уравнението (81.2) на стр.161 за класическия ефект на Доплер.

Разгледаният пример още веднаж ни убеждава, че при движение със скорости, много по-малки от скоростта на светлината, релативистките закономерности преминават в закономерности от класическата физика. Изискването една по-обща теория (например теорията на относителността) да съдържа в себе си като частен (граничен) случай друга по-ограничена теория (например нютоновата механика), се нарича *принцип на съответствието*. Теорията на относителността не отхвърля класическата механика, а я включва в себе си като граничен случай, отнасящ се за движения с малки скорости спрямо скоростта на светлината във вакуум.

Пример 98.3. Далечна галактика излъчва светлина с честота ν_0 . Поради ефекта на Доплер наблюдател от Земята регистрира честота ν . Каква е скоростта на галактиката, ако $\nu/\nu_0 = 0,95$?

Решение. Галактиката се отдалечава от Земята, защото честотата ν , която регистрира земният наблюдател, е по-малка от собствената честота на излъчване ν_0 . Наблюдава се ефект на червено отместване, свързан с „разбягване на галактиките“. (Съгласно с теорията на „Големия взрив“ Вселената се разширява и всички

галактики се отдалечават една от друга.)

Тъй като изменението на честотата не е голямо, ще използваме уравнение (98.9) за ефекта на Доплер в класическо приближение

$\nu = \nu_0(1 - \frac{v}{c})$, откъдето определяме скоростта на галактиката:

$$v = c(1 - \frac{\nu}{\nu_0}) = 0,05c = 1,5 \cdot 10^7 \text{ m/s}.$$

Задачи

1. На екипажа на междузвезден космически кораб се плаща в зависимост от времето, прекарано в космоса. Кое е по-изгодно за космонавтите – да вземат със себе си счетоводителя, който пресмята заплатите им, или да го оставят на Земята?
2. Космически кораб се отдалечава от Земята със скорост v . За наблюдател от Земята дължината на кораба е 2 пъти по-малка от неговата собствена дължина. Колко е скоростта v ?
3. В научнофантастичен разказ се описва междузвезден полет, при който космическият кораб се отдалечава от Земята със скорост $0,9c$. За космонавтите полетът продължава 5 години. Колко години са изминали на Земята?
4. Единият от двама братя близнаци тръгва на пътешествие в космоса, а другият остава на Земята. При каква скорост на ракетата космонавтът ще остарява 3 пъти по-бавно от брат си?
5. Правоъгълен триъгълник има катети с дължини $x = 6$ см и $y = 5$ см. С каква скорост трябва да се движи триъгълникът в направление на катета x , така че за наблюдател от лабораторната отправна система той да е равнобедрен?
6. Две частици се движат в лабораторната отправна система по права линия в една и съща посока с еднаква скорост $v = 0,75c$ и попадат в неподвижна мишена през интервал от време $\Delta t = 20$ ns. Колко метра е разстоянието между частиците преди попадането в мишената: а) в лабораторната отправна система; б) в отправната система, в която те са неподвижни (собствено разстояние)?
7. Мотоциклетист, който пресича кръстовище на червен светофар ($\lambda_c = 650$ nm), опитва да се оправдае пред полицейския патрул, че поради доплеровото отместване видял светофара да свети зелено ($\lambda_z = 550$ nm). Полицията веднага му съставя акт за превишена скорост: да заплати толкова лева, колкото пъти е превишил максималната допустима скорост от 60 km/h. Колко лева трябва да плати хитреецът?

99. Релативистки импулс и енергия

Релативистки импулс

В нютоновата механика импулсът на тяло се дефинира с равенството

$$(99.1) \quad \mathbf{p} = m_0 \mathbf{u},$$

където m_0 е масата на тялото, а $\mathbf{u}$ – неговата скорост. Съгласно със закона за запазване на импулса импулсът на затворена механична система не се изменя с течение на времето. В §13 (част 1) използвахме закона за запазване на импулса при разглеждането на ударите между две тела. Анализът на удар между частици, които се движат с релативистки скорости обаче показва, че нютоновият (нерелативистки) импулс не се запазва. Това налага в релативистката механика величината импулс да се дефинира по нов начин, така че да е в сила законът за запазване на импулса във всички инерциални отправни системи.

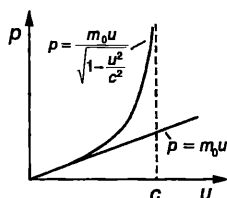
Релативистки импулс на тяло се нарича величината

$$(99.2) \quad \mathbf{p} = \frac{m_0 \mathbf{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Ще обърнем внимание, че при движение с малки скорости членът u^2/c^2 в уравнение (99.2) може да се пренебрегне и формулата за релативисткия импулс преминава в познатата формула (99.1) за импулса в класическата механика. Всички експериментални изследвания на удари, разпадане или сливане на частици, които се движат с релативистки скорости, доказват, че релативисткият импулс на затворена система се запазва.

На *фиг.99-1* графично е представена зависимостта на релативисткия импулс и нерелативисткия импулс на тяло от неговата скорост u . При движение с мал-

Фиг.99-1.



ки скорости ($u \ll c$) двете графики съвпадат, докато при скорости, близки до скоростта на светлината, те принципно се различават. При такива скорости се наблюдава важен релативистки ефект: импулсът на тялото бързо нараства, докато скоростта му почти не се изменя.

Пример 99.1. Сравнете относителното изменение на скоростта du/u и съответстващото му относително изменение на импулса dp/p на релативистка частица.

Решение. Логаритмуваме двете страни на

$$\text{уравнението } p = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

лативисткия импулс на частицата:

$$\ln p = \ln m_0 + \ln u - \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right).$$

Диференцираме двете страни на последното равенство и получаваме

$$\frac{dp}{p} = \frac{du}{u} + \frac{\frac{u}{c^2} du}{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{1 - \frac{u^2}{c^2}} \frac{du}{u}.$$

При малки скорости $\frac{dp}{p} \approx \frac{du}{u}$. При скоро-

сти, които са сравними със скоростта на светлината обаче относителното нарастване на импулса е много по-голямо от относителното нарастване на скоростта.

Релативистка маса

Ако положим

$$(99.3) \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

формула (99.1) за релативисткия импулс добива същия вид $\mathbf{p} = m \mathbf{u}$, както формулата за импулса в класическата механика. Величината m , дефинирана чрез уравнение (99.3), се нарича *релативистка маса*. Масата m_0 се нарича *маса на покой* – това е масата, която ще измери наблюдател от отправната система, спрямо която тялото е в покой. Релативистката маса нараства

при увеличаване скоростта на тялото.

Забележка. Под маса в теорията на относителността обикновено се разбира само масата на покой. Но тъй като използването на величината релативистка маса е станало традиционно при началното изучаване на релативистката физика, ние също въвеждаме това понятие.

Релативистка енергия

Уравнението на втория принцип на механиката, записано във вида

$$(99.4) \quad \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

остава в сила и в релативистката механика, където $\mathbf{p}$ е релативисткият импулс.

В теорията на относителността се дава аналогично определение за кинетичната енергия на тяло, както в класическата механика: кинетичната енергия е равна на работата, която трябва да се извърши от външна сила, за да се ускори тялото от покой до скорост u . Когато тялото се движи с релативистка скорост, за кинетичната енергия се получава (вж. пример 99.2)

$$(99.5) \quad E_k = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - 1 \right) = mc^2 - m_0 c^2.$$

При движения с малки скорости релативистката формула (99.5) преминава в познатата от класическата механика формула $E_k = m_0 u^2 / 2$ за кинетичната енергия. Действително, когато $u/c \ll 1$, можем да използваме приближението $(1+x)^n \approx 1 + nx$ при $x \ll 1$ (в случая $n = -1/2$). Тогава

$$E_k \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} - 1 \right) = \frac{m_0 u^2}{2}.$$

При движение с релативистки скорости обаче кинетичната енергия е различна както от $m_0 u^2 / 2$, така и от $mu^2 / 2$. От уравнение (99.5) следва, че кинетичната енергия, подобно на импулса, клони към безкрайност, когато $u \rightarrow c$.

Съгласно с уравнение (99.5) кинетичната енергия E_k се представя като разлика от две величини, които имат размерност на енергия. Величината

$$(99.6) \quad E_0 = m_0 c^2$$

е наречена от Айнщайн *енергия на покой*.

Енергията на покой на едно тяло е равна на произведението от масата на покой на тялото и квадрата на скоростта на светлината във вакуум.

Величината

$$(99.7) \quad E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = mc^2$$

се нарича *релативистка енергия*. Релативистката енергия на едно тяло е равна на сумата от неговата енергия на покой и кинетичната му енергия

$$(99.8) \quad E = E_0 + E_k.$$

Познатият от класическата механика закон за запазване на механичната енергия се обобщава в теорията на относителността. Релативисткият закон за запазване на енергията гласи: *Релативистката енергия на затворена система не се изменя с течение на времето.*

Пример 99.2. Тяло с маса на покой m_0 се ускорява от постоянна сила $\mathbf{F}$ и достига релативистка скорост u . Определете кинетичната енергия на тялото.

Решение. Кинетичната енергия на тялото е равна на работата на силата $\mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} E_k &= A = \int_0^u \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^u \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right) \cdot d\mathbf{r} = \\ &= \int_0^u \mathbf{u} \cdot d \left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right), \end{aligned}$$

където е използвано уравнението на втория принцип на механиката (99.4) и равенството

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}$. Интегрираме по части и отчитаме, че $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = u dr$ (вж. част 1, пример 9.1 на стр.61). Получаваме

$$E_k = \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \int_0^u \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} du =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + \int_0^u \frac{\frac{1}{2} m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} d\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \\
 &= \frac{m_0 u^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \\
 &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = E - E_0.
 \end{aligned}$$

Връзка между маса и енергия

Тяло, изградено от голям брой частици, се намира в покой спрямо дадена инерциална отправна система. Неговата релативистка енергия е равна на енергията на покой: $E = E_0 = m_0 c^2$, където m_0 е масата на покой на тялото. От друга страна, пълната енергия на тялото е равна на сумата от енергиите на покой $\sum m_{0i} c^2$ на изграждащите го частици и от кинетичните и потенциални енергии на тяхното вътрешно движение и взаимодействие. Следователно

$m_0 c^2 \neq \sum m_{0i} c^2$, т.е. в релативистката физика масата не е адитивна величина: масата на покой на едно съставно тяло не е равна на сумата от масите на неговите части.

Съгласно с теорията на относителността винаги се запазва релативистката енергия на затворена система, докато нейната маса на покой може да се изменя. Например при нееластичен удар между две тела част от кинетичната им енергия се преобразува в енергия на покой и масата на покой на системата от две тела нараства (вж. пример 99.3). При други процеси е възможно енергия на покой да се преобразува в кинетична енергия и масата на покой на системата да намалява. Неразривната връзка между маса и енергия се изразява със знаменитата формула на Айнщайн

$$(99.9) \quad E_0 = m_0 c^2.$$

Пример 99.3. Частица с маса на покой m_{01} , движеща се с релативистка скорост v , се удря в неподвижна частица с маса m_{02} . Ударът е

абсолютно нееластичен: частиците се сливат в една частица. Определете: а) скоростта u на съставната частица след удара; б) масата на покой на съставната частица, ако $m_{01} = m_{02} = m_0$ и $v = 4c/5$, където c е скоростта на светлината.

Решение. При разглеждане на нееластичен удар в класическата механика се отчита, че кинетичната енергия на системата от две тела се променя: част от нея в резултат на удара се преобразува във вътрешна енергия (вж. част 1, §13). Вътрешната енергия обаче е част от релативистка енергия на едно тяло. Затова в релативистката механика еластичният и нееластичният удар се разглеждат по един и същ начин – и в двата случая са в сила законите за запазване на релативисткия импулс и на релативистка енергия на системата от две взаимодействащи чрез удар тела (частици).

В конкретния случай от закона за запазване на импулса следва равенството

$$\frac{m_{01} v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m'_0 u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

къде m'_0 е масата на покой на съставната частица след удара. От закона за запазване на енергията следва, че сумата от релативистките енергии на двете частици преди удара е равна на релативистката енергия на съставната частица след удара:

$$\frac{m_{01} c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + m_{02} c^2 = \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Делим уравнението за енергията на уравнението за импулса и изразяваме скоростта u на съставната частица:

$$u = \frac{v}{1 + \frac{m_{02}}{m_{01}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

б) В уравнението за скоростта u заместваме $m_{01} = m_{02} = m_0$ и $v = 4c/5$ и изразяваме масата на покой на съставната частица:

$$m'_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} m_0 \approx 2,3 m_0 > 2 m_0.$$

Част от кинетичната енергия при удара се преобразува във вътрешна енергия, т.е. в енергия на покой на съставната частица. Затова нейната маса на покой е по-голяма от сумата от масите на покой на изходните частици.

Връзка между енергия и импулс

Да повдигнем на квадрат двете страни на уравнения (99.2) и (99.7), чрез които се изразяват релятивисткият импулс и релятивистката енергия. След това умножаваме уравнение (99.2) по c^2 и го изваждаме от уравнение (99.7). След съответните алгебрични преобразования се получава

$$(99.10) \quad E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4 = E_0^2 = \text{const},$$

където $E_0 = m_0 c^2$ е енергията на покой. При преминаване от една инерциална отправна система в друга се изменят както релятивистката енергия, така и релятивисткият импулс на даденото тяло. Стойността на величината $E^2 - p^2 c^2$ обаче не зависи от избора на отправната система и винаги е равна на квадрата на енергията на покой. (Нарича се релятивистки инвариант на енергията и импулса.)

От релятивисткия инвариант (99.10) изразяваме импулса:

$$(99.11) \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - E_0^2}.$$

След като отчетем, че $E = E_k + E_0$, изразяваме релятивисткия импулс чрез кинетичната енергия E_k и енергията на покой E_0 на тялото:

$$(99.12) \quad p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}.$$

Пример 99.4. а) Протон се ускорява от напрежение 500 V. Колко са кинетичната енергия и импулсът на протона?

б) На ускорителя във Ферми лабораторията (САЩ) могат да се ускоряват протони до кинетична енергия 5.10^{11} eV. Колко е импулсът на протоните? Енергията на покой на протона е $E_0 = 9.38.10^8$ eV.

Решение. а) Кинетичната енергия на протона е $E_k = eU = 500$ eV. Тя е много по-малка от енергията на покой E_0 на протона. Затова в скобите на уравнение (99.12) можем да пренебрегнем събираемото E_k :

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{2E_k E_0} = 9.7.10^5 \frac{\text{eV}}{c}.$$

При численото пресмятане сме представили импулса на протона в единици енергия (измерена в електронволти eV), разделена на скоростта на светлината c . Такова представя-

не на импулса на микрочастиците широко се използва в атомната и ядрената физика и във физиката на високите енергии.

Не е трудно да проверим (след като заместим $E_0 = m_0 c^2$ и $E_k = mu^2/2$), че горната формула съвпада с формулата за импулса в класическата механика $p = m_0 u$. Следователно, когато кинетичната енергия на една частица е много по-малка от нейната енергия на покой, релятивистките ефекти се пренебрегват.

б) В този случай кинетичната енергия на протона е много по-голяма от енергията му на покой. Такива частици се наричат *ултарелативистки*. Те се движат със скорост, която е приблизително равна на скоростта на светлината. Тяхната енергия на покой може да се пренебрегне: релятивистката енергия на ултарелативистка частица е равна на нейната кинетична енергия. В уравнение (99.12) пренебрегваме E_0 и за импулса на ултарелативисткия протон получаваме $p = E/c$. В случая:

$$p = \frac{E}{c} = 5.10^{11} \frac{\text{eV}}{c}.$$

Задачи

1. Колко е масата на тяло с енергия на покой, равна на годишното производство на електроенергия в целия свят, което в момента е около 5.10^{20} J?
2. Квазарите са много отдалечени галактики, в които се отделя колосална светлинна енергия – около 1.10^{40} J всяка секунда. С колко килограма намалява масата на квазара за една минута?
3. Електрон се движи със скорост $u = 0.8c$. Определете релятивистката енергия E и кинетичната енергия E_k на електрона. Енергията на покой на електрона е $E_0 = 0.511$ MeV.
4. При каква скорост u кинетичната енергия на една частица е равна на нейната енергия на покой?
5. В космичните лъчи се срещат протони, чиято енергия достига $E = 1.10^{19}$ eV. Протон с такава енергия пресича Млечния път, чийто диаметър е $L_0 = 1.10^{21}$ m. Колко е диаметърът L на Млечния път „от гледна точка“ на протона? Енергията на покой на протона е $E_0 = 1.10^9$ eV.
6. Електрон е ускорен от напрежение $U = 1.10^6$ V. Колко е скоростта на електрона? Енергията на покой на електрона е $E_0 = 0.511.10^6$ eV.

100. Топлинно излъчване

На 14 декември 1900 г. в доклада си пред Немското физическо общество германският физик Макс Планк (1858–1947) съобщава, че е успял да реши проблема с излъчването на нагретите тела и да получи формула, която правилно описва експериментално наблюдаваното спектрално разпределение на светлината. Дотогава всички опити в тази насока, основаващи се на законите на класическата физика, дават резултати, които противоречат на експерименталните данни и дори водят до абсурдни изводи. Докладът на Планк бележи началото на съвременната квантова физика. Планк изказва хипотезата, че светлинната енергия не се излъчва от телата непрекъснато, а на малки порции (кванти), които впоследствие били наречени *фотони*. Множество експериментални факти потвърждават двойствената природа на светлината. В явления като интерференция и дифракция се проявяват вълновите свойства на светлината. Други явления – например излъчване на светлина, фотоелектричен ефект, ефект на Комптън и други, получават правилно обяснение само като се отчетат квантовите свойства на светлината. Едновременното съчетаване на свойствата на вълна и на частица, което е несъвместимо с представите на класическата физика, получава названието *корпускуларно-вълнов дуализъм*.

Видове излъчване

Излъчванията се разделят на две основни групи: луминесцентни и топлинни. Съществуват различни видове луминесценция. При *хемилуминесценцията* излъчване се получава в резултат на химически реакции, например светене на фосфор, който бавно се окислява във въздуха. *Електролуминесценцията* възниква в резултат на електрични взаимодействия. Например при газов разряд се наблюдава светене на газове или пари. Процесите на излъчване, предизвикани от предварително или едновременно осветяване на излъчващото тяло, се наричат *фотолуминесценция*. Когато в лъчение се превръща част от

енергията на хаотичното топлинно движение на молекулите на нагрятото тяло, излъчването се нарича *топлинно* или *температурно*. Същественото различие на топлинното излъчване от луминесценцията е в това, че топлинното излъчване, за разлика от луминесцентното, може да се намира в термодинамично равновесие с телата.

Равновесно лъчение

Няколко тела, нагрети до различна температура, се намират във вакуум. Те са изолирани от останалите тела чрез огледална обвивка, която изцяло отразява попадналото върху нея лъчение (фиг.100-1). Опитът показва, че с течение на времето такава система достига състояние на термодинамично равновесие, в което всички тела имат еднаква температура T . При равновесие енергията, която се излъчва от определена повърхност на кое да е от телата за даден интервал от време, е равна на енергията, погълната от тази повърхност за същото време. Динамично равновесие между процесите на поглъщане и излъчване настъпва при определена енергия и спектрален състав на лъчението, които не се изменят с течение на времето.



Фиг.100-1.

Такова лъчение се нарича *равновесно лъчение*. Неговите свойства зависят единствено от температурата на телата, с които то се намира в равновесие. Затова се въвежда величината температура на равновесното лъчение, която по определение е равна на температурата на телата, с които лъчението е в равновесие.

Закон на Стефан

Тяло, което при всяка температура изцяло поглъща попадналото върху него електромагнитно лъчение, независимо от неговия спектрален състав, състояние на поляризация и посока на разпространение, във физиката се нарича *абсолютно черно тяло*. Излъчването на абсолютно черно тяло има същия спектрален състав, както равновесно лъчение с температура, равна на температурата на тялото. Аб-

солютно черни тела, подобно на други идеализирани обекти, в природата не съществуват. Редица тела обаче в определен честотен интервал с приближение могат да се разглеждат като абсолютно черни. Например саждите и черният бархет поглъщат и излъчват светлината от видимата област почти като абсолютно черно тяло. Слънцето също може да се разглежда като абсолютно черно тяло. Най-добър модел на абсолютно черно тяло е куха обвивка с непрозрачни поглъщащи стени, поддържани при постоянна температура, в които е направен много малък отвор. В заграждения от обвивката обем се установява почти равновесно лъчение, малка част от което непрекъснато напуска обвивката през отвора. Следователно отворът може да се разглежда като абсолютно черно тяло с температура, равна на температурата на равновесното лъчение, т.е. на обвивката.

През 1879 година австрийският физик Джозеф Стефан експериментално установява, че мощността P на топлинното излъчване (енергията, излъчена за 1 s) от нагрятото тяло е правопропорционална на площта S на излъчващата повърхност на тялото и на четвъртата степен на нейната абсолютна температура T :

$$(100.1) \quad P = e\sigma ST^4,$$

където $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)$ е константа (константа на Стефан). Безразмерният параметър e се нарича *излъчваемост* (*emissivity*) и в зависимост от вида на излъчващата повърхност може да има стойности от 0 до 1 ($e = 1$ за абсолютно черно тяло). Уравнение (100.1) изразява *закона на Стефан* за топлинното излъчване.

Ще обърнем специално внимание на много силната зависимост на мощността P на топлинното излъчване от абсолютната температура T (измерва се в келвини!) на тялото: $P \propto T^4$. Ако например T нарастне 2 пъти, P нараства $2^4 = 16$ пъти.

Телата, които ни заобикалят, непрекъснато излъчват и тяхната вътрешна енергия и температура бързо биха намалявали, ако успоредно с топлинното излъчване не протичаше и противоположният процес – поглъщане на електромагнитно лъчение от околната среда. Опитът по-

казва, че енергията, която телата поглъщат за 1 s (мощност на поглъщането P_0), е правопропорционална на четвъртата степен на абсолютната температура T_0 на околната среда и също се изразява със закона на Стефан (100.1)

$$(100.2) \quad P_0 = e\sigma ST_0^4.$$

Когато тяло с температура T се намира в среда с температура T_0 , енергията, която то обменя с околната среда (получава или отдава) за 1 s в резултат на излъчване и на поглъщане на топлинно лъчение, е

$$(100.3) \quad P - P_0 = e\sigma S (T^4 - T_0^4).$$

Пример 100.1. Термография. Даден участък от повърхността на кожата на човек има температура 310 K (37°C). Каква е температурата на друг участък със същата площ S , ако мощността на неговото топлинно излъчване е с 1% по-висока?

Решение. Диференцираме двете страни на уравнение (100.1): $dP = 4e\sigma ST^3 dT$. Полученото равенство дава връзката между изменението на температурата dT на кожата и съответстващото му изменение dP на мощността на топлинното излъчване. От него определяме

$$dT = \frac{1}{4} \frac{dP}{P} T = 0,78 \text{ K}.$$

Следователно нарастване на температурата с по-малко от 1 K води до увеличаване на мощността на излъчването с 1%. Разгледаният пример демонстрира физичния принцип на *термографията* – метод, който широко се използва в медицината и в други области. В медицината с помощта на специални приемници се регистрира инфрачервеното топлинно излъчване от различни части на тялото на пациента, след което приетите сигнали се трансформират във фотографски образ. На снимките площите с по-висока температура изглеждат по-тъмни. Методът позволява да се различат области с разлика в температурите по-малка от 0,1°C. Термографията се използва за предварителна диагностика на тумори на гърдите, щитовидната жлеза и др. болести. Възможно е също така да се регистрира топлинно излъчване на тялото в микровълновия диапазон. Микровълните имат по-голяма дължина от инфрачервените лъчи. Те по-слабо се поглъщат от тъканите, поради което може да се регистрира микровълново излъчване от тумори, намиращи се до 10 cm под повърхността на кожата.

Инфракчервеното лъчение значително по-силно се поглъща от тъканите. Затова инфрачервената термографията се използва за откриване на тумори, които са близо до кожата. Термографията е безвредна за пациента, тъй като той не е подложен на външно облъчване или друга интервенция.

Пример 100.2. Защо ясните нощи са по-студени от облачните?

Решение. Мощността на топлинното излъчване на Земята е пропорционална на четвъртата степен на нейната абсолютна температура (около 300 K). В ясна нощ излъчената енергия се разпръсква в космическото пространство. Топлинното излъчване от космоса, което достига Земята, е много слабо, защото средната температура на космическото пространство е ниска. Облаците поглъщат топлинното излъчване от Земята и от своя страна също излъчват обратно към земната повърхност. Така се създава своеобразен парников ефект: облаците не позволяват на земното излъчване да проникне в космическото пространство. Охлаждането на Земята в резултат на топлинното излъчване се нарича радиационно охлаждане.

Пример 100.3. В летен ден се намирате без дрехи в стая с температура $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Колко джаула количество топлина ще отдаде тялото ви на околната среда за 1 час в резултат на топлинното излъчване? Приемете, че кожата на тялото има площ $S = 1,5\text{ m}^2$, температура $t = 37^\circ\text{C}$ и излъчвателна способност $\epsilon = 0,9$.

Решение. $P - P_0 = \epsilon \sigma (T^4 - T_0^4) = 0,9(5,67 \cdot 10^{-8}\text{ W/m}^2\text{K}^4)(1,5\text{ m}^2)[(310\text{ K})^4 - (300\text{ K})^4] = 87\text{ J/s}$.

Количеството топлина, което тялото отдава на околната среда в резултат на топлинното излъчване, е

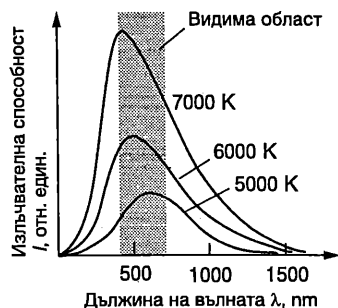
$$Q = (P - P_0)t = 313\text{ kJ} = 75\text{ kcal} \quad (1\text{ cal} = 4,18\text{ J}).$$

Ще отбележим, че температурата на кожата обикновено е по-ниска от телесната температура, което допринася за намаляването на топлообмена чрез излъчване.

Закон на Вин

Законът на Стефан изразява общата (интегрална) мощност на топлинното излъчване. Топлинното излъчване има непрекъснат спектър, който включва електромагнитни вълни с дължина на вълната от $\lambda = 0$ до $\lambda = \infty$. Спектърът на топлинно-

то излъчване на телата се описва с величината *излъчвателна способност* $I(T, \lambda)$. По определение мощността на топлинното излъчване от единица повърхност на тялото за интервала от дължини на вълната от λ до $\lambda + d\lambda$ е равна на $I(T, \lambda)d\lambda$. Експериментално е установено, че излъчвателната способност на абсолютно черно тяло зависи само от абсолютната температура и от дължината на вълната. На *фиг.100-2* е представена зависимостта на излъчвателната способност $I(T, \lambda)$ на абсолютно черно тяло от дължината на вълната λ при различни температури. Криви-



Фиг.100-2. Спектър на излъчване на абсолютно черно тяло.

те са с ясно изразен максимум, който се отмества към късовълновата област при увеличаване на температурата на излъчвателя. През 1893 година немският физик Вилхелм Вин установява, че произведението от дължината на вълната λ_m , съответстваща на максимума в спектъра, и абсолютната температура T на черното тяло остава постоянно при изменение на температурата:

$$(100.4) \quad \lambda_m T = b.$$

Това съотношение изразява *закона на Вин* за отместване на спектралния максимум. Константата b се нарича *константа на Вин*. Нейната стойност е $b = 2,898 \cdot 10^{-3}\text{ m}\cdot\text{K}$.

Пример 100.4. Спектърът на топлинното излъчване на Слънцето е близък до спектъра на абсолютно черно тяло с температура $T = 5787\text{ K}$. Пресметнете дължината на вълната λ_m , съответстваща на максимума в спектъра на Слънцето.

Решение. От закона на Вин (100.4) получаваме

$$\lambda_m = \frac{b}{T} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}}{5787 \text{ К}} \approx 500 \text{ нм}.$$

Окоето е чувствително в интервала от 400 нм до 760 нм, в който се намира максимумът $\lambda_m = 500 \text{ нм}$ на слънчевата радиация. На видимата за човека област се пада около 40% от излъчването на Слънцето. Това е естествено, защото човешкото око е резултат от дълга еволюция, протичаща в условия, където земните предмети са осветени от слънчева светлина. Биологическата целесъобразност обяснява липсата на чувствителност на окоето към инфрачервените и ултравиолетовите лъчи. Например ултравиолетовата част от спектъра на Слънцето ($\lambda < 290 \text{ нм}$) се поглъща от слоя озон, разположен на височина 20–30 км и не достига до земната повърхност. В повечето случаи ултравиолетовите лъчи са опасни за живите организми, защото предизвикват химично разлагане на органичните вещества и могат да убият живите микроорганизми и клетки. Окоето има собствена защита срещу дълговълновите ултравиолетови лъчи (от 290 до 400 нм), които преминават през атмосферата. Те се поглъщат от озната леща и много малка част достига до светлочувствителната повърхност на ретината.

От друга страна, функцията на окоето като зрителен орган би била невъзможна, ако то беше чувствително в инфрачервената област. Самото око излъчва като черно тяло с температура 37°C (телесна температура) предимно в инфрачервената област. Пресмятанията показват, че върху ретината попада хиляди пъти по-голяма енергия от собственото топлинно излъчване на окоето, отколкото от отразената от външните предмети видима светлина. Следователно собственото излъчване на окоето би „затъмнило“ всички външни обекти.

Формула на Планк

В края на XIX век се натрупват голямо количество експериментални данни за спектралната зависимост на излъчването на абсолютно черно тяло. Всички опити обаче да бъде получена теоретично функция $I(T, \lambda)$ въз основа на законите на термодинамиката и електродинамиката завършват с неуспех. За да получи теоретично зависимостта на излъчвателната способност $I(T, \lambda)$ на абсолютно черно тяло от дължината на вълната λ и температурата T , Планк прави принципно ново предположение. Според *хипотезата на Планк*

електричен дипол, който извършва трептения с честота ν , излъчва електромагнитна енергия не непрекъснато, а на порции с големина

$$(100.5) \quad E = h\nu,$$

където h е нова, фундаментална природна константа, която е наречена в негова чест *константа на Планк*. Нейната числена стойност е $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$. С помощта на тази хипотеза Планк получава следната формула за излъчвателната способност на абсолютно черно тяло:

$$(100.6) \quad I(\lambda, T) = \left(\frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \right) \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1},$$

която правилно описва експерименталните резултати. В нея k е константата на Болцман, а c – скоростта на светлината. Законът на Стефан се получава от формулата на Планк след интегриране:

$$(100.7) \quad P = S \left(\int_0^\infty I(\lambda, T) d\lambda \right).$$

Като се пресметне интегралът в скобите, за константата на Стефан се получава (вж. зад.3)

$$(100.8) \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3}.$$

Задачи

1. Температурата на абсолютно черно тяло е 27 °C. Колко пъти ще нарасне мощността на топлинното излъчване на тялото, ако то се нагрее до температура 327 °C?

2. Определете дължината на вълната λ_m , съответстваща на максимума в спектъра на топлинното излъчване на човешкото тяло. Температурата на кожата приемете за 34 °C.

3. Като използвате формулата на Планк, определете константата σ в закона на Стефан.

Указание. При решаването на интеграла в уравнение (100.7) въведете безразмерна променлива $x = \frac{hc}{\lambda kT}$, след което използвайте ин-

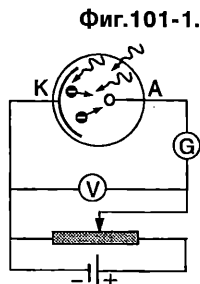
$$\text{теграла } \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

101. Фотоелектричен ефект

Отделянето на електрони от веществото в резултат на поглъщане на светлина се нарича *фотоелектричен ефект* или накратко *фотоефект*. Фотоефект се наблюдава както в метали, така и в диелектрици и полупроводници. Различават външен фотоефект и вътрешен фотоефект. При външния фотоефект отделените електрони напускат повърхността на веществото и преминават в друга среда или във вакуум. Фотоефектът се нарича вътрешен, когато електроните не напускат веществото, а под действие на светлината само преминават от едно енергетично състояние в друго, при което се променят електричните свойства на веществото. Вътрешният фотоефект намира широко приложение в полупроводниковите фотоелектрични прибори (фотосъпротивления, фотодиоди, слънчеви батерии и др.). В този параграф ще се ограничим с разглеждането само на външния фотоефект при металите, който не само има голямо практическо значение, но заема и важно място в развитието на квантовата теория на светлината.

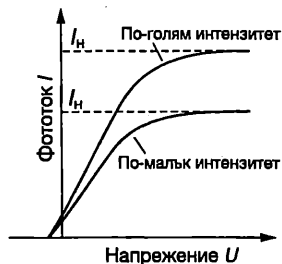
Основни закономерности на фотоефекта

Фотоефектът е открит от Херц през 1887 година. Опитът показва, че фотоефектът силно зависи от състоянието на осветената повърхност. Затова при изследването му се използват чисти повърхности, поставени във вакуум. На *fig.101-1* е показана принципна схема на опитна постановка за изучаване на фотоефекта. Във вакуумиран стъклен или кварцов балон са поставени два метални електрода. Такова устройство се нарича *фотоклетка*. Катодеят на фотоклетката е свързан към отрицателния полюс на източник на постоянно ЕДН. В отсъствие на осветление (на тъмно) във веригата не протича ток, тъй като в пространството между катода и анода няма свободни токови носители. При осветяване на



Фиг.101-1.

катода от него се избиват фотоелектрони, които се ускоряват от приложеното напрежение и достигат до анода. Във веригата протича *фототок*, който се измерва с чувствителния галванометър G. На *fig.101-2* е показана зависимостта на фототока I от приложеното напрежение U при два раз-



Фиг.101-2.

лични интензитета на падащата върху катода монохроматична светлина. От волтамперните характеристики се вижда, че фототокът нараства при увеличаване на приложеното напрежение. При определено напрежение всички електрони, отделени от повърхността на катода, достигат до анода. Затова при по-нататъшно увеличаване на напрежението токът остава постоянен – това е т. нар. *ток на насищане* I_H . Токът на насищане нараства при увеличаване интензитета на светлината, което показва, че при по-голям интензитет от катода се отделят повече електрони. Ако се подаде обратно напрежение U (положителният полюс на източника се свързва към катода), електричното поле между електродите променя посоката си и се стреми да върне фотоелектроните обратно към катода. Когато електрон измине разстоянието от катода до анода, електричните сили извършват отрицателна работа с големина eU (e е големината на заряда на електрона) и кинетичната енергия на електроните намалява. Фототокът също намалява, защото само електроните, чиято кинетична енергия е по-голяма от eU , успяват да достигнат до анода (останалите под действието на електричните сили се връщат обратно към катода). При определена стойност на обратното напрежение $U = U_c$, наречена *спирачно напрежение*, фототокът става равен на нула. От закона за запазване на енергията следва равенството

където $E_{k,max} = \frac{mv_{max}^2}{2}$ е максималната кинетична енергия на фотоелектроните (m е масата на електрона, а v_{max} – максималната скорост, с която електроните напускат катода). В резултат на многобройни експериментални изследвания са установени следните основни закономерности на фотоефекта:

1. При осветяване с монохроматична светлина броят на отделените за единица време от дадена повърхност електрони е право пропорционален на интензитета на светлината.

2. За всеки метал съществува *червена граница* на фотоефекта, т.е. максимална дължина на вълната λ_{max} (или съответно минимална честота $\nu_{min} = c/\lambda_{max}$) на светлината, при която все още е възможно отделяне на фотоелектрони. Ако $\lambda > \lambda_{max}$, фотоефект не се наблюдава дори при голям интензитет на падащата светлина.

3. Максималната кинетична енергия $E_{k,max}$ на фотоелектроните не зависи от интензитета на светлината. $E_{k,max}$ нараства линейно при увеличаване честотата ν на падащата светлина (фиг.101-3).



Фиг.101-3.

4. Фотоелектрони се отделят практически едновременно с осветяването (по-малко от 10^{-9} s след осветяването на повърхността), дори когато интензитетът на светлината е много малък.

Възможно ли е вълновата електромагнитна теория на Максвел да обясни закономерностите на фотоефекта? Според теорията на Максвел свободните електрони, които се намират близо до повърхността на метала, извършват принудени трептения в електричното поле на падащата електромагнитна вълна. Те поглъщат енергия и амплитудите на трептене нарастват. Когато енергията на трептене на даден електрон достигне определена критична стойност, електронът преодолява електричните сили на привличане към положителните йони на метала и се откъсва от повърхността на метала. Ако такъв модел

е верен, следва да се очаква, че максималната кинетична енергия $E_{k,max}$ на фотоелектроните ще е пропорционална на интензитета на падащата светлина: при голям интензитет на светлината електричното поле на вълната е по-силно и електроните получават от него по-голяма енергия. Опитът обаче показва, че $E_{k,max}$ изобщо не зависи от интензитета на светлината. Освен това вълновата теория не е в състояние да обясни съществуването на червена граница на фотоефекта. От нея следва, че фотоефект трябва да възниква при всяка дължина на вълната, стига интензитетът на светлината да е достатъчно голям. От вълновата теория също така следва, че фотоелектроните трябва да се появяват със закъснение. Особено при малък интензитет на светлината на електрона е нужно време, за да „натрупа“ необходимата за напускане на метала енергия.

Следователно основните закономерности на фотоефекта не могат да се обяснят от електромагнитната теория на Максвел. Това изисква да се променят схващанията за природата на светлината.

Уравнение на Айнщайн

През 1905 г. излиза статията на Айнщайн „За една евристична гледна точка, отнасяща се до възникването и превръщането на светлината“, в която той обяснява закономерностите на фотоефекта, изхождайки от хипотезата за светлинните кванти. Айнщайн стига до извода, че светлината не само се излъчва, но и се поглъща на кванти. При облъчване на веществото електроните не поглъщат светлина непрекъснато, а на порции. Електронът изцяло поглъща една порция (квант) енергия $E = h\nu$. При всички разглеждания ще предполагаме, че даден електрон поглъща само един квант. При нормален интензитет на светлината вероятността един електрон едновременно да погълне два или повече кванта е пренебрежимо малка. Ще отбележим, че процеси на едновременно поглъщане на няколко кванта са наблюдавани в опити със свръхмощни лазерни импулси.

Да означим с A_0 *отделителната работа* – минималната енергия, която трябва

ва да получи електронът, за да се освободи и напусне повърхността на метала. Ако $h\nu < A_e$, енергията на един квант не е достатъчна за отделяне на електрон и фотоефект не се наблюдава. Равенството

$$(101.2) \quad \nu_{\min} = \frac{A_e}{h} \text{ или } \lambda_{\max} = \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{ch}{A_e}$$

определя червената граница на фотоефекта.

Фотоефектът е безинерционен, защото актовете на поглъщане на светлинните кванти се извършват практически мигновено.

За електроните с максимална кинетична енергия от закона за запазване на енергията при поглъщане на светлинен квант следва равенството

$$(101.3) \quad h\nu = A_e + E_{k, \max}$$

наречено *уравнение на Айнщайн за външния фотоефект*.

От уравнения (101.1) и (101.3) за спиращото напрежение се получава

$$(101.4) \quad U_c = \frac{h}{e} \nu - \frac{A_e}{e},$$

т.е. спиращото напрежение U_c е линейна функция на честотата ν на падащата светлина. През 1916 година американският физик Роберт Миликен (1868–1953) получава експериментално зависимостта $U_c(\nu)$ при фотоефект от чиста повърхност на метала натрий. Нейният линеен характер потвърждава правилността на уравнението на Айнщайн. По наклона на правата линия Миликен определя отношението h/e на константата на Планк към заряда на електрона.

Фотони

През 20-те години на нашия век се провеждат серия от експерименти, които убедително потвърждават съществуването на светлинните кванти. Според съвременните представи светлинните кванти, които през 1926 година били наречени *фотони*, се разглеждат като частици без маса на покой ($m_0 = 0$), движещи се със скоростта на светлината c . Подобно на останалите частици, фотоните притежават енергия и импулс. Импулсът на фотон с енергия $E = h\nu$ може да се изрази от релативисткия инвариант на енергията и импулса (99.11) на

стр.243, като се отчете, че енергията на покой на фотона е нула ($E_0 = 0$). Получава се

$$(101.5) \quad p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Фотони и зрение

Чувствителността на човешкото око е изключително голяма. Многобройните експериментални изследвания показват, че на прага на зрителното усещане съответстват от 2 до 7 фотона, които попадат върху ретината за една секунда. Окоето не е чувствително към отделния фотон. За да протекат фотохимични реакции и възникне зрително усещане, необходимо е последователно поглъщане в кратък интервал от време поне на два фотона. Какво би станало, ако окоето реагираше отделно на всеки фотон? Самото око излъчва като черно тяло с температура 310 K (телесна температура). При такава ниска температура, съгласно със закона на Вин, максимумът на излъчването е в инфрачервената област ($\lambda_{\max} = 9 \mu\text{m}$), към която окоето не е чувствително. Съществува обаче много слабо излъчване и във видимата област, чието интензитет може да се определи с помощта на формулата на Планк. Пресмятанията показват, че за една секунда върху ретината попада средно по един фотон от видимата област, получен от топлинното излъчване на окоето. Следователно, ако окоето беше чувствително към отделните фотони, собственото му топлинно излъчване щеше да създава фон, който да пречи на зрението.

Пример 101.1. В оптиката дължината на вълната λ на светлината се измерва в нанометри, а енергията E на фотоните – в електронволти. За бързо преминаване от едната величина към другата величина е удобно да се използва формулата

$$\lambda E = hc = 1240 \text{ nm} \cdot \text{eV}.$$

а) Докажете това съотношение.

б) Колко електронволта е енергията на фотоните на светлината, към която човешкото око е най-чувствително ($\lambda = 560 \text{ nm}$)?

в) Червената граница на фотоефекта за натрия е при $\lambda_{\max} = 504 \text{ nm}$. Колко електронволта е отделителната работа за натрия?

Решение. а) В произведението λE замества-
ме $E = h\nu = h(c/\lambda)$ и получаваме

$$\lambda E = \lambda \frac{hc}{\lambda} = hc = (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(2,998 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}) = 1,986 \cdot 10^{-25} \text{ m} \cdot \text{J}$$

За да преминем от мерни единици m·J в единици nm·eV, трябва да заместим 1 m =

$$1 \cdot 10^9 \text{ nm} \text{ и } 1 \text{ J} = \frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV. Получаваме}$$

$$\lambda E = hc = (1,986 \cdot 10^{-25})(1 \cdot 10^9 \text{ nm})(\frac{1}{1,602 \cdot 10^{-19}} \text{ eV}) = 1240 \text{ nm} \cdot \text{eV.}$$

б) За да определим енергията на фотона, ще използваме доказаното в точка а) съотношение

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ nm} \cdot \text{eV}}{560 \text{ nm}} = 2,21 \text{ eV.}$$

в) Отделителната работа определяме от уравнение (101.2):

$$A_0 = \frac{hc}{\lambda_{\text{max}}} = \frac{1240 \text{ nm} \cdot \text{eV}}{504 \text{ nm}} = 2,46 \text{ eV.}$$

Пример 101.2. Като използвате законите за запазване на енергията и импулса докажете, че не е възможен фотоефект от свободен електрон, т.е. свободен електрон не може да погълне фотон.

Решение. Актовете на излъчване, поглъщане и разсейване на фотони могат да се разглеждат по същия начин, както разпадането, сливането или разсейването (удар) на „обичайни“ частици, т.е. на частици с маса на покой. Да допуснем, че електрон, който първоначално е в покой, поглъща фотон с енергия E_ϕ и импулс $p_\phi = E_\phi/c$. Преди поглъщането релативистката енергия на електрона е равна на неговата енергия на покой E_0 . В резултат на поглъщането електронът получава кинетична енергия E_k и

импулс $p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}$. От законите за запазване на енергията и импулса следват равенствата

$$E_\phi = E_k \text{ и } p_\phi = p.$$

Тези две равенства обаче не могат да бъдат изпълнени едновременно. Действително, ако във второто от тях изразим импулсите p_ϕ и p чрез енергиите E_ϕ , E_k и E_0 , ще получим

$$E_\phi = \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}.$$

Заместваме $E_k = E_\phi$ и стигаме до уравнение, което има решение само при $E_\phi = 0$ или $E_\phi = \infty$. И двете решения нямат физичен смисъл. Стигаме до извода, че свободен електрон не може да погълне фотон. Такъв процес би противоречал на законите за запазване на енергията и импулса.

При фотоефект в поглъщането на фотони освен отделните електрони участва и кристалната решетка, т.е. кристалът като цяло. Електронът получава практически цялата енергия на фотона и импулс, съответстващ на тази енергия. Кристалната решетка, която има много по-голяма маса от електрона, практически не получава енергия, но получава импулс, който е приблизително равен по големина и има противоположна посока на импулса на електрона. Векторната сума от импулсите на електрона и решетката има малка стойност, равна на импулса на фотона. Следователно фотоефектът е възможен благодарение на участието на кристала като цяло.

Задачи

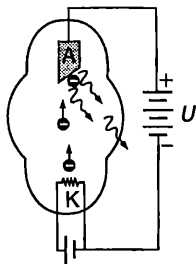
1. Колко електронволта е енергията на фотоните, съответстващи на двете граници на видимата област ($\lambda_1 = 400 \text{ nm}$ и $\lambda_2 = 760 \text{ nm}$)?
2. Отделителната работа за калия е 2,24 eV. При каква дължина на вълната се намира червената граница на фотоефекта за този метал?
3. Червената граница на фотоефекта за цезиев катод съответства на дължина на вълната $\lambda_{\text{max}} = 680 \text{ nm}$. Ще предизвика ли фотоефект светлина с честота $\nu = 5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$?
4. Максималната скорост, с която се отделят електрони от катода на фотоклетка, е $6 \cdot 10^5 \text{ m/s}$. Колко е спиралното напрежение?
5. Литият е метал с отделителна работа 2,3 eV. Колко е максималната кинетична енергия, с която фотоелектроните напускат повърхността на образец от литий, когато той се освети с монохроматична светлина с дължина на вълната 450 nm?
6. Фотоклетка се облъчва с монохроматична светлина с дължина на вълната 440 nm. Определете отделителната работа за метала, от който е изготвен катодът на фотоклетката, ако спиралното напрежение е 0,6 eV.
7. В лабораторията студент насочва светлинния сноп от учебния лазер към отсрещната стена. Колко фотона попадат върху стената за 1 s? Мощността на лазера е $P = 1 \text{ mW}$, а дължината на вълната на излъчената светлина е $\lambda = 633 \text{ nm}$.

102. Рентгенови лъчи

Първата Нобелова награда по физика е присъдена на германския физик Вилхелм Рънтген за откриването през 1895 година на неизвестно по онова време излъчване, което той нарича X-лъчи. Днес X-лъчи или рентгенови лъчи се нарича късовълновото електромагнитно лъчение с дължина на вълната в интервала приблизително от 10^{-8} m (10 nm) до 10^{-12} m (10^{-3} nm). Откриването на рентгеновите лъчи дава мощен тласък в развитието на физиката и разкрива широки възможности за практическо приложение на тези лъчения. Изследванията на рентгеновите лъчи дават нови, убедителни доказателства за правилността на фотонната теория.

Спектр на рентгеновото излъчване

Рентгеново излъчване се получава, когато метална мишена се бомбардира от електрони с голяма кинетична енергия. За тази цел се използват устройства, наречени *рентгенови тръби* (фиг.102-1). Във вакуумирана тръба се разполагат един срещу друг два електрода – нагреваема жичка (катод K) и метална пластина (анод A), между които се подава високо напрежение (няколко десетки или стотици киловолта). От нагрятата жичка, която е свързана към отрицателния полюс на източника на високо напрежение, чрез термоелектронна емисия се отделят електрони. Те се ускоряват от електричното поле и се насочват към металната пластина, служеща за мишена. При взаимодействието на електронния сноп с мишената възникват два вида рентгеново излъчване:



Фиг.102-1.

1. Спирачно рентгеново излъчване.

При удара с атомите на веществото на мишената около 99% от кинетичната енергия на електронния сноп се преобразува в топлина и мишената се загрева, което налага рентгеновите тръби да се охлаждат с вода. Когато срещнат на пътя си

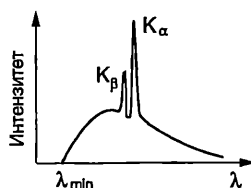
атомни ядра обаче, част от електроните рязко се забавят (движат се с много голямо ускорение) и излъчват: кинетичната енергия на тези електрони частично или изцяло се преобразува в енергия на електромагнитно лъчение от рентгеновата област. Това излъчване се нарича *спирачно* и има непрекъснат спектър, който не зависи от вида на атомите на мишената, а се определя единствено от кинетичната енергия на електроните. Спектърът на спирачното рентгеново излъчване е с рязка късовълнова граница $\lambda_{\min}$ (фиг.102-2). При увеличаване на приложеното към рентгеновата тръба ускоряващо напрежение границата $\lambda_{\min}$ се отмества към по-малките дължини на вълната.

Наличието на късовълнова граница в спектъра на рентгеновите лъчи се обяснява от фотонната теория. При ускоряване от напрежение U електронът получава кинетична енергия eU . В резултат на взаимодействието с мишената електронът губи частично или изцяло тази енергия. От закона за запазване на енергията следва, че когато цялата кинетична енергия на електрона се преобразува в енергия на един единствен фотон, този фотон има максимална честота $\nu_{\max}$ (енергия $E_{\max}$):

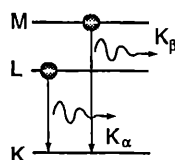
$$(102.1) \quad h\nu_{\max} = eU \quad \text{или} \quad \lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{hc}{eU}.$$

2. Характеристично рентгеново излъчване. В спектъра на рентгеновото излъчване се наблюдават и тесни спектрални линии с голям интензитет (фиг.102-2), които се наслагват върху непрекъснатия спектър на спирачното излъчване. Тези спектрални линии се наричат характеристични линии, тъй като тяхното положение (дължина на вълната) зависи от веществото на мишената. Когато бомбардиращите мишената електрони имат достатъчно голяма кинетична енергия, те могат да из-

Фиг.102-2.



Фиг.102-3.



бият електрони от вътрешните електронни слоеве на атома (от K, L или от M слоя). Получената по този начин електронна ваканция се запълва от електрон от някой от по-горните електронни слоеве, който преминава в свободното състояние. Този преход е съпроводен с излъчване на фотон, чиято енергия е равна на разликата в енергиите на двете нива.

Ще разгледаме случая, когато бомбардиращият електрон създава ваканция в най-вътрешния (K слой) на атома. Когато тази ваканция се попълва с електрон от от следващия по енергия L слой (фиг.102-3), излъченият при този преход фотон съответства на т.нар. K_{α} линия от характеристичния спектър (фиг.102-2). При запълване на ваканцията с електрон от M слой, излъченият фотон съответства на характеристичната K_{β} линия.

Дифракция на рентгеновите лъчи

През 1912 година немският физик Макс фон Лауе теоретично обосновава възможността кристалите, които са изградени от симетрично разположени редици от атоми, да се използват като дифракционни решетки за рентгеновите лъчи. След като преминат (или се отразят) през кристала, рентгеновите лъчи се разделят на отделни снопове, които попадат върху фотографски филм и създават дифракционна картина, съставена от симетрично разположени петна. Тези петна са резултат от интерференцията на вторичните вълни, излъчени от много голям брой симетрично разположени атоми, действащи като дифракционна решетка. Като се анализира разположението на петната и техният интензитет, получава се информация за структурата на кристала (за начина на подреждане на атомите) и се определя разстоянието между тях. Този метод за изследване на вътрешната структура на веществата се нарича *рентгеноструктурен анализ*. Чрез анализ на дифракционните картини, получени с рентгенови лъчи, се определя също така структурата на метални сплави, органични съединения и биологични обекти с периодична структура (например молекулите на ДНК, на хемоглобина и др.).

Приложение на рентгеновите лъчи в медицината

Поглъщането на рентгеновото лъчение от веществото се различава от поглъщането на светлината. Например прозрачното за светлината оловно стъкло почти изцяло поглъща рентгеновите лъчи и се използва за защита на работещите с рентгенова апаратура. Обратно, рентгеновите лъчи преминават с минимално поглъщане през алуминиево фолио, което е непрозрачно за светлината. Различните органи и тъкани на човешкото тяло поглъщат рентгеновите лъчи в различна степен: костите и други образувания, съдържащи калций, ги поглъщат по-силно от меките тъкани, на което се основава използването на рентгеновите лъчи в медицината за наблюдаване на вътрешни органи на човека: кости, бели дробове и др. Изследваната част от тялото се „осветява“ с рентгеновите лъчи, които частично се поглъщат от нея, а преминалите лъчи попадат върху екрана на флуороскоп или върху касета с фотографски филм. На екрана образът на обектите, които по-силно поглъщат рентгеновите лъчи (например костите), е тъмен, а на по-слабо поглъщащите – светъл (образът върху проявления фотофилм е негативен – костите са светли). В съвременните компютърни рентгенови томографи тесен рентгенов сноп пробягва (сканира) послойно дадена част от човешкото тяло и образите на отделните слоеве се получават след компютърна обработка на разпределението на интензитета на преминалото през тях лъчение.

Задачи

1. Ускоряващото напрежение на рентгенова тръба е 40 kV. Определете късовълновата граница $\lambda_{\min}$ на непрекъснатия спектър на спирачното рентгеново излъчване.
2. Енергията на електроните от различните атомни слоеве може да се оцени по следната формула: $E = -(Z - n)^2(13,6 \text{ eV})$, където Z е атомният номер, а n е броят на вътрешните електрони, които екранират ядрото ($n = 1$ за електрон от K слой; $n = 9$ за електрон от L слой; 2 електрона от K слой и останалите 7 електрона от L слой). Оценете енергията и дължината на вълната на фотона от K_{α} линията на волфрама ($Z = 74$).

103. Други експериментални доказателства за квантовите свойства на лъчението

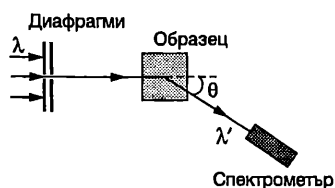
Ефект на Комптън

През 1922 година американският физик Артур Комптън (1892–1962) изследва разсейването на рентгенови лъчи от тела, съставени от леки атоми (графит, парафин и др.). Принципна схема на използваната опитна постановка е показана на *fig.103-1*. Диафрагмите отделят тесен сноп монохроматично рентгеново лъчение с дължина на вълната λ , който се насочва към образца. С помощта на рентгенов спектрометър се измерва дължината на вълната λ' на разсеяното от образца лъчение като функция на ъгъла на разсейване θ .

Съгласно с класическата електродинамика електричните диполи на веществото извършват принудени трептения под действие на падащата електромагнитна вълна от рентгеновия диапазон и излъчват нови вълни, които интерферират помежду си и формират разсеяната от веществото вълна. Тъй като принудените трептения на диполите имат същата честота, както падащата вълна, следва изводът, че честотата на разсеяното лъчение трябва да е равна на честотата на падащото върху образца лъчение. Резултатите на Комптън обаче показват, че в действителност се наблюдава изменение на дължината на вълната (честотата) на разсеяното лъчение. Експериментално е установено:

1. Спектърът на разсеяното от образца лъчение, освен първоначалната дължина на вълната λ , съдържа и втора компонента с по-голяма дължина на вълната λ' ($\lambda' > \lambda$).

Фиг.103-1. Комптъново разсейване на рентгенови лъчи.



2. Разликата $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ нараства при увеличаване на ъгъла θ .

3. При даден ъгъл на разсейване θ нарастването на дължината на вълната $\Delta\lambda$ не зависи от дължината на вълната λ на падащото върху образца лъчение.

4. При $\lambda = \text{const}$ нарастването $\Delta\lambda$ е еднакво за всички разсейващи вещества.

Нарастването на дължината на вълната $\Delta\lambda$ се нарича комптъново отместване (към дълговълновата част на спектъра), а самото явление – *ефект на Комптън*. Комптън установява експериментално следната зависимост на $\Delta\lambda$ от ъгъла на разсейване θ :

$$(103.1) \quad \Delta\lambda = 2\lambda_c \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

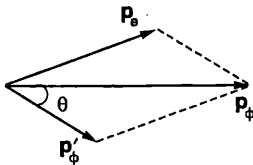
където $\lambda_c = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ е константа, която е наречена *комптънова дължина за електрона*. От уравнение (103.1) следва, че $\Delta\lambda = \lambda_c$ при $\theta = \pi/2$, т.е. комптъновата дължина за електрона е равна на нарастването на дължината на вълната на рентгеновите лъчи при комптъново разсейване под прав ъгъл.

Обяснение на ефекта на Комптън е дадено през 1923 година от Комптън и Дебай с помощта на квантовата теория на лъчението. Уравнение (103.1) описва разсейване на рентгенови лъчи само от леки атоми, които съдържат относително голям брой слабо свързани електрони. Енергията на връзката на тези електрони към атома е много по-малка от енергията, която те получават в резултат на разсейването. Подобни електрони могат да се разглеждат като свободни електрони. Освен това ще смятаме, че преди разсейването те се намират в покой. Ще анализираме разсейването на рентгенови фотони от свободни електрони с помощта на законите за запазване на релативистката енергия и релативисткия импулс на системата електрон – фотон. От тези закони следват уравненията

$$(103.2) \quad E_\phi + E_0 = E'_\phi + E_e;$$

$$(103.3) \quad \mathbf{p}_\phi = \mathbf{p}'_\phi + \mathbf{p}_e,$$

където E_ϕ и $\mathbf{p}_\phi$ са енергията и импулсът на фотона преди разсейването, а E'_ϕ и $\mathbf{p}'_\phi$ – след разсейването. E_0 е енергията на покой на електрона, E_e и $\mathbf{p}_e$ са съответно



Фиг.103-2.

неговите енергия и импулс след разсейването. Умножаваме двете страни на уравнение (103.3) по скоростта на светлината c и повдигаме двете уравнения (103.2) и (103.3) на квадрат:

$$E_e^2 = E_0^2 + E_\phi^2 + E_\phi'^2 - 2E_\phi E_\phi' + 2E_0(E_\phi - E_\phi');$$

$$p_e^2 c^2 = E_\phi^2 + E_\phi'^2 - 2E_\phi E_\phi' \cos \theta,$$

където θ е ъгълът между векторите $\mathbf{p}_\phi$ и $\mathbf{p}'_\phi$ (фиг.103-2), т.е. ъгълът на разсейване. В последното равенство е отчетено, че за фотона $p_\phi = E_\phi/c$.

Изваждаме от първото уравнение второто и след прегрупиране получаваме

$$(103.4) \quad E_e^2 - (E_e^2 - p_e^2 c^2) = 2E_\phi E_\phi' (1 - \cos \theta) - 2E_0(E_\phi - E_\phi').$$

Лявата страна на уравнение (103.4) е нула, защото членът в скобите е релятивисткият инвариант на енергията и импулса за електрона, който е равен на E_0^2 (вж. уравнение (99.10) на стр.243). Заместваме $E_\phi = hc/\lambda$, $E_\phi' = hc/\lambda'$ и $E_0 = m_e c^2$ (m_e е масата на покой на електрона) в уравнение (103.4) и след съответните алгебрични преобразования получаваме

$$(103.5) \quad \begin{aligned} \Delta\lambda = \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) = \\ &= \frac{2h}{m_e c} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

Като се сравнят уравнения (103.5) и (103.1) се вижда, че комптъновата дължина за електрона λ_c се изразява чрез константата на Планк h , скоростта на светлината c и масата на електрона m_e :

$$(103.6) \quad \lambda_c = \frac{h}{m_e c}.$$

Стойността на λ_c , пресметната по формула (103.6), е в пълно съответствие с експерименталните данни.

Умножаваме числителя и знаменателя на уравнение (103.6) по скоростта на светлината c . Получаваме: $m_e c^2 = hc/\lambda_c$. Следователно комптъновата дължина за електрона е равна на дължината на вълната λ_c на фотон, който има енергия hc/λ_c , равна на енергията на покой на електрона $m_e c^2$.

Пример 103.1. Фотон с енергия, равна на енергията на покой на електрона ($E_0 = 0,511$ MeV), се разсейва от неподвижен електрон. Каква максимална кинетична енергия може да получи електронът?

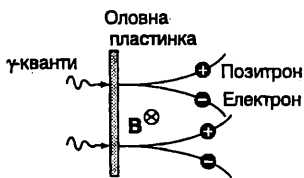
Решение. Преди разсейването дължината на вълната на фотона е равна на комптъновата дължина за електрона λ_c . От уравнение (103.1) се вижда, че максимално нарастване на дължината на вълната, т.е. най-голямо изменение (намаляване) на енергията на фотона, се получава при обратно разсейване ($\theta = 180^\circ$). Тогава:

$$\lambda' - \lambda = \lambda' - \lambda_c = 2\lambda_c.$$

Следователно след разсейването дължината на вълната на фотона нараства 3 пъти, $\lambda' = 3\lambda_c$, а енергията намалява 3 пъти: $E' = hc/\lambda' = hc/3\lambda_c = E_0/3$. Съгласно със закона за запазване на енергията при комптъновото разсейване електронът получава кинетична енергия $E_k = E_0 - E' = 2E_0/3 = 0,341$ MeV.

Раждане на двойки електрон-позитрон

След рентгеновата област в спектъра на електромагнитните вълни са γ -лъчите (вж. фиг.86-7 на стр.186). Техните фотони се наричат γ -кванти. При достатъчно голяма енергия на γ -квантите е възможно такова взаимодействие на γ -квантите с веществото, при което се образуват двойки електрон-позитрон. Позитронът (e^+) е античастицата на електрона: има същата маса, както електрона, но подобно на протона е носител на елементарен положителен заряд. Позитроните са открити през 1932 година от американския физик Карл Андерсън, който изследва взаимодействието на космичните лъчи (потоци от заредени частици, главно протони с много голяма енергия) с горните слоеве на атмосферата. Възможността за процес, при който γ -квантът изчезва (анихилира), а на негово място се ражда двойка електрон-позитрон (фиг.103-3), е била теоретично



Фиг.103-3. Раждане на двойки електрон–позитрон при бомбардиране на оловна пластинка с γ -кванти. Обърнете внимание, че в магнитно поле електронът и позитронът се отклоняват в противоположни посоки.

предсказана от Дирак през 1928 година, т.е. преди откриването на позитрона. Раждане на двойка може да се извърши в кулоновото поле на атомно ядро, протон или електрон. Доказва се, че без участието на трета частица процесът е невъзможен, защото противоречи на законите за запазване на енергията и импулса. Минималната енергия на γ -кванта, при която е възможно раждане на двойка електрон–позитрон, се нарича *прагова енергия* $E_{\text{пр}}$. Когато допълнителната (трета) частица, която участва в процеса, има голяма маса (ядро или протон), възможно е тя да получи почти целия импулс на γ -кванта, практически без да получава енергия (случаят е подобен на еластичен удар на топче в стена). Тогава цялата енергия на γ -кванта преминава в енергия на покой на двойката електрон–позитрон. Следователно, ако раждането на двойката става в кулоновото поле на ядро или протон, праговата енергия на γ -кванта е приблизително равна на удвоената енергия на покой на електрона (позитрона): $E_{\text{пр}} \approx 2m_e c^2 = 1,02 \text{ MeV}$.

Пример 103.2. Раждане на електрон–позитронна двойка се извършва в кулоновото поле на неподвижен електрон. Определете минималната (прагова) енергия $E_{\text{пр}}$ на γ -кванта, при която този процес е възможен.

Решение. Съгласно със закона за запазване на импулса пълният импулс на системата от три частици (електрон + двойката електрон–позитрон) трябва да е равен на импулса на γ -кванта. От друга страна, при прагова енергия $E_{\text{пр}}$ на γ -кванта системата от три частици има минимална кинетична енергия. При зададен импулс, система от частици има минимална кинетична енергия, когато всички частици се движат като едно цяло: с еднакви скорости в една

и съща посока. В случая трите частици, които имат еднакви маси, ще се движат с еднакви импулси p в същата посока, в която се е движил γ -квантът. От законите за запазване на енергията и импулса следват равенствата

$$E_\gamma + E_0 = 3E; \quad p_\gamma = 3p,$$

където E_γ и p_γ са енергията и импулсът на γ -кванта, E_0 и E са съответно енергията на покой и релативистката енергия на електрона (позитрона). Умножаваме второто равенство по скоростта на светлината c , вдигаме двете равенства на квадрат и от първото изваждаме второто. Получаваме:

$$(E_\gamma^2 - p_\gamma^2 c^2) + 2E_0 E_\gamma + E_0^2 = 9(E^2 - p^2 c^2).$$

Изразът в скобите в лявата страна на полученото равенство е нула ($p_\gamma = E_\gamma/c$), а отлясно е релативисткият инвариант за електрона, чиято стойност е E_0^2 . Следователно

$$E_{\text{пр}} = E_\gamma = 4E_0 = 2,04 \text{ MeV}.$$

В този случай праговата енергия на γ -кванта е два пъти по-голяма в сравнение със случая, когато електрон–позитронната двойка се ражда с участие на тежка частица (ядро или протон). Това е така, защото законите за запазване изискват поне половината от енергията на γ -кванта да премине в кинетична енергия на трите леки частици (два електрона и един позитрон), докато при участие на тежка частица почти цялата енергия на γ -кванта може да се преобразува в енергия на покой на получената двойка електрон–позитрон.

Електрон–позитронна аниhilация

Експериментално е наблюдаван и обратният процес: аниhilация (от лат. *аниhilatio* – унищожаване, изчезване) на електрон и позитрон, при който се раждат γ -кванти. Ще се спрем на най-простия случай, когато електронът и позитронът са неподвижни спрямо лабораторната отправна система. Преди аниhilацията импулсът на системата от две частици е нула. Законът за запазване на импулса изисква общият импулс на получените γ -кванти също да е нула. Това условие може да се изпълни само ако се получат два или повече γ -кванта. Да предположим, че се раждат два γ -кванта. Техният общ импулс е нула, ако имат еднаква енергия и се разпространяват в противоположни посоки. От закона за запазване на енергията следва, че енергията на γ -квантите е равна на

енергията на покой на електрона (позитрона), т.е. дължината на вълната на полученото в резултат на аниhilацията γ -излъчване трябва да е равна на комптъновата дължина за електрона. Този извод е потвърден експериментално с голяма точност.

Принцип на допълнителността

Фотоефектът, ефектът на Комптън, процесите на раждане и аниhilация на електрон–позитронни двойки са неопровержими експериментални доказателства за квантовата природа на светлината (лъчението). В тези явления светлината се проявява като поток от частици (фотони). От друга страна, многочислените опити по интерференция, дифракция и поляризация на светлината убедително показват, че тя е електромагнитна вълна. Освен това се доказва, че вълновите свойства на лъчението не могат да се разглеждат като проява на колективното движение на голям брой фотони, подобно например на звуковите вълни, на които съответства движение на голям брой частици на материална среда (газ, течност или твърдо тяло).

През 1927 година датският физик Нилс Бор (1885–1962) формулира общ *принцип на допълнителността*, според който получаването на информация за определени физични величини, характеризиращи микрочастиците или лъчението, неизбежно е свързано със загуба на информация за някои други величини, които са „допълнителни“ по отношение на първите. Така например в опитите, в които се получава информация за корпускулярните свойства на лъчението, се губи информацията за вълновите му свойства и обратно.

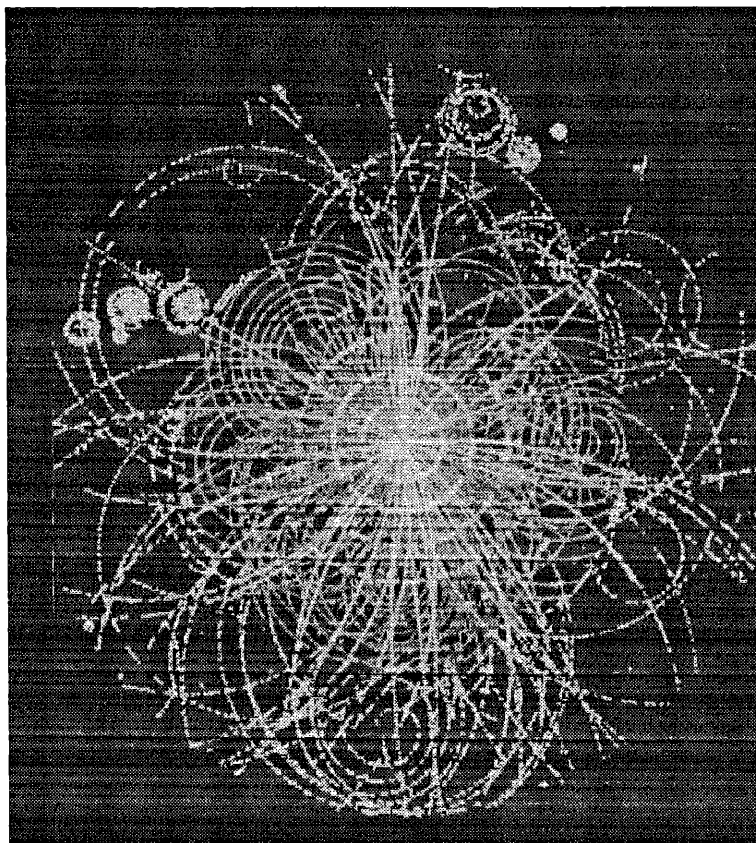
Излъчването, а както ще видим в следващата глава, и микрочастиците, едновременно съчетават свойствата на вълна и на частица. Тази двойственост вълна–частица изглежда логически противоречива от гледна точка на класическите представи, според които частиците се движат по определени траектории, а вълните представляват разпространение в пространството на изменения (трептене) на физични величини, характеризиращи някаква среда (вещество или електромагнитно поле).

Свойствата на класическите вълни и частици са несъвместими. Природата обаче е по-сложна и многообразна от нашите нагледни представи за нея. Затова, когато се опитваме да опишем свойствата на лъчението и микрочастиците с помощта на почерпените от всекидневния опит модели, налага се в едни случаи да ги разглеждаме като класически частици, а в други – като вълни. Съвременните физични теории – квантовата механика и квантовата теория на полето – преодоляват ограничеността на класическите представи за вълните и частиците. Те използват подходи, основани на специфичен математичен апарат, които не противопоставят, а съчетават корпускулярните и вълновите свойства.

Задачи

1. Фотон с дължина на вълната $\lambda = 0,0016 \text{ nm}$ се разсейва от неподвижен електрон. При какъв ъгъл на разсейване θ (за фотона) след разсейването електронът и фотонът имат еднаква кинетична енергия?
2. Гама-квант с енергия $E_\phi = 2E_0$ (E_0 – енергия на покой на електрона) се разсейва от неподвижен електрон. След разсейването γ -квантът и електронът се движат симетрично: под еднакъв ъгъл θ спрямо посоката на разпространение на падащия γ -квант. Определете: а) енергията на разсеяния γ -квант; б) ъгъла θ .
3. Фотон с дължина на вълната λ се разсейва от неподвижен електрон под ъгъл θ . Под какъв ъгъл ϕ (спрямо първоначалната посока на движение на фотона) започва да се движи електронът след разсейването?
4. Позитрон с кинетична енергия E_k анихилира в мишена, съдържаща електрони, които се приемат за неподвижни. В резултат на аниhilацията се създават два еднакви γ -кванта. Под какъв ъгъл θ спрямо посоката на движение на позитрона се разлитат двата γ -кванта?
5. Гама-квант с голяма енергия E_ϕ се разсейва от неподвижен електрон. При какви ъгли на разсейване θ след взаимодействие с веществото (с участие на тежка частица) разсеяният γ -квант може да породви двойка електрон–позитрон? Определете максималния ъгъл на разсейване θ_{max} , при който този процес е възможен за γ -квант с начална енергия E_ϕ , много по-голяма от енергията на покой на електрона E_0 .

Ядра и частици



Компютърна симулация на разпада-нето на хипотетич-ната частица Хигс бозон (програма ATLAS на Европей-ската лаборатория по физика на еле-ментарните частици (CERN) в Женева). Според теорията на Питър Хигс същест-вува т.нар. Хигс поле и свързана с него частица – Хигс бозон. Предполага се, че масата на по-кой на лептоните и кварките е следст-вие от тяхното вза-имодействие с Хигс полето. Хигс бозони биха могли да се регистрират при удар на два кварка със свръхвисоки енергии.

В тази глава ще се спрем накратко на вълновите свойства на микрочастиците, на строежа на атомното ядро, на явлениято радиоактивност и неговото практическо приложение. Ще разгледаме ядрените реакции на делене и синтез и тяхното значение за енергетиката. Накрая ще представим съвременната класификация на елементарните частици.

104. Вълнови свойства на частиците

Вълни на Дьо Бройл

В природата и в нейните закони съществува симетрия. След като светлината съчетава свойствата на вълна и на частица, не следва ли да се очаква, че подобна двойственост е присъща на електроните и на другите микрочастици? През 1923 година френският физик Луи Дьо Бройл (1892–1987) изказва смелата хипотеза, че всички форми на материята имат свойства както на частици, така и на вълни. Според хипотезата на Дьо Бройл, всяка частица, която се движи и има импулс с големина p , проявява свойствата на вълна с дължина на вълната

$$(104.1) \quad \lambda = \frac{h}{p},$$

където h е константата на Планк. Тези вълни се наричат *вълни на материята* или *вълни на Дьо Бройл*. Например дължината на вълната на Дьо Бройл на прашичка с маса $m = 1 \cdot 10^{-10}$ kg, която се движи със скорост $v = 1$ mm/s, е

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{(1 \cdot 10^{-10} \text{ kg})(0,001 \text{ m/s})} = 6,63 \cdot 10^{-21} \text{ m}. \end{aligned}$$

Получената стойност е около един милион пъти по-малка от радиуса на атомните ядра. Затова не съществува дифракционна решетка, от която да се наблюдава дифракция на подобни пращинки и да се потвърди експериментално хипотезата на Дьо Бройл. Микрочастиците – електрони, неутрони, атоми и др., обаче имат много по-малка маса m от макроскопичните тела. Затова тяхната дължина на вълната на Дьо Бройл λ е много по-голяма ($\lambda \propto 1/m$) и вълновите им свойства могат да се установят експериментално.

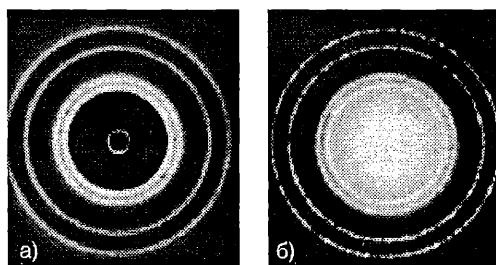
Опит на Дейвисън и Джермер

Както знаем, дължината на вълната на рентгеновите лъчи е сравнима с разстоя-

нията между атомите в кристалите. Затова кристалите са идеални дифракционни решетки за рентгеновите лъчи. От какво напрежение трябва да се ускори сноп от електрони, за да имат електроните същата дължина на вълната на Дьо Бройл, както рентгеновите лъчи, например 0,15 nm? Не е трудно да се пресметне (вж. пример 104.1), че електрони, ускорени от напрежение $U = 67$ V, имат дължина на вълната на Дьо Бройл $\lambda = 0,15$ nm.

През 1927 година американските физици Клинтън Дейвисън и Лестър Джермер изследват разсейването на „бавни“ електрони (ускорени от напрежение около 60 V) от никелова мишена, поставена във вакуум. Интересно е да се отбележи, че целта на експеримента не е била да се потвърди хипотезата на Дьо Бройл. Двамата изследователи регистрират отразените от мишената електрони върху фотоплака и с изненада откриват, че върху фотоплаката се наблюдава дифракционна картина, подобна на дифракционната картина, получена с рентгенови лъчи (фиг.104-1). По разположението на дифракционните максимуми те определят дължината на вълната и установяват, че тя съответства на дължината на вълната на Дьо Бройл $\lambda = h/p$ на електроните. Опитите на Дейвисън и Джермер показват, че електроните имат вълнови свойства и потвърждават хипотезата на Дьо Бройл. Скоро след това е наблюдавана дифракция на снопове от хелиеви ядра, водородни атоми и неутрони. Тези експерименти убедително доказват, че материята притежава вълнови свойства.

Фиг.104-1. Дифракционна картина от един и същ кристал, получена: а) с рентгенови лъчи; б) с електрони. Дължината на вълната на Дьо Бройл на електроните е равна на дължината на вълната на рентгеновите лъчи.



Пример 104.1. Колко волта ускоряващо напрежение U е необходимо, за да се получи електронен сноп с дължина на вълната на Дьо Бройл на електроните $\lambda = 0,15 \text{ nm}$? Зарядът на електрона е $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, а масата му е $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Решение. Кинетичната енергия на електроните е равна на работата на електричните сили:

$$\frac{mv^2}{2} = eU, \text{ откъдето изразяваме скоростта на}$$

$$\text{електроните } v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} \text{ и я заместваме във фор-}$$

мулата за дължината на вълната на Дьо Бройл

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \text{ Получаваме } \lambda = \frac{h}{\sqrt{2emU}}.$$

Повдигаме двете страни на това равенство на квадрат и изразяваме ускоряващото напрежение:

$$U = \frac{h^2}{2em\lambda^2} = 67 \text{ V}.$$

Пример 104.2. Определете дължината на вълната на Дьо Бройл на електрон, чиято кинетична енергия е равна на енергията на покой на електрона.

Решение. Електронът е релятивистки, затова във формулата за дължината на вълната на Дьо Бройл трябва да се постави релятивисткият импулс $p = \frac{1}{c} \sqrt{E_k(E_k + 2E_0)}$. В случая:

$$E_k = E_0 = m_e c^2,$$

където m_e е масата на покой на електрона. Импулсът на електрона е $p = \sqrt{3}m_e c$, а дължината на вълната на Дьо Бройл е

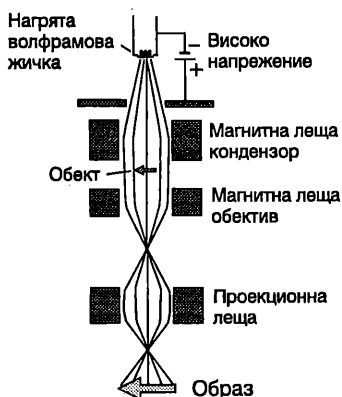
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{3}m_e c} \approx 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

да за тази цел са подходящи рентгеновите лъчи, но при конструирането на рентгенов микроскоп, подобен на оптичния, възникват непреодолими засега трудности. Проблемът е в това, че показателят на пречупване на всички вещества за рентгеновите лъчи е много близък до единица. Ето защо рентгеновите лъчи практически не се пречупват и отразяват от границата на две среди, което прави невъзможно изработването на необходимите за микроскопа рентгенови лещи. Затова вместо рентгенови лъчи се използват снопове от електрони, т.е. корпускуларни лъчения, с подходяща дължина на вълната на Дьо Бройл (по-малка от $0,1 \text{ nm}$). Електронните снопове се насочват и фокусират с помощта на електрични и магнитни полета. Съществуват електронни микроскопи с различна конструкция и предназначение: трансмисионни, сканиращи, отражателни, емисионни и др. Ще се спрем накратко само на първите два вида, тъй като с тях са снабдени много изследователски и производствени лаборатории у нас.

Образът в *трансмисионния* електронен микроскоп се създава по подобен начин както при оптичните микроскопи. В случая осветителната система се състои от нагрят до температура 2700°C волфрамов катод, излъчващ електрони, които се ускоряват от високо напрежение (фиг.104-2). Чрез магнитни лещи (кондензори) се формира електронен сноп с нужния интензитет и се фокусира върху обекта. Магнитна леща (обектив) създава първото увеличение, наречено междинно. Второто, крайно увеличение, се създава от проекционната леща. Магнитните лещи представляват намотки с ток, чието магнитно поле насочва и фокусира електроните. Образът в електронния микроскоп се получава поради нееднаквото разсейване на електроните от отделните участъци на обекта, тъй като има разлики в тяхната дебелина, маса и структура. Поради силното поглъщане електроните могат да преминават само през много тънки образци, което прави метода подходящ за изследване на тънки слоеве или специално подготвени отпечатъци (реплики) от повърхността на обемни материали. Увеличението на трансмисионните елек-

Електронен микроскоп

Оптичните микроскопи не са подходящи за изследвания на атомно равнище, тъй като поради явлениято дифракция с тях не могат да се наблюдават детайли от изследвания обект с размери, по-малки от дължината на вълната на използваното лъчение (около 500 nm за видимата светлина). Сред лъченията с електромагнитна приро-



Фиг.104-2. Принципна схема на електронен микроскоп.

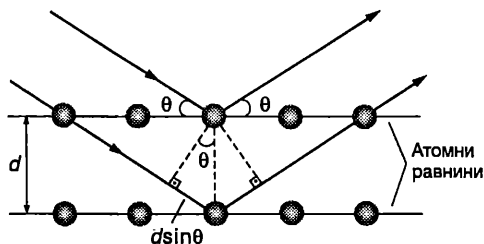
тронни микроскопи достига 10^6 пъти (около 1000 пъти по-голямо от оптичните микроскопи) и с тях се наблюдават детайли от обекта с размери до 0,2–0,5 nm. Теоретичните граници на увеличението, определени от дължината на вълната на Дьо Бройл на електроните, не могат да се достигнат поради някои ограничения във фокусирането на снопа, свързани с наличието на електрони с различни скорости.

Сканиращите електронни микроскопи се използват главно за изследване на повърхността на материалите. При тях много тесен електронен сноп обхожда (сканира) точка по точка изследваната повърхност. Разсеяните от отделните точки електрони са залавяват от колектор. Полученият от колектора ток се усилва и се подава на електроннолъчева тръба, където модулира интензитета на носещия електронен лъч и формира образа върху екрана.

Закон на Брег

Дифракцията на рентгенови лъчи, електрони или неутрони от кристали се характеризира с някои общи закономерности, които не зависят от вида на лъчението, а само от дължината на вълната λ . Просто и нагледно обяснение на дифракцията от кристал дава британският физик Уилям Брег (1890–1971). Той разглежда кристала като съставен от успоредни слоеве от атоми, наречени атомни равнини, които подобно на полупропускливи огледала само частично отразяват лъчението. Всяка атомна равнина огледално отразява мно-

го малка част от интензитета на падащата вълна, а общо отражението се извършва от голям брой равнини. Отразените вълни могат да се разглеждат като вторични вълни на Хюйгенс, които интерферират помежду си и формират дифракциралата от кристала вълна. Интензитетът на дифракциралата вълна е голям само при интерференчен максимум, т.е. когато отразените вълни взаимно се усилват. Да означим с d разстоянието между атомните равнини (фиг.104-3). Разликата в пътищата на два лъча, които се отразяват от съседни атомни равнини, е $\Delta r = 2d\sin\theta$. Тук θ е ъгълът, който лъчите сключват с равнина-



Фиг.104-3.

та (а не с нормалата, както е прието в оптиката). При интерференцията двете отразени вълни се усилват, ако разликата в пътищата им Δr е равна на цяло число m дължини на вълната λ :

$$(104.2) \quad 2d\sin\theta = m\lambda; \quad (m = 1, 2, 3...).$$

Това уравнение изразява закона на Брег за положението на дифракционните максимуми.

Задачи

1. Електронен сноп се ускорява от напрежение: а) 200 V; б) $2 \cdot 10^6$ V. Колко е дължината на вълната на Дьо Бройл на електроните?
2. При какви ъгли θ ще се наблюдава брегово отражение от семейство атомни равнини с разстояние между тях $d = 0,30$ nm? Кристалът се облъчва с електрони с дължина на вълната на Дьо Бройл $\lambda = 0,154$ nm.
3. Определете разстоянието d между успоредни атомни равнини, ако брегово отражение от първи порядък ($m = 1$) на електронен сноп с дължина на вълната на Дьо Бройл $\lambda = 0,128$ nm се наблюдава под ъгъл $\theta = 16^\circ$.

105. Принцип за неопределеност

При всички физични измервания се допуска грешка. Експериментаторът никога не може абсолютно точно да измери стойността на физичните величини – например координатата и импулса на една частица. Според класическата механика грешката при измерванията се дължи единствено на несъвършенството на измервателните уреди. Класическата механика по принцип допуска измервания с произволно голяма точност (стига да разполагаме с необходимите за целта уреди). Според квантовата теория обаче не е възможно положението и импулсът (скоростта) на една частица да се определят едновременно с произволно голяма точност. Това ограничение в точността не е свързано с несъвършенството на измервателните уреди, а има принципен характер. То отразява същността на квантовите обекти, които неразривно съчетават в себе си вълнови и корпускуларни свойства.

През 1927 година германският физик Вернер Хайзенберг (1901–1976) формулира следното твърдение, което днес е известно като *принцип за неопределеност* на Хайзенберг: Ако x -координатата на една частица е измерена с точност Δx и едновременно с това x -компонентата на импулса на частицата е измерена с точност Δp_x , то произведението от Δx и Δp_x никога не може да е по-малко от константата на Планк h , разделена на 2π :

$$(105.1) \quad \Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{2\pi} = \hbar.$$

Според принципа за неопределеност природата на квантовите обекти е такава, че е невъзможно едновременно да се определи точното положение и точният импулс на една частица. Когато неопределеността Δx на координатата е много малка, тогава неопределеността Δp_x на импулса е голяма и обратно. Аналогични неравенства $\Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{2\pi}$ и $\Delta z \Delta p_z \geq \frac{h}{2\pi}$ са в сила за y - и z -компонентите.

Мислен опит на Хайзенберг

За да обясни нагледно смисъла на принципа за неопределеност, Хайзенберг разглежда следния мислен опит. Електрон се наблюдава с помощта на „идеален“ микроскоп. Микроскопът е толкова съвършен, че за определяне положението на електрона е достатъчно само един фотон да се отрази (удари) от електрона и през микроскопа да попадне в окото на наблюдателя (фиг.105-1). Преди удара фотонът има импулс $p = E_\phi/c = h\nu/c = h/\lambda$. При удара той предава неизвестна част от импулса си на електрона и x -компонентата на импулса на електрона се променя. Така след удара възниква неопределеност в импулса на електрона, която е от порядъка на импулса на падащия фотон: $\Delta p_x = h/\lambda$. От друга страна, тъй като светлината притежава вълнови свойства, точността, с която може да се определи положението на електрона, е приблизително равна на дължината на вълната на използваното лъчение, т.е. $\Delta x = \lambda$. За да се намали неопределеността в координатата Δx , трябва да се използва лъчение с много малка дължина на вълната λ – например γ -лъчи. Гама квантите обаче имат много голям импулс, поради което неопределеността в импулса на електрона след удара $\Delta p_x = h/\lambda$ нараства. Обратно, ако се използва лъчение с голяма дължина на вълната (например видима светлина), тогава неопределеността в импулса на електрона ще е малка, но за сметка на това неговото положение ще е определено твърде неточно. Като се умножат двете неопределености, се получава

$$\Delta x \Delta p_x = \lambda \left(\frac{h}{\lambda} \right) = h.$$

Фиг.105-1. Мислен опит на Хайзенберг.



По-прецизният анализ, основан на законите на квантовата механика, показва, че произведението на неопределеностите $\Delta x \Delta p_x$ удовлетворява неравенството (105.1).

Пример 105.1. С помощта на принципа за неопределеност оценете енергията на основното състояние и размера на водородния атом.

Решение. Принципът за неопределеност се използва за приблизителна оценка на стойностите на някои величини, характеризиращи микрочастиците. Това става по следния начин:

1. Когато движението на частицата е ограничено в определена област от пространството (казва се, че частицата е локализирана в тази област), неопределеността в положението на частицата се приема за равна на размера на областта на локализиция (например на радиуса r на областта, когато тя е сферична).

2. Неопределеността в импулса се приема за минимална възможна стойност на самия импулс на частицата.

3. В неравенство (105.1), изразяващо принципа за неопределеност, се замества $\Delta x = r$, $\Delta p_x = p$ и знакът за неравенство се заменя със знак за равенство: $rp = h/2\pi$.

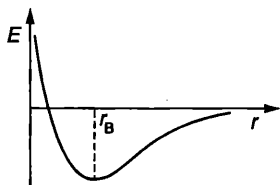
4. В основното състояние енергията на частицата (или на системата от частици) има минимум. Определя се пълната енергия E (кинетична енергия + потенциална енергия), отчита се връзката между r и p , произтичаща от принципа за неопределеност, намира се минимумът на получената функция $E(r)$ и се пресмятат търсените величини.

В конкретния случай r е радиусът на водородния атом. Енергията на атома е

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

където първият член в дясната страна на равенството е кинетичната енергия на електрона, а вторият – потенциалната енергия на кулоновото взаимодействие между електрона и ядрото (протона). С помощта на принципа за неопределеност изразяваме импулса p на електрона, $p = h/2\pi r$, и го заместваме в уравнението за енергията. Получаваме

Фиг.105-2.



$$E(r) = \frac{h^2}{8\pi^2 m r^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Графиката на функцията $E(r)$ е показана на фиг.105-2. За да определим минимума на функцията $E(r)$, намираме нейната първа производна и я приравняваме на нула, т.е.

$$\frac{dE}{dr} = -\frac{h^2}{4\pi^2 m r^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0,$$

откъдето определяме радиуса r_B (радиус на Бор) на орбитата на електрона, когато водородният атом се намира в основното си състояние, т.е. в състояние с минимална енергия:

$$r_B = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 0,053 \text{ nm}.$$

Заместваме r_B във формулата за пълната енергия $E(r)$ на атома и определяме енергията на основното състояние

$$E = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} = -13,6 \text{ eV}.$$

В този случай направената оценка с помощта на принципа за неопределеност дава точния резултат за енергията на основното състояние на водородния атом, който се получава по методите на квантовата механика.

Задачи

1. В мисления опит на Хайзенберг се използват рентгенови лъчи, за да се определи положението на електрон с точност $\Delta x = 1.10^{-11} \text{ m}$. С каква точност може да се определи скоростта на електрона при подобен опит?

2. Мишокът Мики живее във вълшебен свят, за който константата на Планк има стойност $h_M = 2\pi \text{ J}\cdot\text{s}$. Може ли Мики да спи спокойно в дупката си? Колко е минималната му скорост, ако дупката е с радиус $r = 10 \text{ cm}$? Масата на Мики е $m = 0,02 \text{ kg}$.

3. Оценете минималните стойности на импулса p , скоростта v и кинетичната енергия E_k на неутрон, намиращ се в ядро с радиус $r = 2.10^{-15} \text{ m}$.

4. С помощта на принципа за неопределеност оценете минималната енергия на квантовомеханичен осцилатор. Разгледайте частица с маса m , която извършва хармонично трептене

по оста x с кръгова честота $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Потенциалната енергия на частицата се изменя по закона $U(x) = kx^2/2$.

106. Атомно ядро

Състав на атомното ядро

Ядрата са изградени от протони и неутрони, които се наричат с общото име *нукло-ни*. Протоните са носители на елементарен положителен заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C, а неутроните са електроненутрални. Ядрата се характеризират с:

- атомен номер Z , който е равен на броя на протоните в ядрото;
- брой на неутроните N ;
- масово число $A = Z + N$.

За представяне на ядрата се използва символа A_ZX , където X е знакът на химичния елемент, A – масовото число, а Z – атомният номер. Например ${}^{12}_6C$ е ядро на химичния елемент въглерод (C) с масово число $A = 12$, със $Z = 6$ протона и $N = A - Z = 12 - 6 = 6$ неутрона.

Атомите на един и същ химичен елемент, които имат в ядрата си различен брой неутрони, се наричат *изотопи*. Всеки химичен елемент има по няколко изотопа. Например изотопите на водорода са три: водород 1_1H , деутерий 2_1H и тритий 3_1H .

Масата на ядрата се измерва в *атомни единици за маса* u . По определение една атома единица за маса ($1 u$) е равна на $1/12$ от масата на изотопа ${}^{12}_6C$:

$$1 u = 1,660\,540 \cdot 10^{-27} \text{ kg.}$$

Таблица 106.1. Маса на някои частици и атоми, изразени в атомни единици за маса u .

Частица (атом)	Маса, u
Електрон	0,0005486
Протон	1,0072765
Неутрон	1,0086652
Водород (1_1H)	1,0078252
Деутерий (2_1H)	2,0141022
Тритий (3_1H)	3,0160497
Хелий (3_2He)	3,0160297
Хелий (4_2He)	4,0026032
Въглерод (${}^{12}_6C$)	12
Азот (${}^{14}_7N$)	14,003074

Експерименталните изследвания показват, че повечето ядра имат приблизително сферична форма. Техният радиус може да се пресметне по формулата

$$(106.1) \quad r = r_0 A^{\frac{1}{3}},$$

където A е масовото число, а r_0 е константа, равна на $1,2 \cdot 10^{-15}$ m.

Пример 106.1. Определете плътността на атомните ядра.

Решение. Масата на протона е приблизително равна на масата на неутрона: $m_p = m_n = m$. Ядро с масово число A има маса Am . Обемът

на ядрото е $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 A$, където е отчетено равенство (106.1). Плътността на ядрото е

$$\rho = \frac{mA}{V} = \frac{3m}{4\pi r_0^3} = 2,3 \cdot 10^{17} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Следователно плътността на атомното ядро е $2,3 \cdot 10^{14}$ пъти по-голяма от плътността на водата ($1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$).

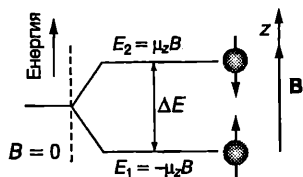
Ядрен магнитен резонанс

Както беше отбелязано в §69 (на стр.110), протоните и неутроните, подобно на електроните, също имат собствени (спинови) магнитни диполни моменти. Диполният магнитен момент на атомното ядро е векторна сума от магнитните диполни моменти на съставлящите го нуклони. Магнитният момент на ядрото се измерва в *ядрени магнетони*. Ядреният магнетон μ_n се дефинира по аналогичен начин, както магнетонът на Бор за електрона (вж. формула (69.6) на стр.110):

$$(106.2) \quad \mu_n = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{\text{J}}{\text{T}},$$

където m_p е масата на протона. Ядреният магнетон μ_n е близо 2000 пъти по-малък от магнетона на Бор μ_B за електрона поради голямата разлика в масите на протона и електрона.

Да разгледаме най-простото ядро (на водорода), което е съставено само от един протон. На *фиг.106-1* схематично е показан протон, който се намира в постоянно



Фиг.106-1.

магнитно поле с индукция B . Както при електрона, собственият магнитен момент μ на протона също се квантува: неговата проекция μ_z може да е насочена по посока на магнитното поле ($+\mu_z$) или в противоположната посока ($-\mu_z$). Всеки магнитен дипол, който се намира във външно магнитно поле, има допълнителна магнитна енергия $-\mu_z B$. Когато проекцията на магнитния диполен момент на протона е насочена по посока на магнитното поле B , неговата магнитната енергия е отрицателна ($-\mu_z B$), а в противоположния случай тя е положителна ($\mu_z B$). Следователно във външно магнитно поле протонът може да се намира в две енергетични състояния (фиг.106-1), разликата в енергията на които е $\Delta E = E_2 - E_1 = 2\mu_z B$. Протонът може да преминава от състояние E_1 в състояние E_2 като поглъща фотони с енергия $h\nu_0$, равна на енергията на прехода

$$(106.3) \quad h\nu_0 = \Delta E = 2\mu_z B.$$

Такова резонансно поглъщане от атомните ядра на електромагнитни кванти с определена енергия се нарича *ядрен магнитен резонанс*, а честотата ν_0 на поглъщаното лъчение – *резонансна честота*. Резонансната честота, която обикновено е от радио диапазона, зависи както от индукцията B на постоянното магнитно поле, така и от диполния магнитен момент на ядрото. Като се измерят резонансните честоти, могат се определят магнитните диполни моменти и по тях да се идентифицират изследваните ядра. Например по метода на ядрения магнитен резонанс за магнитния диполен момент на свободния протон е получена стойността $2,792845\mu_n$.

На явлениято ядрен магнитен резонанс се основава една от най-съвременните техники за медицинска диагностика, наречена MRI (magnetic resonance imaging). Пациентът се поставя в голям свръхпроводящ соленоид, който създава силно

постоянно магнитно поле, чиято магнитна индукция е различна в различните точки от пространството. Поради градиента на магнитното поле протоните на водородните атоми от различните части от тялото на пациента имат различни резонансни честоти на поглъщане ν_0 . По този начин чрез точното измерване стойността на ν_0 може много прецизно да се определи местоположението на поглъщащите протони. Информацията се обработва от компютър, който пресъздава образа на изследвания орган на пациента. Освен високата разделителна способност, даваща възможност да се наблюдават малки детайли от изследваните органи, методът има и това голямо предимство, че е безвреден за пациента. Поглъщаното електромагнитно лъчение е от радиочастотния диапазон и не причинява увреждания на живите клетки.

Стабилност на атомните ядра

Стабилни са ядрата, които съществуват неограничено дълго време, ако не са подложени на външно въздействие. Нестабилните ядра спонтанно (без външно въздействие) се разпадат и изпускат частици. Това явление се нарича *радиоактивност*. Съществуват около 400 стабилни ядра и още стотици други ядра, които са нестабилни. Наблюдават се следните закономерности:

1. Ядрата с малък атомен номер Z са най-стабилни, когато броят на неутроните в тях е равен на броя на протоните: $N = Z$.
2. Стабилните ядра с голям атомен номер имат повече неутрони, отколкото протони.

3. Всички ядра с повече от 83 протона са нестабилни.

Интересно е да се отбележи, че повечето стабилни ядра имат четна стойност на масовото число A . При определени стойности на Z и N , наречени *магически числа*, ядрата се отличават с особено голяма стабилност. Магическите числа са Z (или N) = 2, 8, 20, 28, 50, 82 и 126 (126 е само за неутроните).

Например хелиевите ядра ${}^4_2\text{He}$, за които $Z = N = 2$, са изключително стабилни. Съществуването на магически числа на-

вежда на мисълта, че ядрото, подобно на електронната обвивка на атома, има слоеста структура. Така както най-стабилни са атомите на инертните газове, чиито електронни слоеве са изцяло запълнени, по подобен начин ядрата с изцяло запълнени нуклонни слоеве също са най-стабилни. (Съществуват отделни слоеве за протоните и неутроните, които се запълват независимо.)

Ядрени сили

Стабилността на атомните ядра се обяснява с действието на ядрените сили. Експериментално са установени основните свойства на ядрените сили:

1. От съществуването на стабилни ядра следва, че ядрените сили компенсират електричното отблъскване между протоните, т.е. те са сили на привличане. Когато броят на протоните в ядрото нараства, нараства и електричното отблъскване между тях, което се стреми да разцепи ядрото. За да се запази стабилността на ядрото, е необходим по-голям брой неутрони, тъй като на неутроните действат само ядрени сили на привличане. Това качествено обяснява защо стабилните ядра с голям атомен номер имат повече неутрони, отколкото протони. При много малки разстояния между нуклоните обаче силите на привличане се сменят с ядрени сили на отблъскване.

2. Ядрените сили не зависят от електричния заряд на нуклоните. Положително заредените протони и незаредените неутрони взаимодействат с еднакви сили.

3. Ядрените сили се насищат. Всеки нуклон взаимодейства само със своите съседи. Това показва, че ядрените сили много бързо намаляват с разстоянието между нуклоните. На малки разстояния ядрените сили са значително по-големи от електричните сили.

4. Ядрените сили зависят от взаимната ориентация на спиновете на нуклоните.

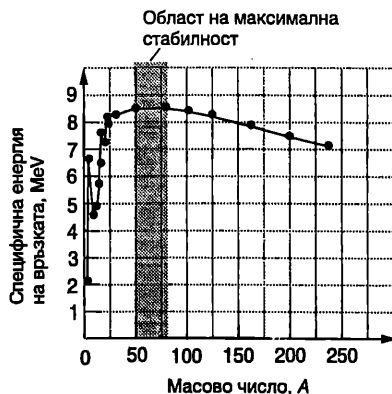
Енергия на връзката

За разделянето на частици, които взаимодействат със сили на привличане и образуват свързана система, е необходимо външни сили да извършат положителна

работа, т.е. трябва да се изразходва определена енергия. Например за откъсване на електрона от водородния атом са нужни 13,6 eV енергия. Енергията, необходима за разделянето на атомното ядро на отделни неподвижни протони и неутрони, които не взаимодействат помежду си, определя т. нар. *енергия на връзката* ΔE на атомното ядро. Стойността ѝ се измерва в мегаелектронволти (MeV). Тя зависи от броя на нуклоните в ядрото. Енергията на връзката за един нуклон, т.е. отношението $\Delta E/A$, се нарича *специфична енергия на връзката*. На *фиг.106-2* графично е представена зависимостта на специфичната енергия на връзката от масовото число A за стабилните ядра. Обърнете внимание, че с изключение на най-леките ядра, средната стойност на специфичната енергия на връзката е около 8 MeV. Стойността на $\Delta E/A$ е максимална за ядрата с масово число около $A = 60$. Това означава, че тези ядра са най-стабилни – техните нуклони са свързани най-здраво.

Слабата зависимост на специфичната енергия на връзката от масовото число се обяснява със свойството на ядрените сили да се насищат: даден нуклон не взаимодейства с всички останали нуклони в ядрото, а само с ограничен брой свои най-близки съседи. (Ако ядрените сили не се насищаха, специфичната енергия на връзката щеше да е правопрпорционална на масовото число A .)

Фиг.106-2. Зависимост на специфичната енергия на връзката на стабилните атомни ядра от тяхното масово число.



Масов дефект

Съгласно с теорията на относителността (вж. §99) всяко тяло с маса на покой m_0 притежава енергия на покой $E_0 = m_0 c^2$, където c е скоростта на светлината във вакуум. За да се разложи на отделни нуклони, атомното ядро трябва да получи допълнителна енергия. Следователно свободните нуклони имат по-голяма енергия на покой и по-голяма маса, отколкото същите нуклони, свързани в ядро. Разликата между сумата от масите на изходните свободни протони и неутрони и масата на ядрото се нарича *масов дефект* и се означава с Δm . Енергията, съответстваща на масовия дефект, т.е. на намаляването на масата при свързването на нуклоните в ядро, е енергията на връзката ΔE . Съгласно с формулата на Айнщайн $E_0 = m_0 c^2$ енергията на връзката и масовият дефект са свързани със съотношението

$$(106.4) \quad \Delta E = \Delta m c^2.$$

Енергията на връзката е равна на произведението на масовия дефект и квадрата на скоростта на светлината във вакуум.

Пример 106.2. Колко мегаелектронволта е енергията на покой на частица с маса $m_0 = 1 \text{ u} = 1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$?

Решение. Най-напред от формулата на Айнщайн пресмятаме енергията на покой, изразена в джаули:

$$E_0 = m_0 c^2 =$$

$$(1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg})(2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 1,4924 \cdot 10^{-10} \text{ J}.$$

Като отчетем, че $1 \text{ MeV} = 1 \cdot 10^6 \text{ eV} = 1,6022 \cdot 10^{-13} \text{ J}$, получаваме

$$E_0 = (1,4924 \cdot 10^{-10} \text{ J}) \frac{1 \text{ MeV}}{1,6022 \cdot 10^{-13} \text{ J}} = 931,5 \text{ MeV}.$$

Следователно на една атомна единица за маса съответства енергия на покой

$$(1 \text{ u})c^2 = 931,5 \text{ MeV}.$$

По-нататък ще използваме този резултат при решаването на задачи.

Пример 106.3. Колко мегаелектронволта е енергията на връзката на хелиевото ядро ${}^4_2\text{He}$?

Решение. Масата на хелиевия атом вземаме

от табл.106.1 на стр.264. Масата на хелиевото ядро $m_{\text{я}}$ се получава като от масата на хелиевия атом $m_{\text{а}}$ се извади масата на двата електрона $2m_{\text{е}}$, които има този атом:

$$m_{\text{я}} = m_{\text{а}} - 2m_{\text{е}} =$$

$$4,0026032 \text{ u} - 2(0,0005486 \text{ u}) = 4,001506 \text{ u}.$$

Масовият дефект е

$$\Delta m = 2m_{\text{p}} + 2m_{\text{n}} - m_{\text{я}} = 2(1,0072765 \text{ u}) + 2(1,0086652 \text{ u}) - 4,001506 \text{ u} = 0,0303774 \text{ u}.$$

Енергията на връзката се пресмята по формулата

$$\Delta E = \Delta m c^2 =$$

$$= (0,0303774 \text{ u})(931,5 \text{ MeV/u}) = 28,30 \text{ MeV},$$

където сме отчели, че $(1 \text{ u})c^2 = 931,5 \text{ MeV}$ или $c^2 = 931,5 \text{ MeV/u}$.

Задачи

1. Колко протона и колко неутрона съдържа ядрото ${}^{56}_{26}\text{Fe}$? Колко електрона има неутралният атом на желязото? Различават ли се неутралните атоми на различните изотопи на даден химичен елемент по броя на електроните си?

2. За разделяне на ядрото ${}^{62}_{28}\text{Ni}$ на отделни нуклони е необходима енергия 546 MeV. Колко е специфичната енергия на връзката на това ядро?

3. Енергията на връзката за ядрото ${}^{19}_9\text{F}$ е 147,8 MeV. Колко е масовият дефект?

3. Пресметнете енергията на връзката за деутерия.

4. Пресметнете специфичната енергия на връзката за ядрото ${}^{12}_6\text{C}$.

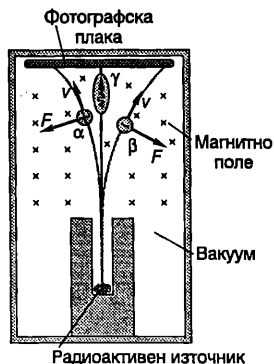
5. Две ядра с еднакво масово число A се наричат огледални, ако броят на протоните в едно ядро е равен на броя на неутроните в другото ядро и обратно. Сравняването на енергията на връзката на две огледални ядра служи за доказателство, че ядрените сили не зависят от заряда на нуклоните. Чрез непосредствено пресмятане докажете, че разликата в енергията на връзката на огледалните ядра ${}^3_1\text{H}$ и ${}^3_2\text{He}$ (вж. табл.106.1) е равна на енергията на електростатично отблъскване на двата протона в хелиевото ядро.

Указание. При пресмятането на електростатичната потенциална енергия приемете двата протона за точкови заряди, отдалечени един от друг на разстояние r , равно на радиуса на атомното ядро.

107. Радиоактивност

През 1896 г. френският физик Анри Бекерел (1852–1908) случайно поставя в затъмнено помещение късчета уранова руда върху увита в плътна черна хартия фотографска плака. След промиване на плаката се оказва, че тя е почерняла на местата, където е лежала рудата. Това означава, че рудата изпуска спонтанно, т.е. без външно въздействие, някакви невидими лъчи. По-нататъшните опити показват, че тези лъчи имат голяма енергия и проникваща способност. Те могат да предизвикат йонизация на молекулите на въздуха и да разредят зареден електроскоп. Откритото от Бекерел спонтанно излъчване на урана е било наречено радиоактивност. Скоро след това съпрузите Мария и Пиер Кюри откриват в урановата руда два неизвестни дотогава химични елемента, които много по-интензивно от урана изпускат лъчи. Единият от тях е наречен полоний (Po) – в чест на родината на Мария Кюри – Полша, а другият – радий (Ra), което означава лъчист.

Радиоактивно излъчване се получава при спонтанното разпадане на нестабилните атомни ядра, които е прието да се наричат *радионуклиди*. Лъчите, които могат да се излъчат от радиоактивните ядра, са три вида: алфа (α) лъчи – поток от хелиеви ядра ${}^4_2\text{He}$, бета (β) лъчи – поток от електрони (β^-) или от позитрони (β^+); гама (γ) лъчи – фотони с голяма енергия. Радиоактивните лъчения са невидими за човешкото око, но могат да се разделят и регистрират например с опита, показан на *фиг. 107-1*. Радиоактивно вещество (например радий Ra), излъчващо и трите вида лъчи, се поставя на дъното на оловен контейнер, който поглъща радиоактивното лъчение. През тесния канал на контейнера излиза сноп от лъчи и се насочва перпендикулярно на индукционните линии на еднородно магнитно поле. В магнитното поле снопът се разделя на три части: две от тях се отклоняват в противоположни посоки, а третата не променя посоката си на разпространение. От опита следва изводът, че снопът, който не се отклонява в маг-



Фиг. 107-1.

нитно поле, е съставен от електронейтрални частици (γ -лъчи). Наляво се отклоняват частиците с положителен заряд (α -частиците), а надясно – частиците с отрицателен заряд (β -частиците, т.е. електроните).

Трите вида радиоактивни лъчения имат твърде различна проникваща способност: α -лъчите трудно преминават през лист хартия, β -лъчите могат да изминат няколко милиметра в алуминий, а за да се осигури надеждна защита от γ -лъчите е необходима оловна преграда с дебелина няколко сантиметра.

Закон за радиоактивното разпадане

В препарат, съдържащ радиоактивно вещество, има голям брой нестабилни ядра. Независимо че всички ядра са еднакви, някои от тях се разпадат почти веднага, а други „живеят“ дълго. Разпадането на едно или друго ядро е случаен процес, който се характеризира с определена вероятност. По определение вероятността за разпадане λ е равна на броя на ядрата $-dN$ (знакът минус отчита, че в резултат на разпадането броят на радиоактивните ядра намалява, т.е. $dN < 0$), които се разпадат за малък интервал от време dt , разделен на началния брой на ядрата N и на интервала dt :

$$(107.1) \quad \lambda = \frac{-dN}{Ndt}.$$

Опитът показва, че вероятността λ не зависи от външните условия (температура, налягане и др.) и е характерна за дадения радиоактивен изотоп константа, която се нарича *константа на разпадане* λ .

Записваме уравнение (107.1) във вида

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt,$$

интегрираме това диференциално уравнение и получаваме

$$\int_{N_0}^N \frac{dN}{N} = -\int_0^t \lambda dt; \quad \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda t;$$

$$(107.2) \quad N = N_0 e^{-\lambda t},$$

където N_0 е броят на радиоактивните ядра в началния момент $t = 0$. Уравнение (107.2) изразява *закона за радиоактивното разпадане*: броят на радиоактивните ядра намалява по експоненциален закон с течение на времето (фиг.107-2).

Активност

Отношението $(-dN)/dt$ на броя на ядрата $-dN$, които се разпадат за малък интервал от време dt , към големината на интервала dt , се нарича *активност* A на радиоактивния препарат. Съгласно с уравнение (107.1) активността A на препарат, съдържащ N на брой радиоактивни ядра с константа на разпадане λ , е

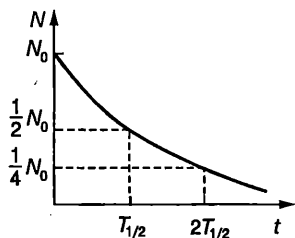
$$(107.3) \quad A = \frac{-dN}{dt} = \lambda N.$$

Единицата за активност в SI се нарича *бекерел* (Bq). Активността на даден радиоактивен препарат е един бекерел, ако в него за една секунда се разпада едно ядро:

$$1 \text{ Bq} = 1 \frac{\text{разпадане}}{\text{секунда}}, \text{ т.е. } 1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}.$$

Освен бекерелът, в практиката често се използва извънсистемната единица за активност *кюри* (Ci). Активността на един радиоактивен препарат е 1 Ci, ако за една секунда в него се разпадат толкова ядра,

Фиг.107-2. Закон за радиоактивното разпадане.



колкото се разпадат за същото време в 1 g радий:

$$1 \text{ Ci} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}.$$

Период на полуразпадане

Устойчивостта на ядрата на разпадане се характеризира с величината *период на полуразпадане* $T_{1/2}$. По определение период на полуразпадане $T_{1/2}$ на даден вид радиоактивни ядра е времето, за което се разпадат половината ядра от този вид, намиращи се в даден препарат. Заместяваме $t = T_{1/2}$ и $N = N_0/2$ в закона за радиоактивното разпадане (107.2) и получаваме

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\lambda T_{1/2}}.$$

Записваме това равенство във вида $e^{\lambda T_{1/2}} = 2$, логаритмуваме двете му страни и получаваме връзката между периода на полуразпадане $T_{1/2}$ и константата на разпадане λ :

$$(107.4) \quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}.$$

Периодите на полуразпадане на различните радиоактивни ядра се намират в много широки граници. Например докато за изотопа на полония $^{212}_{84}\text{Po}$ периодът на полуразпадане е само $3 \cdot 10^{-7} \text{ s}$, за разпадането на половината от ядрата на изотопа на неодима $^{144}_{60}\text{Nd}$ са необходими цели $5 \cdot 10^{15}$ години – около 300 000 пъти повече от възрастта на Вселената!

Пример 107.1. Радиоактивен източник, изготвен от изотопа ^{60}Co , има активност $A = 2 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$. Колко милиграма ^{60}Co се съдържат в този източник? Периодът на полуразпадане на кобалта е $T_{1/2} = 5,26$ години.

Решение. От уравнения (107.3) и (107.4) представяме активността на източника чрез периода на полуразпадане:

$$A = \frac{0,693}{T_{1/2}} N, \text{ откъдето}$$

изразяваме броя N на радиоактивните атоми

$$N = \frac{AT_{1/2}}{0,693}.$$

Масата на радиоактивното вещество е

$$m = \frac{N}{N_A} M = \frac{AT_{1/2}}{0,693N_A} M,$$

където $M = 0,060 \text{ kg/mol}$ е моларната маса на кобалта. След заместване на числените стойности получаваме

$$m = \frac{(2 \cdot 10^{10} \text{ Bq})(1,66 \cdot 10^{-27} \text{ s})}{0,693(6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1})} (0,060 \frac{\text{kg}}{\text{mol}}) = 0,48 \text{ mg}.$$

Датиране с въглерод-14.

Радиоактивният изотоп $^{14}_6\text{C}$ (въглерод-14), чийто период на полуразпадане е 5730 години, се създава в горните слоеве на атмосферата под действие на космичните лъчи. Установено е, че концентрацията му във въглеродния диоксид от земната атмосфера не се е изменила в продължение на хилядолетия. (На всеки $8 \cdot 10^{11}$ молекули CO_2 със стабилния изотоп $^{12}_6\text{C}$ се пада средно по една молекула CO_2 с $^{14}_6\text{C}$.) Във всички живи организми съотношението между двата изотопа е същото, както в атмосферата, защото при жизнените процеси непрекъснато се обменя въглерод с околната среда. Когато обаче организъм умре, този обмен се прекратява и броят на ядрата $^{14}_6\text{C}$, които са се съдържали в него, започва да намалява в съответствие със закона за радиоактивното разпадане. По броя на останалите неразпаднали се ядра може приблизително да се определи датата на смъртта на съответния организъм. С помощта на въглеродния метод в археологията се определя възрастта на останки от дърво, кости и черупки, принадлежащи на растителни и животински видове, живели преди хиляди години.

Пример 107.2. В руините на древен град са намерени дървени предмети, в които концентрацията на $^{14}_6\text{C}$ е 2,5 пъти по-малка, отколкото в наскоро отрязано дърво. Определете възрастта на предметите. Периодът на полуразпадане на $^{14}_6\text{C}$ е $T_{1/2} = 5730$ години.

Решение. От закона за радиоактивното разпадане следва, че $N_0/N = e^{\lambda t} = 2,5$. Логаритмуваме двете страни на това равенство и като отчетем, че $\lambda = \ln 2/T_{1/2}$, за възрастта t на пред-

метите получаваме

$$t = \frac{\ln 2,5}{\lambda} = \frac{\ln 2,5}{\ln 2} T_{1/2} = 7570 \text{ години}.$$

Биологично действие на йонизиращите лъчения

Радиоактивните лъчения, рентгеновите лъчи, протонните и неутронните лъчения с голяма енергия предизвикват йонизация на атомите и молекулите и увреждат клетките на живите организми. Лъчевите увреждания се разделят на две групи: 1. засягащи самия облъчен индивид; 2. генетични (или наследствени), отнасящи се за поколенията. Пораженията зависят от продължителността на облъчването и от количеството погълната радиация, наречено *погълната доза*. Погълнатата доза D е равна на отношението на погълнатата енергия dE от елемент от облъчваното вещество към масата dm на този елемент:

$$(107.5) \quad D = \frac{dE}{dm}.$$

В SI единицата за погълната доза се нарича *грей* (Gy). Погълната доза е един грей, ако в един килограм от облъченото вещество се поглъща йонизиращо лъчение с енергия един джаул:

$$1 \text{ Gy} = 1 \text{ J/kg}.$$

Когато йонизиращото действие на лъчението (главно на рентгеновите лъчи, γ -лъчите и неутроните) се проявява индиректно – йонизация предизвикват освободените от лъчението във веществото заредени частици, тогава погълнатата радиация се характеризира с величината *керма*. (Името керма произтича от началните букви на английския израз „Kinetic Energy Released in Matter“). Керма K е отношението на сумата от кинетичните енергии dE_k на всички частици с електричен заряд, произведени от лъчението в елемент от веществото, към масата dm на този елемент:

$$(107.6) \quad K = \frac{dE_k}{dm}.$$

Погълнатата доза и кермата се измерват в едни и същи единици – грей.

При една и съща погълната доза био-

логичният ефект от облъчването зависи от вида на лъчението и от неговата енергия. Количествена мярка за очакваната радиационна опасност при облъчване на живи организми е величината *еквивалентна доза* H . По определение еквивалентната доза H и погълнатата доза D са свързани със съотношението

$$(107.7) \quad H = kD,$$

където k е безразмерен коефициент, наречен *качествен фактор*. Качественият фактор k е произведение от няколко множителя, които изразяват влиянието на различни фактори върху ефекта от облъчването на даден организъм или орган.

Еквивалентната доза се измерва с единицата *сиверт* (Sv):

$$1 \text{ Sv} = 1 \text{ J/kg}.$$

Еквивалентна доза един сиверт (1 Sv) от което и да е йонизиращо лъчение предизвиква същия биологичен ефект, както погълната доза един грей (1 Gy) от лъчение с качествен фактор $k = 1$. Например за β -частиците $k = 1$, докато за α -частиците $k = 15$. Това означава, че на погълната доза 1 Gy β -лъчение съответства 1 Sv еквивалентна доза, докато еквивалентната доза, съответстваща на 1 Gy α -лъчение, е 15 Sv, т.е. радиационната опасност от α -лъчението е много по-голяма.

Поради естествения радиоактивен фон, създаден от космичното лъчение и радиоактивността на околната среда, средната еквивалентна доза, която човешкият организъм поглъща за една година, е около $1,5 \cdot 10^{-3}$ Sv. Съгласно с международните стандарти за радиационна безопасност максималната допустима годишна еквивалентна доза за лица, работещи с радиоактивни източници, е $50 \cdot 10^{-3}$ Sv. За бозайниците и птиците еквивалентна доза 10 Sv е смъртоносна, докато за унищожаване на някои вируси са необходими над 10 000 Sv.

Пример 107.3. При погълната доза 100 Gy клетките на живата тъкан напълно се увреждат. С колко градуса се повишава температурата на тъканта, ако цялата погълната енергия се превръща в топлина? Приемете, че тъканите имат същия специфичен топлинен капацитет,

както водата: $c = 4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$.

Решение. При погълната доза $100 \text{ Gy} = 100 \text{ J/kg}$ количеството топлина, което се отделя в единица маса от поглъщащото вещество, е $Q/m = 100 \text{ J/kg}$. Количеството топлина Q , необходимо за повишаване с ΔT температурата на вещество с маса m , е $Q = cm\Delta T$. Следователно

$$\Delta T = \frac{1}{c} \frac{Q}{m} = \frac{1}{4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}} (100 \text{ J/kg}) = 0,024 \text{ K} = 0,024 \text{ } ^\circ\text{C}.$$

Толкова малко изменение на температурата не би предизвикало никакъв ефект, ако беше постигнато чрез топлообмен. Радиацията е опасна за живите клетки, защото погълнатата енергия не се разпределя равномерно между всички атоми и молекули. Само отделни водни или биологични молекули в клетката поглъщат относително големи порции енергия и се йонизират. Йоните са химически активни и предизвикват реакции, водещи до увреждане на цялата клетка.

Задачи

1. Периодът на полуразпадане на радиоактивния изотоп на стронция $^{90}_{38}\text{Sr}$ е 28 години. След колко години броят на радиоактивните ядра в обект, замърсен със стронций, ще намалее 8 пъти?
2. Препарат съдържа 4 μg от радиоактивния изотоп йод-131 ($^{131}_{53}\text{I}$). След 24 дни в препарата остават 0,5 μg йод-131. Колко е периодът на полуразпадане на този изотоп?
3. Изотопна лаборатория получава препарат, съдържащ радиоактивния изотоп ^{131}I , чието време на живот е 8,04 дни. При получаването активността на препарата е 6,5 mCi. След известно време измерената активност на препарата е 5,4 mCi. Колко дни са изминали между двете измервания?
4. При диагностичен рентгенов преглед орган на пациента с маса 2,5 kg е погълнал лъчение с енергия $7,5 \cdot 10^4 \text{ J}$. Колко е погълнатата доза? Колко е еквивалентната доза, ако качественият фактор за това лъчение е $k = 0,8$?
5. При погълната доза 2000 Gy се унищожават повечето от бактериите, съдържащи се в рибни или месни продукти, което позволява те да се съхраняват в замразено състояние 5 пъти по-дълго време от обикновеното. Колко джаула енергия се поглъща от 100 kg облъчени продукти?

108. Процеси на радиоактивно разпадане на ядрата

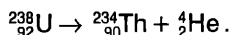
Ще разгледаме по-подробно трите процеса на спонтанно разпадане на радиоактивните ядра: алфа-, бета- и гама-разпадане.

Алфа-разпадане

Алфа-разпадането е характерно главно за тежки ядра с атомен номер $Z > 82$. Когато ядро на химичния елемент X с атомен номер Z и масово число A излъчи α -частица (${}^4_2\text{He}$), то загубва два протона и два неутрона (общо 4 нуклона) и се превръща в ядро на химичния елемент Y с атомен номер $Z - 2$, чието масово число е $A - 4$. Процесът на α -разпадане се записва така:

$$(108.1) \quad {}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}.$$

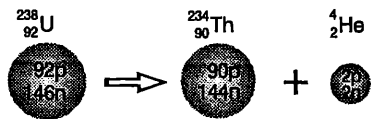
Например при α -разпадане на един от изотопите на урана (фиг.108-1) се получава ядро на химичния елемент торий (Th), който има с две единици по-малък атомен номер и в таблицата на Менделеев е разположен две клетки преди урана:



При α -разпадането общият брой на нуклоните не се изменя. Например при разпадането на урана в ядрото на изотопа ${}^{238}_{92}\text{U}$ се съдържат 238 нуклона. Общият брой на нуклоните в ядрата ${}^{234}_{90}\text{Th}$ и ${}^4_2\text{He}$, получени след разпадането, остава непроменен: $234 + 4 = 238$ нуклона. В сила е също така законът за запазване на електричния заряд: зарядът на изходното ядро на урана $92e$ (e – елементарен заряд) е равен на сумата от зарядите на ядрото на тория и на α -частицата: $90e + 2e = 92e$.

Алфа-разпадането е следствие от нестабилността на тежките ядра, дължаща

Фиг.108-1.



p – протон; n – неутрон

се на електричните сили на отблъскване между протоните. Ядрените сили на привличане обаче правят невъзможно откъсването на отделни протони от ядрото. При излъчването на α -частица се постига своеобразен „компромис“ между конкуриращите се електрични и ядрени сили: от ядрото се премахват два протона, което води до намаляване на електричното отблъскване между останалите протони. Едновременно с това четирите нуклона в α -частицата (два протона и два неутрона) остават изключително здраво свързани под действие на ядрените сили.

Енергията Q , която се отделя при α -разпадането, е равна на разликата от енергията на покой на изходното ядро $M_X c^2$ и енергиите на покой на дъщерното ядро $M_Y c^2$ и α -частицата $M_\alpha c^2$:

$$(108.2) \quad Q = (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2,$$

където M_X , M_Y и M_α са масите на съответните ядра. Отделената енергия Q се разпределя между α -частицата и дъщерното ядро като кинетична енергия. Тъй като стойността на Q е много по-малка от енергията на покой на α -частицата ($Q \leq 10 \text{ MeV}$), продуктите на α -разпадането (α -частицата и дъщерното ядро) се движат с нерелативистки скорости.

Пример 108.1. Отделената при α -разпадането енергия Q се разпределя като кинетична енергия на α -частицата E_α и кинетична енергия на дъщерното ядро E_Y .

а) Докажете, че $E_\alpha = \frac{Q}{1 + M_\alpha/M_Y}$, където M_α

и M_Y са съответно масите на α -частицата и на дъщерното ядро.

б) Колко процента от отделената енергия при α -разпадането на ядрото ${}^{238}_{92}\text{U}$ е кинетичната енергия на α -частицата?

Решение. Изразяване кинетичните енергии на двете нерелативистки частици чрез техните импулси p_α и p_Y :

$$E_\alpha = \frac{p_\alpha^2}{2M_\alpha}; \quad E_Y = \frac{p_Y^2}{2M_Y}.$$

От закона за запазване на импулса следва, че в случая, когато изходното ядро е в покой, след разпадането дъщерното ядро и α -частицата се

движат в противоположни посоки с равни по големина импулси, т.е.

$$p_Y = p_\alpha$$

От закона за запазване на енергията следва равенството

$$Q = E_\alpha + E_Y$$

От записаните равенства, след съответните алгебрични преобразувания, се получава

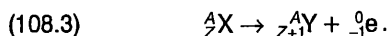
$$E_\alpha = \frac{Q}{1 + M_\alpha/M_Y}; E_Y = \frac{Q}{1 + M_Y/M_\alpha}$$

За тежките ядра (с голямо масово число) $M_\alpha/M_Y \ll 1$, поради което основната част от енергията Q преминава в кинетична енергия на α -частицата.

$$\begin{aligned} \text{б)} \quad \frac{E_\alpha}{Q} &= \frac{1}{1 + M_\alpha/M_Y} = \\ &= \frac{1}{1 + 4/234} 100\% = 98,3\%. \end{aligned}$$

Бета-разпадане

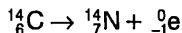
При β^- -разпадане радиоактивното ядро излъчва един електрон и се превръща в ядро, което има същия брой нуклони (същото масово число A), но атомният му номер е с една единица по-голям:



Тук със символа ${}^0_{-1} e$ е означен електронът: горният индекс „0“ показва, че масовото число на електрона е нула (той не е изграден от протони и неутрони); долният индекс „-1“ показва, че електронът е носител на един елементарен отрицателен заряд. Обърнете внимание, че както при α -разпадането броят на нуклоните и пълният електричен заряд не се изменят. При β^- -разпадането един неутрон се превръща в протон и броят на положителните елементарни заряди нараства с единица. Едновременно с това обаче се появява и един елементарен отрицателен заряд (на електрона), поради което пълният заряд остава непроменен: $(Z+1)e + (-e) = Ze$. Важно е също да се отбележи, че изходното радиоактивно ядро не съдържа електрони. Електронът се създава в момента на разпадането, за което се изразходва част от енергията на покой на разпадащо-

то се ядро.

β^- -разпадане претърпяват например ядрата на изотопа въглерод-14:



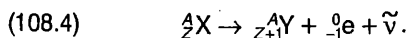
и се превръщат в ядра на азота, който в периодичната система на елементите е разположен непосредствено след въглерода.

При β^- -разпадането част от енергията на покой на радиоактивното ядро се превръща в кинетична енергия на частиците, получени след разпадането. Тъй като електронът е много по-лек от ядрото, от законите за запазване на енергията и на импулса следва, че почти цялата отделена при разпадането енергия би трябвало да се превърне в кинетична енергия на излъчената β -частица. Например при разпадането на едно ядро на изотопа въглерод-14 винаги се отделя една и съща енергия (0,156 MeV), тъй като всички ядра са еднакви. Затова всички електрони, получени след разпадането на този изотоп, би трябвало да имат еднаква кинетична енергия, приблизително равна на 0,156 MeV. Опитът обаче не потвърждава този извод. Измерванията показват, че се излъчват електрони с различна енергия, чиято стойност се намира в интервала от нула до 0,156 MeV. На фиг.108-2 е показан типичен спектър на β -частиците: в снопа от електрони, получен след разпадането на даден вид радиоактивни ядра, се съдържат електрони с кинетична енергия в интервала от нула до определена максимална стойност $E_{\max}$, приблизително равна на цялата енергия, отделена при разпадането на едно ядро. Този неочакван резултат предизвиква сериозни дискусии сред физиците. Нарушават ли се законите за запазване на енергията и на импулса при β^- -разпадането?

Фиг.108-2.



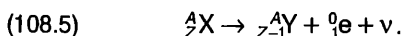
През 1930 година Паули изказва предположението, че при β -разпадането се отделя още една, неизвестна по онова време частица, която отнася „липсващите“ енергия и импулс. По-късно Енрико Ферми нарича тази частица с умалителното име *неутрино* ν , тъй като тя е електронеутрална и се предполага, че има равна на нула (или изключително малка) маса на покой. Поради извънредно слабото му взаимодействие с веществото неутриното е открито експериментално едва през 1956 година. Неутриното има „античастица“, наречена *антинеутрино* $\bar{\nu}$. При β^- -разпадане се отделя антинеутрино и този процес по-пълно се записва така:



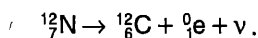
Например точната формула, изразяваща процеса на β^- -разпадане на изотопа въглерод-14, е



При β^+ -разпадане вместо електрон и антинеутрино се излъчват позитрон ${}^0_1 e$ и неутрино ν . Позитронът, както вече беше отбелязано в §103, е античастицата на електрона: има същата маса, както електрона, но подобно на протона е носител на елементарен положителен заряд. Позитронното β^+ -разпадане се изразява с формулата

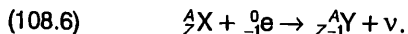


Пример за β^+ -разпадане е процесът

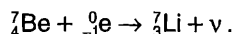


Обърнете внимание, че при β^+ -разпадането също се запазва броят на нуклоните и електричният заряд.

Съществува още един процес, наречен *електронно захващане*, който е подобен на β^+ -разпадането. При него атомното ядро захваща един от собствените си електрони – в повечето случаи от най-вътрешния К слой на атома, и излъчва неутрино. В резултат на процеса на електронно захващане атомният номер на ядрото се променя от Z на $Z - 1$:



Когато ядрото захваща електрон от К слоя, процесът се нарича К-захващане. Пример за такъв процес е захващането на електрон от ядрото ${}^7_4 \text{Be}$ и превръщането му в ядро ${}^7_3 \text{Li}$:



Гама-разпадане

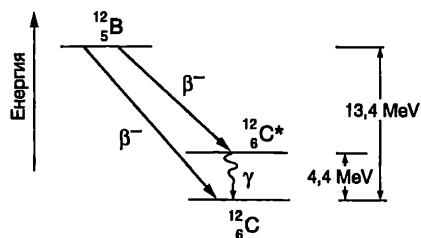
Подобно на атомите, ядрата също могат да се намират в състояния с различна енергия: основно състояние, в което енергията на ядрото е минимална, и възбудени състояния с по-голяма енергия. При преминаване от състояние с по-голяма енергия в състояние с по-малка енергия ядрото излъчва фотон. Тъй като разликата в енергиите на ядрените състояния е много голяма (обикновено няколко MeV), излъчените от ядрото фотони имат многократно по-голяма енергия от фотоните, излъчени от атомите. Тези фотони с голяма енергия се наричат γ -кванти, а процесът на излъчването им от възбудените атомни ядра – γ -разпадане.

Ядрата преминават във възбудено състояние в резултат на друг процес, предшестващ γ -разпадането. Този процес може да е удар с друго ядро или частица, α -разпадане или β -разпадане. При γ -разпадането не се променя нито атомният номер, нито масовото число на ядрото. Ядрото остава същото, само преминава в състояние с по-малка енергия. Процесът се изразява с формулата



където знакът „*“ показва, че изходното ядро се намира във възбудено състояние. Типичен пример за последователност от процеси, включваща γ -разпадане, е показан схематично на *фиг.108-3*. Радиоактивното ядро ${}^{12}_5 \text{B}$ претърпява β^- -разпадане.

Фиг.108-3.



Възможни са два процеса на β^- -разпадане: при първия от тях дъщерното ядро $^{12}_6\text{C}$ се намира в основно състояние, а при втория дъщерното ядро е във възбудено състояние $^{12}_6\text{C}^*$. Във втория случай средно само след около 10^{-10} s възбуденото ядро преминава в основното си състояние, излъчвайки γ -квант с енергия, равна на разликата в енергиите на възбуденото състояние и на основното състояние (4,4 MeV).

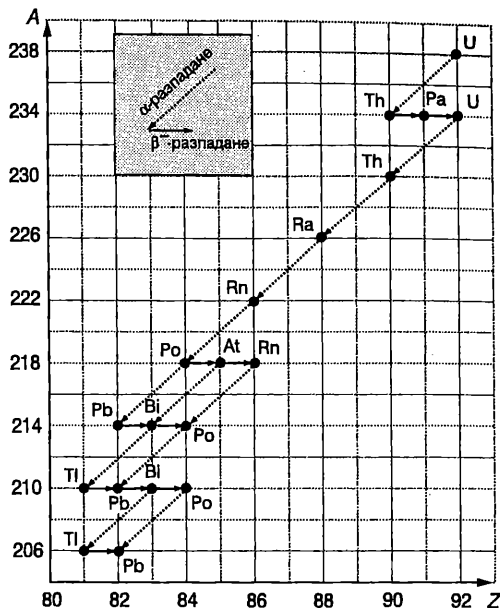
Естествена радиоактивност

Прието е радиоактивните ядра да се разделят на две големи групи: 1. нестабилни ядра, които се срещат в природата и са източници на т.нар. *естествена радиоактивност*; 2. ядра, които не се срещат в природата, а се създават в лабораторни условия като продукти на ядрени реакции – те са източници на *изкуствена радиоактивност*.

В природата съществуват три *радиоактивни реда* (семејства): на урана-радия, на актиноурана и на тория. Всяко семејство представлява група от генетично свързани нестабилни ядра (радионуклиди), в която всеки следващ член възниква в резултат на α - или β^- -разпадане на предшестващия го. Всеки радиоактивен ред започва с родоначалник – радионуклид с най-голям за дадения ред период на полуразпадане $T_{1/2}$ и завършва със стабилен изотоп на оловото (табл.108.1). Редовете съдържат както дългоживеещи, така и краткоживеещи радионуклиди. Например за радионуклида $^{230}_{90}\text{Th}$ от реда на урана-радия (фиг.108-4) $T_{1/2} = 7,5 \cdot 10^4$ години, докато периодът на полуразпадане на $^{214}_{84}\text{Po}$ от същия ред е само $1,6 \cdot 10^{-4}$ s. Ще отбележим, че независимо колко малък е периодът на полуразпадане на даден радионуклид, член на естествен радиоактивен ред, той задължително се среща в природата. Причината за това е, че с течение на времето

Таблица 108.1. Радиоактивни редове

Ред	Родоначалник	Период на полуразпадане (години)	Стабилен краен продукт
Уран-радий	$^{238}_{92}\text{U}$	$4,47 \cdot 10^9$	$^{208}_{82}\text{Pb}$
Актиниоуран	$^{235}_{92}\text{U}$	$7,04 \cdot 10^8$	$^{207}_{82}\text{Pb}$
Торий	$^{232}_{90}\text{Th}$	$1,41 \cdot 10^{10}$	$^{208}_{82}\text{Pb}$



Фиг.108-4. Естествения радиоактивен ред на урана-радия.

се установява т.нар. *веково равновесие* в разпределението на радионуклидите. При веково равновесие броят на атомите N_X и N_Y на кои да са два члена от даден радиоактивен ред и техните периоди на полуразпадане T_X и T_Y са свързани със съотношението

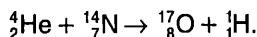
$$(108.8) \quad \frac{N_X}{T_X} = \frac{N_Y}{T_Y}.$$

Затова, колкото по-малък е периодът на полуразпадане на даден член на радиоактивен ред, толкова по-малка е и неговата концентрация в земната кора.

Всички живи организми на Земята се намират под непрекъснатото въздействие на лъчението на природните радионуклиди от радиоактивните семејства, на космогенните радионуклиди (^{14}C , ^3H и др.), които се образуват в атмосферата под действие на космичните лъчи, и на техногенните радионуклиди – продукти на атомната промишленост и на опитите с ядрено оръжие. Въздействието на йонизиращите лъчения върху околната среда се изучава от *радиоокологията*. В много страни се извършва непрекъснат контрол (мониторинг) на радиоактивното замърсяване на въздуха, почвата и водата.

109. Ядрени реакции

При α - и β -разпадането става спонтанно превръщане на един химичен елемент в друг. Съставът на ядрата може да се измени и по друг начин: при удар на атомно ядро с протон, неутрон, α -частица или друго ядро. Такива удари, които предизвикват изменения в състава на атомните ядра, се наричат *ядрени реакции*. Първата ядрена реакция в лабораторни условия е осъществена през 1919 година в Англия от новозеландския физик Ърнест Ръдърфорд (1871–1937). Той насочва сноп от α -частици към газова среда от азот и наблюдава отделянето на протони (ядра на водорода). Ръдърфорд стига до извода, че за да се изпълни законът за запазване на електричния заряд, трябва ядрата на азота да се превръщат в ядра на кислорода чрез ядрената реакция



Обърнете внимание, че при реакцията се запазва както електричният заряд, така и броят на нуклоните (масовото число). В случая електричният заряд се определя само от броя на протоните: той е $Z = 2 + 7 = 9$ преди реакцията и $Z = 8 + 1 = 9$ след реакцията. Масовото число е $A = 4 + 14 = 18$ преди реакцията и остава същото ($A = 17 + 1 = 18$) след нея. Тъй като при всяка ядрена реакция се запазва електричният заряд и масовото число, тези закономерности се използват за определяне вида на получените ядра.

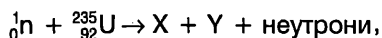
При някои реакции се получават стабилни ядра, а при други – нестабилни. Чрез ядрени реакции в лабораторни условия се произвеждат редица радионуклиди, намиращи приложение в медицината и биологията. Например така се получава изотопът кобалт-60, чието γ -излъчване се използва за поразяване на раковите клетки.

Делене на ядрата на урана

Ядрени реакции, при които тежки ядра се разцепват на две по-леки ядра и се отделя енергия, се наричат *реакции на делене*. Деленето на ядрата на урана е открито в

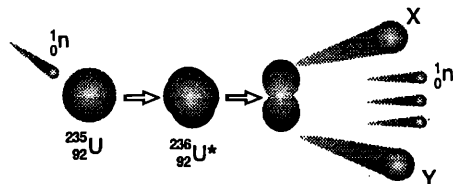
края на 1938 година от германските физици Ото Хан и Фриц Щрасман. Чрез химичен анализ те установяват, че при облъчване на урана с неутрони се образуват елементи от средата на периодичната система. Това откритие, направено в Берлин в навечерието на Втората световна война, поставя началото на ядрената ера в историята на човечеството. По време на войната в САЩ се събира цяла плеяда блестящи физици, повечето емигранти от Европа, която усилено разработва ядрените технологии. През 1942 година под ръководството на италианския физик Енрико Ферми (1901–1954) в Чикаго е пуснат в действие първият ядрен реактор. На 16 юли 1945 година на полигона в щата Ню Мексико, САЩ, е взривена атомна бомба. Следват трагедията при атомните бомбардировки на японските градове Хирошима и Нагасаки, надпреварата в ядреното въоръжаване и мирното използване на атомната енергия в наши дни.

Деленето на урана се предизвиква от неутрони с малка кинетична енергия (по-малка от 1 eV). Такива неутрони се наричат бавни или топлинни, защото кинетичната им енергия е сравнима с енергията на хаотичното топлинно движение на молекулите на газовете при нормални условия. Ядрото поглъща един неутрон и преминава във възбудено състояние (фиг. 109-1). В това състояние то е крайно нестабилно и след много кратко време (около 10^{-12} s) се разцепва на две приблизително еднакви части (продукти на деленето), при което се отделят два или три неутрона. Деленето на изотопа ${}^{235}_{92}\text{U}$ се записва така:



където с ${}_0^1\text{n}$ е означен неутронът, предизвикващ деленето, а X и Y са продуктите на деленето – изотопи на химични елементи от средата на Менделеевата таблица

Фиг. 109-1.



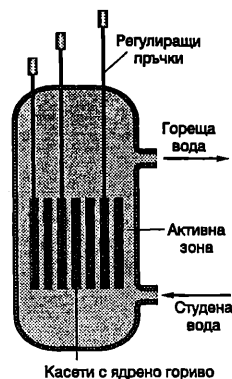
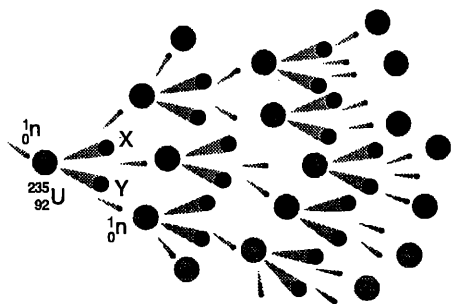
(барий, криптон, ксенон, стронций и др.) Тези по-леки ядра имат с около 1 MeV по-голяма специфична енергия на връзката в сравнение с тежкото изходно ядро на урана (вж. графиката от *фиг.106-2* на стр. 266). Това означава, че в тях нуклоните са по-здраво свързани и имат по-малка маса на покой. Следователно масата и енергията на покой намаляват: част от енергията на покой на урана се превръща в кинетична енергия на продуктите на деленето. При деленето на едно ядро се отделя около 200 MeV енергия. Това е огромна енергия. За сравнение ще посочим, че при делене на всички ядра, съдържащи се в 1 kg $^{235}_{92}\text{U}$, се освобождава толкова енергия, колкото при изгарянето на 3 000 000 kg въглища!

Ядрени реактори

Деленето на урана се предизвиква от един неутрон, а поражда средно 2,5 неутрона (в зависимост от вида на ядрата продукти X и Y в някои случаи се отделят 2 неутрона, а в други – 3 неутрона). Ако уранът е само малко късче, тези неутрони излитат от повърхността му и процесът се прекратява. Когато масата на урана обаче надхвърля определена стойност, наречена *критична маса*, неутроните не излитат навън, а предизвикват делене на нови ядра, при което пак се отделят неутрони и т.н. – протича *верижна реакция* на делене на урана (*фиг.109-2*). Ако не се контролира, верижната реакция на делене за кратко време обхваща много голям брой ядра и води до ядрен взрив, при който се отделя огромна енергия. Подобни реакции се осъществяват при взривяване на атомни бомби.

Устройствата, в които се осъществя-

Фиг.109-2. Верижна реакция.



Фиг.109-3.

ват управляеми реакции на делене на ядрата, се наричат *ядрени реактори*. Природният уран съдържа само около 0,7% от изотопа $^{235}_{92}\text{U}$, а останалите 99,3% са от изотопа $^{238}_{92}\text{U}$, при който ядрена реакция на делене се осъществява много рядко. Вместо да се дели, той поглъща неутрони и се превръща в изотоп на химичния елемент плутоний. Затова реакторите използват за ядрено гориво *обогащен уран*, в който концентрацията на изотопа $^{235}_{92}\text{U}$ е няколко процента. В реакторите от типа ВВЕР, с каквито е снабдена атомната електроцентрала (АЕЦ) в Козлодуй, ядреното гориво е пресован уранов диоксид, поставен в специални цилиндрични касети. Касетите се разполагат в т.нар. *активна зона* на реактора (*фиг.109-3*). В около 1/3 от тях се вкарват подвижни регулиращи пръчки, съдържащи химичния елемент бор (В). Борът поглъща част от неутроните и по този начин се контролира скоростта на верижната реакция. Реакторът се охлажда от течаша под голямо налягане (около 160 atm) вода, която поглъща отделеното при верижната реакция количество топлина и го извежда извън реактора. След това топлината се използва за производство на електроенергия. Този тип реактори се наричат водно-водни, защото водата изпълнява още една функция – забавя неутроните. Неутроните, получени при деленето на урана, имат голяма кинетична енергия (около 2 MeV). Вероятността ядро $^{235}_{92}\text{U}$ да захване такъв бърз неутрон е много малка. Колкото по-малка е енергията на неутроните, толкова по-лесно те се захватват от ядрата. Затова неутроните трябва да бъдат забавени преди да предизвикат де-

лене на други ядра. Това става в резултат на ударите с леките ядра на водорода от водните молекули: при ударите неутроните отдават на водорода по-голямата част от енергията си.

Деленето на ядрата на урана е съпроводено с мощно γ -излъчване. Освен това голяма част от продуктите на деленето са радиоактивни. Затова е много важно да се осигури надеждна радиационна защита около активната зона на реактора. Тази защита включва прегради от стомана, вода и бетон, които поглъщат радиоактивните лъчения. При реакторите на АЕЦ-Козлодуй са предвидени три последователни защитни бариери за околната среда от радиоактивните продукти. Въведена е автоматична система за контрол на радиоактивните лъчения, както в самата централа, така и в 110-километровата зона около нея. След аварията в атомната електроцентрала в Чернобил (Украйна) през 1986 година се обръща изключително голямо внимание на безопасността на ядрените реактори.

Освен при авария, опасност за околната среда може да възникне при неправилно съхраняване на радиоактивните отпадъци. Ядрените реактори периодично се зареждат със свежо гориво. Вече използваното гориво съдържа голямо количество радиоактивни вещества. То се подлага на преработка, а получените радиоактивни отпадъци се „погребват“ в специално построени за тази цел хранилища. Вземат се мерки, за да се изключи възможността радиоактивни отпадъци да попаднат в почвата и водата.

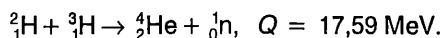
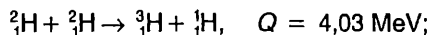
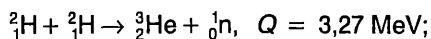
Ядрен синтез

Да разгледаме отново графиката от *фиг. 106-2* на стр. 266, изразяваща специфичната енергия на връзката на атомните ядра като функция на масовото им число. Специфичната енергия на връзката има най-голяма стойност за ядрата с масово число около 60. Следователно както в тежките, така и в леките ядра нуклоните са по-слабо свързани, отколкото в ядрата от средата на периодичната система. Затова са възможни два противоположни процеса, при които се отделя енергия:

1. Делене на тежки ядра, което вече разглеждахме.

2. Сливане на две леки ядра. Процесът, при който две леки ядра се сливат и се образува ядро с по-голямо масово число и по-голяма енергия на връзката, се нарича реакция на *ядрен синтез*. Тъй като общата маса на получените след ядрения синтез ядра и частици е по-малка от общата маса на изходните ядра, процесът на сливане е съпроводен с отделяне на енергия: част от енергията на покой на изходните ядра се превръща в кинетична енергия на продуктите на ядрения синтез.

Интерес за ядрената енергетика представляват преди всичко реакциите на ядрен синтез, в които участват изотопите на водорода деутерий (${}^2_1\text{H}$) и тритий (${}^3_1\text{H}$):



Най-перспективна в енергетично отношение е третата ядрена реакция, тъй като при нея се освобождава най-голяма енергия (17,59 MeV). 80% от освободената енергия се отнася от излъчния при реакцията неутрон (кинетична енергия на неутрона), а останалите 20% преминават в кинетична енергия на полученото след сливането хелиево ядро (α -частица).

Термоядрен синтез

Сливане на две положително заредени ядра е възможно само ако те имат достатъчно голяма кинетична енергия, за да преодолеят електричните сили на взаимно отблъскване и да се доближат на такива малки разстояния (около 10^{-14} m), на които ядрените сили на привличане стават по-големи от силите на електрично отблъскване. Необходимата кинетична енергия може да се получи чрез загряване на средата, съдържаща леки ядра, до неколкостотин милиона градуса. При такива огромни температури атомите са напълно йонизирани и веществото се намира в плазмено състояние: представлява смес от свободни електрони и атомни ядра с голяма кинетична енергия. В този случай процесът на сливане на леките ядра се

нарича *термоядрен синтез*.

Управляем термоядрен синтез

Устройствата, с които се получава енергия чрез управляеми реакции на термоядрен синтез, се наричат *термоядрени реактори*. Термоядрените реактори, използващи за гориво деутерий и тритий, имат редица предимства пред реакторите, в които се осъществява делене на урана. Преди всичко тяхното гориво е много поевтино и практически е в неограничено количество. Деутерият се съдържа в обикновената вода: от 1 m³ вода може да се извлече около 30 g деутерий. Необходимият за реакцията тритий се получава като страничен продукт при работата на самия реактор (вж. зад.1). Освен това в термоядрените реактори се създават много по-малко радиоактивни продукти и опасността за радиоактивно замърсяване на околната среда е минимална.

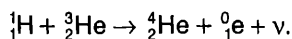
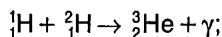
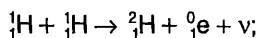
Практическото използване на термоядрения синтез за производство на електроенергия обаче е все още нерешен проблем. За протичане на управляем термоядрен синтез в реактора трябва да са изпълнени три условия:

1. Създаване на високотемпературна плазма.
2. Поддържане на голяма плътност на плазмата, за да се увеличи броят на ударите между ядрата.
3. Задържане на плазмата достатъчно дълго време, за да се осъществи сливането на леките ядра в резултат на ударите между тях. При това плазмата не трябва да се допира до стените на реактора. При допир плазмата се охлажда, а веществото на стените се изпарява и термоядреният синтез става невъзможен.

Термоядрен синтез в Слънцето и звездите

Веществото в недрата на Слънцето и звездите се намира в състояние на високотемпературна плазма с голяма плътност, в която са налице условията за протичане на термоядрен синтез. Основното ядрено гориво за Слънцето е водородът, който се превръща в хелий и се отделя енергия. Предполага се, че това става по т. нар.

протон-протонен цикъл. Един от възможните варианти на този цикъл включва следните ядрени реакции:



В резултат на протон-протонния цикъл четири протона (ядра на водорода) се превръщат в едно хелиево ядро и се отделят два позитрона (${}^0_1\text{e}$), две неутрино (ν), един γ -квант и голямо количество енергия ($Q = 26 \text{ MeV}$). Най-бавно протича първата реакция от цикъла, благодарение на което отделянето на ядрена енергия става постепенно: пресмятанията показват, че Слънцето ще свети още 4 милиарда години преди да изчерпи ядреното си гориво.

Превръщането на водорода в хелий може да се извършва и по т.нар. въглеродно-азотен цикъл, при който въглеродът играе ролята на катализатор на ядрените реакции, а азотът е междинен продукт.

И при двата цикъла се образува неутрино, което почти безпрепятствено преминава през външните слоеве на Слънцето и се разпръсква в космическото пространство. Интересно е да се отбележи, че в проведените досега опити за регистриране на слънчевите неутрино е установено, че до Земята достигат 3 пъти по-малко неутрино, отколкото предвижда термоядреният модел на Слънцето. Едно от възможните обяснения е, че по пътя си към Земята част от слънчевите неутрино се превръщат в други видове неутрино, които не могат да се регистрират с използваните досега методи.

Задачи

1. Термоядрените реактори се охлаждат от течен литий, който поглъща отделените при ядрения синтез на деутерия и трития неутрони с голяма кинетична енергия. Протича ядрената реакция ${}^1_0\text{n} + {}^6_3\text{Li} \rightarrow {}^4_2\text{He} + \text{X}$. Кой е изотопът X, получен при тази реакция и за какво се използва?

110. Елементарни частици

В началото на 30-те години на XX век физиките смятат, че цялата материя е съставена само от три вида частици: електрони, протони и неутрони. Те били наречени *елементарни частици*, защото се е предполагало, че са най-малките, неделими късчета материя, които нямат вътрешна структура, т.е. не са изградени от други, по-малки частици.

След създаването на мощни ускорители на заредени частици става възможно да се изследва ударът между две частици, имащи огромна кинетична енергия. Например един от най-големите ускорители в света – в Женева, Швейцария, ускорява протоните до енергия около 5.10^{11} eV. Из-

следванията показват, че при такива удари се създават нови частици, които също е прието да се наричат елементарни. Досега са открити стотици подобни частици, които са изключително нестабилни и след много кратък интервал от време, наречен *време на живот*, се разпадат на други частици.

Адрони и лептони

В зависимост от взаимодействията, в които участват, елементарните частици (с изключение на фотоните) се разделят на две големи категории: *адрони* и *лепто*ни. Адрони се наричат частиците, които участват в силни взаимодействия. Има два класа адрони – *мезони* и *бариони*, които се различават по маса и спин.

Мезоните (от гр. мезос – среден) имат

Таблица 110.1. Някои елементарни частици и техни свойства

Клас	Частица	Символ	Анти-частица	Маса (MeV/c ²)	Време на живот, s	Схема на разпадане*
Лептони	Електрон	e^-	e^+	0,511	Стабилна	
	Неутрино (e)	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0 (?)	Стабилна	
	Мюон	μ^-	μ^+	105,7	$2,20 \cdot 10^{-6}$	$e^- \bar{\nu}_e \nu_\mu$
	Неутрино (μ)	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0 (?)	Стабилна	
	Тау-лептон	τ^-	τ^+	1784	$< 4.10^{-13}$	$\mu^- \bar{\nu}_\mu \nu_\tau, e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau$
	Неутрино (τ)	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0 (?)	Стабилна	
Адрони						
<i>Мезони</i>	Пион	π^+	π^-	139,6	$2,60 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu$
	(пи-мезон)	π^0	π^0	135,0	$0,83 \cdot 10^{-16}$	2γ
	Каон	K^+	K^-	493,7	$1,24 \cdot 10^{-8}$	$\mu^+ \nu_\mu, \pi^+ \pi^0$
	(ка-мезон)	K_S^0	$\bar{K}_S^0$	497,7	$0,89 \cdot 10^{-10}$	$\pi^+ \pi^-, 2\pi^0$
	Ета	η^0	η^0	548,8	$< 10^{-18}$	$2\gamma, 3\pi$
<i>Бариони</i>	Протон	p	$\bar{p}$	938,3	Стабилна	
	Неутрон	n	$\bar{n}$	939,6	920	$p e^- \bar{\nu}_e$
	Ламбда	Λ^0	$\bar{\Lambda}^0$	1115,6	$2,6 \cdot 10^{-10}$	$p \pi^-, n \pi^0$
	Сигма	Σ^+	$\bar{\Sigma}^-$	1189,4	$0,80 \cdot 10^{-10}$	$p \pi^0, n \pi^+$
		Σ^0	$\bar{\Sigma}^0$	1192,5	6.10^{-20}	$\Lambda^0 \gamma$
		Σ^-	$\bar{\Sigma}^+$	1197,3	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$n \pi^-$
	Хи	Ξ^0	$\bar{\Xi}^0$	1315	$2,9 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \pi^0$
		Ξ^-	$\bar{\Xi}^+$	1321	$1,64 \cdot 10^{-10}$	$\Lambda^0 \pi^-$
	Омега	Ω^-	$\bar{\Omega}^+$	1672	$0,82 \cdot 10^{-10}$	$\Xi^0 \pi^-, \Lambda^0 K^-$

* Означенията в тази колона от рода на $p \pi^0, n \pi^+$ показват, че има два начина на разпадане на съответната частица: $\Sigma^+ \rightarrow p + \pi^0$ и $\Sigma^+ \rightarrow n + \pi^+$.

цял спин (0 или 1), а масите им лежат между масата на електрона и масата на протона. Всички мезони са нестабилни частици. Като крайни продукти след разпадането им се получават електрони, позитрони, неутрино и фотони.

Протоните и неутроните принадлежат на класа на барионите (от гр. варис – тежък). Масата на барионите е равна или е по-голяма от масата на протона. Всички бариони имат полуцял спин (1/2 или 3/2). С изключение на протона те също са нестабилни частици. Дори неутроните, когато не са свързани в ядра, живеят средно само 920 s (15 min), след което се разпадат на протони, електрони и антинеутрино. В крайните продукти след разпадането на всички нестабилни бариони задължително присъстват протони.

Лептоните (от гр. лептос – лек), за разлика от адроните, не участват в силните взаимодействия. Те участват във всички останали взаимодействия (електромагнитни, слаби, гравитационни). Семейството на лептоните е най-малобройно. Досега са открити само три вида заредени лептона: електрон, мюон и тау-лептон. На всеки от тях съответства по един вид неутрино: електронно неутрино, мюонно неутрино и тау-неутрино. Неутриното е електронеутрална частица. Предполага се, че масата му е нула или е много малка. Неутриното са също толкова често срещани обекти, както фотоните. Те имат изключително голяма проникваща способност – например почти безпрепятствено преминават през Земята, Слънцето и другите небесни тела. Неутрино се изпускат при различни ядрени реакции и при разпадането на някои частици. Пристигащите до Земята потоци от неутрино носят информация за ранните стадии от развитието на Вселената, за процесите в недрата на звездите и Слънцето и др.

В табл. 110.1 са систематизирани някои от основните характеристики на частици от трите класа. За означаване на повечето частиците се използват букви от гръцката азбука. Горевдясно на буквата се поставя знак „+“, „-“, или „0“, който показва какъв е електричният заряд на частицата (+e, -e или нула).

Според съвременната класификация основните различия между адроните и лептоните са в тяхната вътрешна структура. Смята се, че лептоните са безструктурни, т.е. те не са изградени от други частици. Затова те се разглеждат като истински елементарни частици. Мезоните и барионите са съставени от кварки.

Кварки

За да обяснят свойствата на елементарните частици, през 1963 година независимо един от друг американските физици Мъри Гел-Ман (роден през 1929 г.) и Джордж Цвайг (роден през 1937 г. в Съветския съюз) създават теоретичен модел, съгласно с който всички адрони са изградени от по-малки частици, наречени *кварки*. Думата „кварк“ няма определено смислово значение. С присъщото на физиците чувство за хумор Гел-Ман я заимства от роман на известния писател Дж. Джойс, чийто герой в съня си чува странната фраза „Три кварка за мистър Марк“. Първоначалният кварков модел на адроните включва три кварка, които се означават със символите u, d и s. Това са първите букви от названията на кварките на английски език (имената са дадени произволно): up (горен), down (долен) и strange (странен). Кварките са единствените частици с дробен електричен заряд. u-кваркът има положителен заряд $+2e/3$, a d- и s-кварките са носители на отрицателен заряд $-e/3$.

Таблица 110.2. Характеристики на кварките

Наименование	Символ	Ел. заряд	Маса (MeV/c ²)
Горен (up)	u	$+2e/3$	360
Долен (down)	d	$-e/3$	360
Странен (strange)	s	$-e/3$	540
Очарован (charmed)	c	$+2e/3$	1500
Красив (beauty)	b	$-e/3$	5000
Топ (top)	t	$+2e/3$	173 000

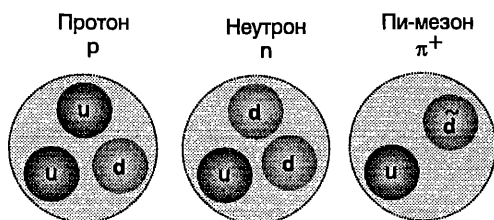
През последните 30 години са открити нови тежки частици, чиито свойства и структура не могат да се обяснят с първоначалния трикварков модел. Това налага неговото усъвършенстване. Според съвременните представи цялата материя е из-

градена от 6 лептона (вж. табл. 110.1) и от 6 кварка. Някои от характеристиките на кварките са представени в табл. 110.2.

На всеки кварк съответства антикварк ($\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$, ...) със същата маса, но с противоположен електричен заряд.

Строеж на барионите и мезоните

Барионите са изградени от три кварка. На *фиг.110-1* схематично е показана вътрешната структура на протоните и неутроните. Протонът съдържа два *u*-кварка и един *d*-кварк, а неутронът – два *d*-кварка и един *u*-кварк. Сумарният електричен заряд на трите кварка на протона е $2e/3 + 2e/3 + (-e/3) = e$. За неутрона: $2e/3 + (-e/3) + (-e/3) = 0$.



Фиг.110-1.

Мезоните са изградени от един кварк и от един антикварк (*фиг.110-1*).

Обърнете внимание, че протоните и неутроните съдържат единствено най-леките кварки (*u*- и *d*-кварки). Следователно, въпреки огромното си многообразие, заобикалящият ни материален свят е изграден само от четири истински елементарни частици: от двата най-леки кварка и от двойката най-леки лептони (електрон и електронно неутрино). Останалите кварки и лептони съществуват само в екстремални условия – във физичните експерименти с удари между частици с много голяма енергия или при изключително високите температури, създадени на определен етап от еволюцията на някои звездни системи и на Вселената като цяло.

Взаимодействие между кварките

Кварките са заредени частици, но електричните сили нямат съществено значение при тяхното взаимодействие. То се определя от един нов вид заряд, характерен само за кварките. Прието е той да се на-

рича *цветен заряд* или само *цвет*. Съществуват три вида цветни заряди, наречени *червен*, *зелен* и *син*. Антикварките са носители съответно на *античервен*, *антизелен* и *антисин* цветен заряд. Цветните заряди се групират в три двойки противоположни заряди: червен-античервен, зелен-антизелен и син-антисин. Всяка от тях е аналог на противоположните електрични заряди (положителен и отрицателен заряд). Трите кварка в протоните и неутроните (както и в останалите бариони) имат различни цветни заряди: единият кварк е червен, другият е зелен, а третият – син. При свързването на три разноцветни кварка се получава безцветен барион, т.е. частица, която не е носител на цветен заряд. Мезоните също са безцветни, защото са изградени от един кварк с определен цветен заряд и един антикварк с противоположния цветен заряд. (Терминът *цвет* е възприет по аналогия с опиката, където при смесване на трите основни цвята – червен, зелен и син, се получава бяла светлина. Не трябва да се забравя обаче, че цветът е физична характеристика на кварките, която няма нищо общо с нашите зрителни възприятия.) Силите на взаимодействие между кварките се определят от техния цветен заряд. Тези сили са много по-големи от всички останали сили в природата, затова взаимодействието между кварките се нарича *силно взаимодействие*. Кварките с еднакви цветни заряди се отблъскват, а кварк и антикварк с противоположни цветни заряди се привличат. Например два червени кварка се отблъскват, докато червен кварк и античервен антикварк се привличат и могат да образуват свързана система – мезон. Кварките с различни цветни заряди също се привличат. Затова червен, зелен и син кварк могат да образуват свързана система от три взаимно привличащи се частици – барион. Ядреното взаимодействие между протоните и неутроните също се дължи на взаимодействието между кварките, т.е. то е силно взаимодействие. Всички адрони участват в силни взаимодействия, докато лептоните, които не са изградени от кварки, не участват в тях.

Отговори на задачите

Глава 11. Електростатика

44.2. $F = 9.10^9 \text{ N}$; $G = 3.10^4 \text{ N}$; $F/G = 3.10^5$.

44.3. $6,25.10^{12}$ електрона. 44.5. $q > 1 \text{ } \mu\text{C}$.

44.6. $e = \frac{mg}{2E} = 1,6.10^{-19} \text{ C}$. 44.7. $1,7.10^7 \text{ N}$.

44.8. $1,9.10^5 \text{ N/C}$. 44.9. $E_x = -\frac{3\sqrt{3}q}{8\pi^2\epsilon_0 r^2}$; $E_y = 0$.

44.10. $E = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 R^2} \left(1 - \frac{h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right)$.

45. 1. а) $E = 0$; б) $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

45.2. $E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r = 3,8.10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

45.3. $F = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} = 1,7.10^{-4} \text{ N}$.

45.4. а) $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$; б) $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R^2} r$.

45.5. а) $C = \frac{e}{\pi\epsilon_0^3} = 3,4.10^{11} \frac{\text{C}}{\text{m}^3}$;

б) $E = \frac{5e}{4\pi\epsilon_0 r_B^2} \exp(-2) = 3,5.10^{11} \frac{\text{N}}{\text{C}}$.

46.1. 200 eV . 46.2. 9.10^{-5} J . 46.3. $4,6.10^{-14} \text{ m}$.

46.4. $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \ell} \ln \left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + y_0^2}}{y_0} \right)$. 46.5. $\varphi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} R$.

46.6. $\varphi = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right)$; $r \leq R$ и $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$; $r \geq R$.

47.1. 200 V/m , на юг. 47.2. $7,2.10^9$ електрона

47.3. $E_1 = E_2 R_2 / R_1 = 4 \text{ kV/m}$.

48.1. $0,1 \text{ pF}$. 48.2. 2 pF . 48.4. 3 nm . 48.5. 10 .

48.6. $5,7 \text{ } \mu\text{F}$. 48.7. $\varphi_D = \frac{1}{3}(\varphi_A + \varphi_B + \varphi_C) = 70 \text{ V}$.

48.8. $\frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}$.

49.3. $1,7 \text{ mJ}$. 49.4. 1 mJ , отделя се количество топлина $Q = 1 \text{ mJ}$.

49.5. а) $0,48 \text{ MeV}$; б) нула. 49.6. $2,2.10^{-6} \text{ J}$.

49.7. $W = \frac{\varphi^2 R}{2k} = 5.10^{-6} \text{ J}$. 49.8. $A = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 R}$.

49.9. $\Delta W = -\frac{2\pi\epsilon_0 R_1 R_2}{R_1 + R_2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 < 0$. Отделя се количество топлина $Q = -\Delta W$.

49.10. $W = W_1 + W_2 + W_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1^2}{2R_1} + \frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{q_1 q_2}{R_2} \right)$.

50.1. б) $E_B = 1.10^{-6} \text{ V/m}$. 50.2. $1,1 \text{ J}$.

50.3. $r = \left(\frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}$.

51.1. $C = \frac{2\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} C_0$.

Глава 12. Електричен ток

52.1. 6.10^{15} електрона. 52.2. $6,5.10^{-7} \text{ A/m}^2$.

52.3. $2,5.10^8 \text{ } \Omega$. 52.4. а) $E_1 = \frac{I}{\sigma_1 S}$; $E_2 = \frac{I}{\sigma_2 S}$;

б) $q = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_2} \epsilon_0 I > 0$.

58.1. $16 \text{ } \Omega$ и $4 \text{ } \Omega$. 58.2. На 6 части. 58.3. 5 пъти.

58.7. 10 W . 58.8. $44 \text{ } ^\circ\text{C}$. 58.9. $Q = 0,32 \text{ J}$.

59.1. $2 \text{ } \Omega$. 59.2. $100 \text{ } \Omega$. 59.3. $0,01 \text{ } \Omega$.

59.4. а) 1 A ; б) $1 \text{ } \Omega$. 59.5. $1,44 \text{ W}$ и $1,8 \text{ W}$.

59.6. $r = 1 \text{ } \Omega$; $\epsilon = 3 \text{ V}$. 59.7. 60 часа .

59.8. $\epsilon = 12 \text{ V}$; $r = 0,1 \text{ } \Omega$. 59.9. $0,06 \text{ } \Omega$.

59.10. $P_{\max} = \frac{\epsilon^2}{4r} = 1,1 \text{ W}$.

60.1. $0,5 \text{ A}$. 60.2. $I_1 = 0,01 \text{ A}$; $I_2 = 0,05 \text{ A}$; $I_3 = 0,04 \text{ A}$.

60.3. $I_1 = \frac{\epsilon_1}{R_1} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{R_2}$; $I_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{R_2}$; $I_3 = \frac{\epsilon_1}{R_1}$. Схе-

мата може да се използва за стабилизатор на напрежение: подбират се такива параметри, при които $I_1 \approx 0$. Тогава падът на напрежението върху резистора R_1 се поддържа постоянен от еталонния източник с ЕДН $\mathcal{E}_1$, а токът I_3 през него се черпи от мощния източник с ЕДН $\mathcal{E}_2$.

60.5. а) 750 V; б) 0,93 A; в) 6,62 mA.

61.1. 0,04 s. 61.2. а) $t_1 = RC \ln 2$; б) $t_2 = \frac{1}{2} RC \ln 2$.

61.3. а) 0,04 s; б) 0,028 s. 61.4. $t = RC \ln 10$.

61.5. $\eta(\mathcal{E} = \text{const}) = \frac{1}{2} \left(1 - \exp \left(-\frac{t_1}{RC} \right) \right)$;

$\eta(I = \text{const}) = \frac{1}{2} \frac{1}{RC/t_1 + 1/2}$.

Глава 13. Електромагнитно взаимодействие

62.2. 10 m/s. 62.3. а) $1,8 \cdot 10^7$ m/s; б) $5,8 \cdot 10^{-13}$ N, на север; в) $3,5 \cdot 10^{13}$ пъти.

62.4. $\mathbf{F} = -(6,4 \cdot 10^{-14} \text{ N})\mathbf{k}$.

62.5. $\mathbf{F} = -(12,8 \cdot 10^{-14} \text{ N})\mathbf{k}$.

63.1. $\frac{q}{m} = \frac{2U}{B^2 r^2} = 4,9 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$.

63.2. $W = 20 \frac{n^2}{k} \text{ MeV}$.

63.3. 30 cm. 63.4. $6,4 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$.

63.5. $B_n = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{qL} n$.

64.1. 2,1 N. 64.2. $\mathbf{F} = -(2 \text{ N})\mathbf{j} + (4 \text{ N})\mathbf{k}$.

64.3. $\mathbf{F} = \frac{1}{2} (x_2^2 - x_1^2)\mathbf{k}$; $F = 0,075 \text{ N}$.

64.4. а) $0,04 \text{ A} \cdot \text{m}^2$ и $2 \text{ A} \cdot \text{m}^2$; б) $0,1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

65.1. $5 \cdot 10^{-7} \text{ A}$.

65.2. а) $6,3 \cdot 10^{-4} \text{ T}$; б) $B = \frac{\mu_0 e v}{4\pi r_B^2} = 12,5 \text{ T}$.

65.3. 0,13 T. 65.4. а) 0,38 T; б) 0,13 T.

65.5. $B = \frac{\mu_0 (\pi + 1) I}{2\pi R}$. 65.6. $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \theta$.

65.6. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}$; б) $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} a$.

66.1. $3,14 \cdot 10^{-5} \text{ Wb}$. 66.2. 4 V.

66.4. а) 3,14 mV; б) 314 mA. 66.5. 40 mV.

66.6. 2,5 A. 66.7. $q = \pi a^2 B/R = 1 \text{ mC}$.

66.8. 22 V.

67.1. 40 V. 67.2. 30 J. 67.4. 0,5 H.

67.5. $x = \sqrt{\frac{4\pi L \ell}{\mu_0}} = 50 \text{ m}$. 67.6. 40 mH. 67.7. 8 A.

67.8. $w_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$. 67.9. $3 \cdot 10^7 \text{ V/m}$.

Глава 14. Механични трептения и вълни

70.2. 0,1 kg. 70.3. $g_n = 4g$.

70.4. а) $a_m = \frac{4\pi^2}{T^2} A$; б) $v_m = \frac{2\pi}{T} A$.

70.5. 2,5 cm/s и 21 cm/s^2 . 70.6. $T' = \frac{\sqrt{2}}{2} T$.

70.7. $T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$. 70.8. $T = 2\pi \sqrt{\frac{3R}{2g}}$.

71.1. а) $v = \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$; б) 5 m/s и 4 m/s.

71.2. 0,75 J.

73.1. $\beta = \frac{\ln 2}{t_1} = 0,069 \text{ s}^{-1}$. 73.2. 30 s.

73.3. $Q = \frac{\pi N}{\ln k} = 453$. 73.4. $Q = \frac{\tau}{\ln k} \sqrt{\frac{g}{L}} = 450$.

74.1. $k = \frac{4}{3} \frac{F_0}{A} = 400 \frac{\text{N}}{\text{m}}$. 74.2. $\beta = \frac{F_0}{2m\Omega A}$.

74.3. $\Omega_p = \frac{\omega_0}{4} \sqrt{14} = 93,5 \text{ s}^{-1}$.

74.4. $\Omega_p = \sqrt{2\omega^2 - \omega_0^2} = 5,3 \text{ s}^{-1}$. 74.5. 4 cm.

74.6. 0,33 cm.

75.1. 1500 m/s. 75.2. 5 m. 75.3. 10 m.

75.4. 130 m/s. 75.5. 200 N.

78.1. 1020 m/s. 78.2. а) Нула; б) 3,9 μm .

78.3. 0,38 Pa. 78.4. $1,3 \cdot 10^{-11}$ m.

78.5. а) 40 dB; б) 140 dB. 78.6. 100 пъти.

80.1. $I_1 = I$; $I_2 = 0,002 \text{ W/m}^2$. 80.2. 600 m.

81.1. а) 1050 Hz; б) 950 Hz. 81.2. 493 Hz.

81.3. $v \approx \frac{u}{2T_0 v_0} \approx 6 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. 81.4. 680 m/s.

Глава 15. Електромагнитни трептения и вълни

82.1. 25 μs . 82.2. 0,16 μF . 82.3. 0,2 A.

82.4. $1 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$. 82.5. а) 700 Hz; б) 9 μC ; в) 40 mA.

82.6. $t = \frac{\pi\sqrt{LC}}{4} = 0,4 \text{ ms}$. 82.7. 40 Ω . 82.8. 50.

82.9. $N = \frac{1}{\pi R} \sqrt{\frac{L}{C}} = 14$. 82.10. 4 Ω .

82.11. $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{4R^2 C^2}}$; $R < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

83.1. $R_H = \frac{2\pi\nu L \cos\varphi}{\sqrt{1 - \cos^2\varphi}} = 12,6 \Omega$. 83.2. 3,5 A; $\pi/2$.

83.3. $Z = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$; $\cos\varphi = \frac{Z}{R}$.

84.1. 0,7 μT . 84.2. $\frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$.

Глава 16. Оптика

87.1. $1,7 \cdot 10^8 \text{ m/s}$. 87.2. $\text{tg}\theta_1 = n_2/n_1$.

87.3. б) $\Delta x = d \sin\theta_1 \left(1 - \frac{\cos\theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\theta_1}}\right)$.

87.5. $\sin\alpha_{\max} = n_2 \sqrt{2\Delta}$; $\alpha_{\max} = 8,6^\circ$.

89.4. $f = \frac{L^2 - x^2}{4L} = 12 \text{ cm}$. 89.7. $m = 4$.

89.8. а) $m_1 = 2$; б) $m_2 = 5$; в) Катя, защото вижда през лупата предмета под по-голям ъгъл $\alpha_1 = 2\alpha_{01}$. За бабата: $\alpha_{02} = (L_{01}/L_{02})\alpha_{01} = \alpha_{01}/4$; $\alpha_2 = m_2\alpha_{02} = 1,25\alpha_{01}$.

89.9. $m = -290$.

90.1. $I = 4I_0 \sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)$.

90.2. $I = 2I_0 \left(5 + 3 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta\right)\right)$. 90.3. 5 cm.

91.1. 840 nm.

92.1. 670 nm.

92.2. $f_k = \frac{R_1^2}{\lambda(2k+1)}$, където R_1 е радиусът на централния кръг на пластинката, а $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

На отрицателните стойности на k съответстват разходящи вълни и недействителни фокуси.

92.3. $r' = 3,54 \text{ m}$.

93.3. 1,67 μm . 93.4. 625 nm. 93.5. $a_0 = \sqrt{2\lambda L}$.

93.6. 3650.

95.1. $\alpha = \frac{\ln(I_1/I_2)}{d_2 - d_1} = 0,27 \text{ cm}^{-1}$.

Глава 17. Относителност и кванти

97.1. 0,93c. 97.2. $v_{\text{отн}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \frac{v_1^2 v_2^2}{c^2}} = 0,82c$.

98.2. $v = \frac{\sqrt{3}}{2} c$. 98.3. 11,5 години.

98.4. $v = \frac{2\sqrt{2}}{3} c$. 98.5. $v = \frac{\sqrt{11}}{6} c$.

98.6. а) 4,5 m; б) 6,8 m. 98.7. Три милиона лева.

99.1. $5,6 \cdot 10^3$ kg. **99.2.** С $6,7 \cdot 10^{24}$ kg – толкова е приблизително масата на Земята.

99.3. $E = 5E_0/3 = 0,852$ MeV; $E_k = 0,341$ MeV.

99.4. $u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. **99.5.** $L = \frac{L_0 E_0}{E} = 10^{11}$ m.

99.6. $u = \frac{\sqrt{eU(2E_0 + eU)}}{E_0 + eU} c = 0,94c$.

100.1. 16 пъти. **100.2.** $9,4 \mu\text{m}$.

101.1. $E_1 = 3,1$ eV; $E_2 = 1,63$ eV. **101.2.** 554 nm.

101.3. Да. **101.4.** 1 V. **101.5.** $0,46$ eV.

101.6. $2,22$ eV. **101.7.** $n = \frac{P\lambda}{hc} = 3,2 \cdot 10^{15} \frac{\text{фотона}}{\text{секунда}}$.

102.1. $0,031$ nm. **102.2.** $0,083$ nm.

103.1. $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\lambda}{2\lambda_c}}$; $\theta = 70,5^\circ$.

103.2. а) $E'_\phi = \frac{E_\phi(E_\phi + 2E_0)}{2(E_\phi + E_0)} = \frac{4}{3}E_0$;

б) $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{E_0}{2(E_\phi + 2E_0)}} = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

103.3. $\text{ctg} \varphi = \left(1 + \frac{\lambda_c}{\lambda}\right) \text{tg} \frac{\theta}{2}$.

103.4. $\cos \theta = \sqrt{\frac{E_k}{E_k + 2E_0}}$.

103.5. $\sin \frac{\theta_{\max}}{2} = \sqrt{\frac{E_\phi - 2E_0}{4E_\phi}}$;

$\theta_{\max} \approx 60^\circ$ при $E_\phi \gg E_0$.

Глава 18. Ядра и частици

104.1. а) $8,7 \cdot 10^{-11}$ m; б) $5 \cdot 10^{-13}$ m.

104.2. $\theta_1 = 14,9^\circ$; $\theta_2 = 30,9^\circ$; $\theta_3 = 50,4^\circ$.

104.3. $0,23$ nm.

105.1. $\Delta v_x = 1 \cdot 10^7$ m/s. **105.2.** 500 m/s.

105.3. $p = 5,3 \cdot 10^{-20}$ kg·m/s; $v = 3,2 \cdot 10^7$ m/s;
 $E_k = 5,2$ MeV.

105.4. $E_{\min} = \hbar\omega$. Точният резултат е $E_{\min} = \frac{1}{2}\hbar\omega$.

106.2. $8,81$ MeV/нуклон. **106.3.** $0,1587$ u.

106.4. $2,22$ MeV. **106.5.** $7,68$ MeV/нуклон.

107.1. 84 години. **107.2.** 8 дни. **107.3.** $2,15$ дни.

107.4. $3 \cdot 10^{-4}$ Gy; $2,4 \cdot 10^{-4}$ Sv. **107.5.** 200 kJ.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Линейни диференциални уравнения от втори ред с постоянни коефициенти

Еднородно линейно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти се нарича уравнение от вида

$$(П.1) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = 0,$$

където a и b са константи, а x е функция на променливата t . Уравнение от вида

$$(П.2) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + a \frac{dx}{dt} + bx = f(t)$$

се нарича нееднородно линейно диференциално уравнение от втори ред с постоянни коефициенти.

В сила са следните теореми.

Теорема 1. Ако x_1 и x_2 са две линейно независими решения на уравнение (П.1), то

$$(П.3) \quad x = C_1 x_1 + C_2 x_2,$$

също е решение на (П.2) при произволни стойности на константите C_1 и C_2 . (Решенията x_1 и x_2 са линейно независими, ако равенството $\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) = 0$ се удовлетворява за всички стойности на t единствено при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.)

Теорема 2. Общото решение x на нееднородното уравнение (П.2) е сума от общото решение x_1 на еднородното уравнение (П.1) и едно частно решение x_2 на нееднородното уравнение

$$(П.4) \quad x \text{ (нееднородно)} = x_1 \text{ (еднородно)} + x_2 \text{ (частно)}.$$

Затихващи трептения. Диференциалното уравнение на движението на материална точка, която извършва затихващо трептене, е

$$(П.5) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0,$$

където β е коефициентът на затихване, а ω_0 – собствената кръгова честота ($\beta < \omega_0$). Полагаме $x = e^{rt}$, където r е константа, замествама в уравнение (П.5), диференцираме и получаваме

$$(П.6) \quad e^{rt}(r^2 + 2\beta r + \omega_0^2) = 0$$

Функцията $x = e^{rt}$ е решение на (П.5) само за стойностите на r , които са корени на квадратното уравнение

$$(П.7) \quad r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0.$$

Квадратното уравнение (П.7) се нарича *характеристично уравнение* на диференциалното уравнение (П.5). В случая то има два комплексни корена, тъй като дискриминантата му

$$4\beta^2 - 4\omega_0^2 \text{ е отрицателна } (\beta < \omega_0):$$

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = -\beta \pm i\omega,$$

където сме положили $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, а i е имажинерната единица ($i^2 = -1$). Корените r_1 и r_2 дават две линейно независими решения на уравнение (П.5):

$$(П.8) \quad x_1 = e^{r_1 t} = e^{(-\beta + i\omega)t} = e^{-\beta t}(\cos \omega t + i \sin \omega t);$$

$$x_2 = e^{r_2 t} = e^{(-\beta - i\omega)t} = e^{-\beta t}(\cos \omega t - i \sin \omega t),$$

където са използвани формулите на Ойлер

$$(П.9) \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t;$$

$$e^{-i\omega t} = \cos \omega t - i \sin \omega t.$$

От функциите (П.8) могат да се съставят други две функции, които също са линейно независими решения на уравнение (П.5):

$$(П.10) \quad x'_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = e^{-\beta t} \cos \omega t;$$

$$x'_2 = \frac{1}{2i}(x_1 - x_2) = e^{-\beta t} \sin \omega t.$$

Съгласно с теорема 1 общото решение на еднородното диференциално уравнение (П.5) е

$$(П.11) \quad x = C_1 x'_1 + C_2 x'_2 = e^{-\beta t}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t).$$

Полагаме $C_1 = A_0 \sin \varphi_0$, $C_2 = A_0 \cos \varphi_0$ и като използваме тригонометричното тъждество $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ получаваме

$$(П.12) \quad x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0),$$

където A_0 е началната амплитуда на затихващите трептения, ω – тяхната кръгова честота, а φ_0 – началната фаза.

Незатихващи трептения. Когато не се отчита съпротивлението на средата ($\beta = 0$), диференциалното уравнение на движението на материалната точка има вида

$$(П.13) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0.$$

Неговото характеристично уравнение

$$r^2 + \omega_0^2 = 0$$

има два имажинерни корена $r_{1,2} = \pm i\omega_0$. По аналогичен начин, както при решаването на уравнението (П.5), за общото решение на диференциалното уравнение (П.13) на хармоничния осцилатор се получава

$$(П.14) \quad x = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$



БУЛВЕСТ 2000

Издава

за ученици от 1. до 12. клас

**УЧЕБНИЦИ, ТЕТРАДКИ
И УЧЕБНО-ПОМОЩНА ЛИТЕРАТУРА**

за кандидат-гимназисти

**ТЕСТОВЕ ЗА ПОДГОТОВКА
ЗА НАЦИОНАЛЕН ИЗПИТ СЛЕД 7. КЛАС**

за кандидат-студенти

**СБОРНИЦИ, СПРАВОЧНИЦИ, ТЕСТОВЕ,
ПОМАГАЛА, РАЗРАБОТКИ ПО:
БЪЛГАРСКИ ЕЗИК, ЛИТЕРАТУРА, ИСТОРИЯ,
МАТЕМАТИКА, ХИМИЯ, ФИЗИКА, ГЕОГРАФИЯ**

за учители

РЪКОВОДСТВА И УЧЕБНИ ПОСОБИЯ

за всички

НАУЧНА И ХУДОЖЕСТВЕНА ЛИТЕРАТУРА

СПЕЦИАЛНА ТЪРГОВСКА ОТСТЪПКА ЗА УЧИЛИЩА

За контакти:

Офис: 1505 София, ул. „Васил Друмев“ 36

тел.: (02) 8061 300, факс: 8061 313

e-mail: bulvest@bulvest2000.com

Търговски отгел: бул. „Проф. Цв. Лазаров“ 18, ет. 2

тел./факс: 978 34 69

www.bulvest.com

Основи на ФИЗИКАТА част II

Автор

Максим Максимов

Редактор

Татяна Христакуди

Българска. Първо издание

Формат 70x100/16. Печатни коли 18

Издателство

БУЛВЕСТ 2000

1505 София, ул. „Васил Друмев“ 36

тел.: (02) 8061 300, факс: 8061 313

Печат

БУЛВЕСТ – СОФИЯ АД, печатница „Вулкан“